ENG-267: Méthodes d'estimation

Complément du cours: La moyenne pondérée

Semaine 4

Poids et cofacteurs pour $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ diagonale

Pour $\mathbf{K}_{\ell\ell}(3 \times 3)$ diagonale, dont le dernier élément est la variance de référence:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2/\sigma_a^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_c^2/\sigma_b^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_a & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_b & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \sigma_a^2 \cdot p_a = \sigma_b^2 \cdot p_b = \sigma_c^2 \cdot 1 = \sigma_0^2$$

Procédé

Lors du cours, nous avons considéré deux mesures d'une grandeur avec des appareils différents (les deux mesures sont indépendantes): a avec σ_a et b avec σ_b.

On aimerait calculer *la moyenne pondérée* : $m = p_a a + p_b b$ ou la somme des pondérations correspond à l'unité: $p_a + p_b = 1$. Selon la définition (statistique de base) la moyenne pondérée est la moyenne dont la variance est minimale (précision maximale). On écrit le calcul de la moyenne pondérée sous forme vectorielle:

$$m = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_a \\ \ell_b \end{bmatrix} \tag{1}$$

et on exprime la variance de la moyenne pondérée selon la loi de propagation de la variance:

$$\sigma_m^2 = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \\ & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix} = p_a^2\sigma_a^2 + p_b^2\sigma_b^2 \tag{2}$$

En remplaçant $p_b^2 = (1 - \sigma_a^2)$ on obtient la fonction de coût (*cost function*) à minimiser:

$$\Omega : \ \sigma_m^2 = p_a^2\sigma_a^2 + (1 - p_a^2)\sigma_b^2 = p_a^2\sigma_a^2 + p_a^2\sigma_b^2 - 2p_a\sigma_b + \sigma_b^2$$

On trouve le minimum de cette fonction en effectuant la dérivée partielle le long du terme inconnu p_a et en la mettant à zéro:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_a} : \ 2p_a(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - 2\sigma_b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow p_a = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

Enfin, en utilisant l'égalité $\sigma_a^2 \cdot p_a = \sigma_b^2 \cdot p_b$, on trouve p_b:

$$p_b = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

La prochaine fois, nous insérerons les valeurs de p_a et p_b dans l'éq. (2) et nous développerons ce point.

Moyenne pondérée - continuation

> But: Démontrer la formulation de moyenne pondérée avec variance minimale et obtenir la *relation* entre le *poids* et la *variance*.

Lorsque l'on insére les valeurs dérivées de p_a et p_b dans l'équation (2): $\sigma_{\hat{m}}^2 = p_a^2\sigma_a^2 + p_b^2\sigma_b^2$, on obtient:

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \left(\frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2}\right)^2 \sigma_b^2$$

On simplifie la relation précedente comme suit:

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{\sigma_b^4 \cdot \sigma_a^2 + \sigma_a^4 \cdot \sigma_b^2}{\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)^2} = \frac{\sigma_a^2\,\sigma_b^2\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)}{\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)^2} = \frac{\sigma_a^2\,\sigma_b^2}{\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)}$$

En rappelant que $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, on obtient le poids de la moyenne estimée $\hat{m} = p_a\ell_a + p_b\ell_b$ à partir de la relation précédente:

$$p_m = \frac{1}{\sigma_{\hat{m}}^2} = \frac{\sigma_a^2+\sigma_b^2}{\sigma_a^2\,\sigma_b^2} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2\,\sigma_b^2} + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2\,\sigma_b^2} = \frac{1}{\sigma_a^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} = p_a + p_b \tag{3}$$

En d'autres termes, l'équation (3) s'interprète de la manière suivante:

- **Le poids de la moyenne pondérée est inversement proportionnel à sa variance.**
- **Le poids de la moyenne pondérée est égal à la somme des poids de ses composantes.**[1]

La somme des poids est-elle toujours égal à 1?

Il s'agit d'un choix arbitraire. Si $p_a + p_b \neq 1$ il faut calculer la moyenne pondérée avec la normalisation du poids. Exemple avec 3 variables *indépendantes*:

$$\hat{m} = \frac{p_a}{(p_a+p_b+p_c)}\ell_a + \frac{p_b}{\sum p_i}\ell_b + \frac{p_c}{\sum p_i}\ell_c \tag{4}$$

ce qui, pour la variance de la moyenne pondérée, donne

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \left(\frac{p_a}{\left(\sum p_i\right)^2} + \frac{p_b}{\left(\sum p_i\right)^2} + \frac{p_c}{\left(\sum p_i\right)^2}\right) \cdot \sigma_0^2 = \frac{\sum p_i}{\left(\sum p_i\right)^2} \cdot \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum p_i} \tag{5}$$

Indépendence à σ_0^2

Dans le cas où le σ_0^2 est quelconque, la propagation de la variance pour la moyenne pondérée donne $\sigma_{\hat{m}}^2 = \mathbf{K}_{\hat{m}} = \mathbf{F}\sigma_0^2\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{F}^T$. En déplaçant σ_0^2 sur le côté gauche de l'équation et en utilisant la définition des poids, on obtient $\mathbf{P}_m = \left(\frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{K}_{\hat{m}}\right)^{-1}$ or $p_m = \sigma_0^2/\sigma_{\hat{m}}^2$. En substituant la relation (5) à la place de $\sigma_{\hat{m}}^2$, on obtient: $p_m = \sigma_0^2/\left(\sigma_0^2/\sum p_i\right) = \sum p_i$, confirmant l'affirmation de la note de bas de page mentionnée précédemment.

Remarques

Attention: Les relations dérivées de la moyenne pondérée ne sont valables que pour les variables *indépendantes*!

Perspectives: La prochaine fois, nous examinerons *l'influence des corrélations* entre trois variables sur la moyenne pondérée. Cela entraîne la nécessité d'utiliser un nouvel estimateur, dont la dérivation sera introduite plus tard (dans le bloc 3).

[1] indépendanment du choix de σ_0^2.