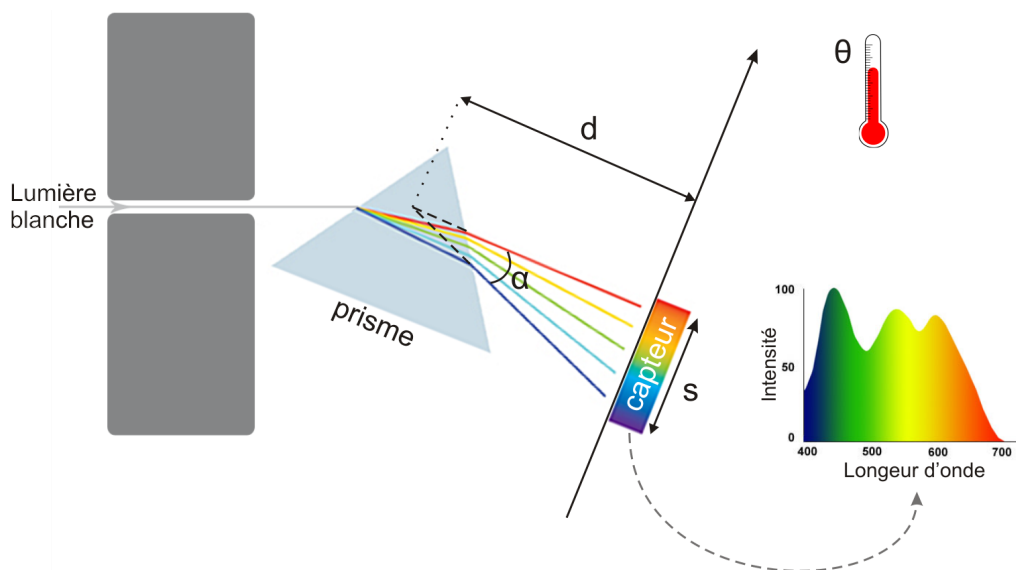


Série d'exercices 4 : Propagation d'erreur (spectromètre simplifié)

Jesse et Laurent veulent construire et calibrer leur propre spectromètre. Pour ce faire ils assemblent un prisme et une vieille caméra numérique. La lumière passe par une longue fente pour limiter son angle d'incidence, puis elle est dispersée par un prisme avec l'angle de dispersion α et projetée sur le capteur numérique. La distance entre le capteur et le prisme est d . Sachant que les matériaux utilisés vont se contracter/dilater, ils mesurent également la température θ .



Jesse et Laurent mesurent d , α et θ . Pour chaque type de mesure, ils admettent une erreur maximale (tolérance). Ils s'intéressent à trois fonctions de leurs observations :

- S [cm] : la hauteur de l'image projetée sur le capteur,
- R [-] : le rapport d'intensité de lumière pour le pixel central,
- N [dB] : le bruit du capteur.

Pour approcher le cas standard du cours et faciliter la mécanisation de leurs formules, ils désignent leurs mesures par a , b et c .

Mesures

$$\begin{aligned} a = d &= 5.0 \text{ cm}, & e_a &= 0.2 \text{ cm} \\ b = \alpha &= 33.0^\circ, & e_b &= 0.5^\circ \\ c = \theta &= 26.0^\circ\text{C}, & e_c &= 1.0^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Avec les constantes :

$$d_0 = 10 \text{ cm}, \quad \theta_0 = 20^\circ\text{C}, \quad k = 4 \text{ dB}$$

Fonctions

$$\begin{aligned}
 y_1 = S(a, b) &= d \cdot \sin(\alpha) \\
 y_2 = R(a, b, c) &= \frac{d_0}{d} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) \\
 y_3 = N(c) &= k \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}}
 \end{aligned}$$

Linéarisation

Pour linéariser ces fonctions, il faut établir la matrice \mathbf{F} de taille 3×3 telle que :

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \end{bmatrix}$$

Exercice

1. Linéarisation avec une calculatrice, puis avec Python :

- Combien de chiffres significatifs sont nécessaires pour les éléments de \mathbf{F} ?
- Calculez ces éléments par linéarisation numérique.
- Calculez ces éléments par linéarisation analytique.

2. Erreurs maximales (tolérances) :

- Calculez les erreurs maximales sur y_1 , y_2 et y_3 .

3. Variances et écarts-types (erreurs moyennes ou quadratiques) :

On considère maintenant un écart-type correspondant au tiers de l'erreur maximale :

$$\sigma_i = \frac{e_i}{3}$$

- Construisez la matrice de covariance de a , b et c .
- Calculez la matrice de covariance de y_1 , y_2 et y_3 .
- Calculez les écarts-types pour y_1 , y_2 et y_3 .
- Commentez les différences entre les erreurs maximales et les écarts-types.

4. Covariances et corrélations :

- Calculez les corrélations pour y_1 , y_2 et y_3 .
- Commentez les corrélations entre y_1 , y_2 et y_3 , notamment leur signe.

5. Idem avec des mesures corrélées :

- À cause de la dilatation due à la température, le prisme se rapproche du capteur. Pour en tenir compte, introduisez une corrélation de -0.8 entre a et b et recalculez la matrice de covariance des mesures.
- Répétez le calcul de propagation et commentez les nouveaux résultats : écarts-types de y_1 , y_2 et y_3 , ainsi que leurs corrélations.