Série d'exercices 3 : Modèle stochastique

Chute libre

Kyriaki et Aurélien veulent déterminer ce qui tombe plus vite : un oreiller ou un marteau. Pour ce faire, Aurélien jette chaque objet depuis la terrasse du bâtiment GR* et Kyriaki chronomètre deux chutes du marteau (ℓ_1 et ℓ_2), puis deux chutes de l'oreiller (ℓ_3 et ℓ_4). Ensuite, ils forment le vecteur :

$$\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{bmatrix}$$

Kyriaki et Aurélien sont d'accord quant à la manière de mesurer, mais pas quant au modèle stochastique à appliquer.
Aurélien fait les hypothèses suivantes :

- Les mesures ℓ_i ont toutes le même écart-type σ_ℓ.
- Elles sont toutes corrélées à raison de 1/3.

a) Écrivez le modèle stochastique selon Aurélien :

$$\mathbf{K}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Kyriaki fait les hypothèses suivantes:

- L'écart-type est deux fois plus petit pour le marteau que pour l'oreiller : respectivement 0.4 s et 0.8 s.
- Les mesures sont corrélées à raison de 20%, uniquement pour le même objet.

b) Exprimez le modèle stochastique de Kyriaki (valeurs numériques et unité) :

$$\mathbf{K}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

c) Théoriquement, quel objet tombe le plus vite ?

d) Quel modèle stochastique est plus réaliste ? Justifiez en 2 lignes.

e) Proposez un meilleur modèle. Justifiez votre choix.

f) Pourquoi Kyriaki et Aurélien doivent-ils tenir compte de l'incertitude des mesures ?

**Exercice purement théorique : ne jetez jamais des objets depuis les toits de l'EPFL, même au nom de la science !*

Chaud devant

À l'aide d'un thermomètre, Rahel et Selim mesurent la température d'une solution chimique portée lentement à ébullition. À quatre instants t_i, ils notent la température θ_i et forment le vecteur :

$$\ell = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

L'écart-type d'une mesure est de 1.6% de la valeur lue.
Les valeurs mesurées sont corrélées en fonction du temps écoulé :

$$\rho_{ij} = \rho_{\theta_i,\theta_j} = \frac{1}{1 + \Delta t_{ij}}, \quad \Delta t_{ij} = t_j - t_i \text{ [minutes]}$$

Temps [hh:mm]	14:01	14:03	14:06	14:10
Température [°C]	63	79	88	95

a) Construisez la matrice de corrélation $R_{\ell\ell}$, d'abord en fractions, puis en %.

$$\mathbf{R}_{\ell\ell} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\ell\ell}\,[\%] = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

b) Une telle corrélation est-elle plausible ? Justifiez en 2 lignes.

c) Calculez la matrice de covariance $K_{\ell\ell}$. De préférence, écrivez un programme Python. Reportez les valeurs numériques avec un nombre raisonnable de chiffres significatifs.

AbracadaByte

Une matrice de covariance $n \times n$ requiert beaucoup de mémoire. Pour cette raison, il est parfois préférable de stocker :

- un vecteur de dimension n pour les écarts-types ;
- un vecteur de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ pour les corrélations (en % arrondis).

a) Écrivez un code Python pour réaliser une telle conversion, quel que soit n.

b) Écrivez un code Python pour l'opération inverse (construction de $K_{\ell\ell}$).

c) Pour la matrice $K_{\ell\ell}$ de l'exercice "Chaud devant", effectuez la conversion.

d) Effectuez la conversion réciproque.

e) Comparez la matrice de covariance obtenue avec l'originale. Commentez.