Contrôle continu, 11 novembre 2025
(54 points)
Solution

Ardez (2 points)

Choisissez parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies :
Les moindres carrés sont utiles ...

(a) ☒ pour détecter des fautes.

(b) ☒ pour estimer la précision de résultats.

(c) ☒ pour favoriser de bonnes mesures.

(d) ☒ pour améliorer les modèles.

San Bernardino (10 points)

Un problème résolu en compensation conditionnelle a les propriétés suivantes :

1. Des observations de **types différents**, **corrélées**,
2. Certaines conditions **linéaires** et d'autres **non-linéaires**.

Marquez par **OUI** ou **NON** si l'élément de la colonne (*cause*) influence celui de la ligne (*effet*):

cause → ↓ effet	observations $\ell_1 \ldots \ell_n$	conditions $\mathbf{f}(\boldsymbol{\ell})$	écarts-types *à priori* $\sigma_{\ell_1} \ldots \sigma_{\ell_n}$	corrélations $\rho_{\ell_1,\ell_2} \ldots \rho_{\ell_{n-1},\ell_n}$
écarts de fermeture $\mathbf{w}$	**OUI**	**OUI**	**NON**	**NON**
dérivées partielles $\mathbf{B}$	**OUI**	**OUI**	**NON**	**NON**
observations compensées $\hat{\ell}_1 \ldots \hat{\ell}_n$	**OUI**	**OUI**	**OUI**	**OUI**
taille de la matrice de covariance des obs. comp. $\mathbf{K}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$	**OUI / NON**	**NON**	**OUI / NON**	**NON**
quotient global "$\hat{\sigma}_0/\sigma_0$"	**OUI**	**OUI**	**OUI**	**OUI**

Table 1: **+1/2** *point par réponse correct,* **−1/2** *point par réponse incorrect, minimum de points de l'exercice : 0 point*

Les Follatères (30 points)

Questions

Q1 (2 pts.) Calculez la longueur L_1 du tunnel à partir des mesures d'Antoine:
$L_1 = \sqrt{(E_{\text{out}} - E_{\text{in}})^2 + (N_{\text{out}} - N_{\text{in}})^2} = 15000.3$ m

Q2 (2 pts.) Calculez la longueur L_2 du tunnel à partir des mesures de Nicola:
$L_2 = v \cdot t = 15125.0$ m

Q3 Compensation conditionnelle des observations
L'ensemble des observations sont utilisées pour résoudre une compensation conditionnelle.

$$\boldsymbol{\ell} = \left(E_{in},\, N_{in},\, E_{out},\, N_{out},\, v,\, t\right)^T$$

(1)(2 pts.) Quelle est la surdétermination ?

$$r = 1$$

(2)(4 pts.) Former le vecteur $\mathbf{w}$ des conditions.

$$\mathbf{w} = \left(\sqrt{(E_{\text{out}} - E_{\text{in}})^2 + (N_{\text{out}} - N_{\text{in}})^2} - v \cdot t\right)$$

(3)(3 pts.) Esquissez la matrice $\mathbf{B}$ dans le quadrillage, en notant d'une croix les éléments non-nuls.

$$\mathbf{B}_{(1\times 6)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial E_{in}} & \frac{\partial w}{\partial N_{in}} & \frac{\partial w}{\partial E_{out}} & \frac{\partial w}{\partial N_{out}} & \frac{\partial w}{\partial v} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix}$$

(4)(3 pts.) Écrire la matrice $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ des observations en **Python** dans le cas où nous supposons l'ensemble des observations comme non corrélées.

```
# Version detaillee
sigma_coo = sigma_v = sigma_t = 1.0
variances = np.array([
        sigma_coo ** 2,
        sigma_coo ** 2,
        sigma_coo ** 2,
        sigma_coo ** 2,
        sigma_v ** 2,
        sigma_t ** 2,
        ])
K_ll = np.diag(variances)

# Version simplifiee
K_ll = np.eye(6)
```

(5)(4 pts.) Écrire la matrice $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ des observations en **Python** dans le cas où les observations E_i et N_i sont corrélées avec un coefficient $\rho \neq 0$.

```
rho = 0.3

cov_e_n = rho * sigma_coo * sigma_coo

K_ll[0, 1] = K_ll[1, 0] = K_ll[2, 3] = K_ll[3, 2] = cov_e_n
```

Q4 (3 pts.) **Propagation de variance pour la distance par mesure de la vitesse et du temps.**
Calculer l'écart-type de la distance obtenue par mesure de la vitesse et du temps σ_{L_2} par propagation de variance.

$$\sigma_{L_2} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T} = \sqrt{\begin{pmatrix} t & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix}} = \sqrt{t^2 \cdot \sigma_v^2 + v^2 \cdot \sigma_t^2} = 605.5 \text{ m}$$

Q5 (4 pts.) **Moyenne pondérée.**
On dispose de deux observations indépendantes de L :

$$L_1 \pm \sigma_{L_1}, \qquad L_2 \pm \sigma_{L_2}.$$

Avec :

- $L_1 = 15000\ m$
- $\sigma_{L_1} = 2\ m$
- Reprenez les valeurs calculées de L_2 et σ_{L_2} aux questions précédentes.

Calculer la moyenne pondérée : $\hat{L}$ et $\sigma_{\hat{L}}$.

$$p_1 = \frac{1}{\sigma_{L_1}^2}, \qquad p_2 = \frac{1}{\sigma_{L_2}^2}$$

$$\hat{L} = \frac{p_1 \cdot L_1 + p_2 \cdot L_2}{p_1 + p_2} = 15000.001 \text{ m}$$

$$\sigma_{\hat{L}} = \sqrt{\frac{1}{p_1 + p_2}} = 2.0 \text{ m}$$

Q6 (3 pts.) On admet que 10'000 personnes effectuent **exactement la même mesure** (même valeurs numériques) de t et v que Nicola.
Vers quelle valeur tendra la moyenne pondérée de la distance $\hat{L}$ du tunnel en utilisant ces 10'000 mesures et la mesure de L_1. Justifiez votre réponse.

En répétant la mesure de t et v 10'000 fois, leurs écarts-type vont tendre vers zéro. Ainsi, l'écart-type de L_2 σ_{L_2} va aussi fortement diminuer augmentant ainsi le poids p_2 de L_2 dans le calcul de la moyenne pondérée. Le résultat de la distance $\hat{L}$ calculé par moyenne pondérée va tendre vers la valeur L_2.

Oberalppass (12 points)

Vous voulez exprimer **de la meilleure façon** le coefficient de fugacité $\hat{f}$ ainsi que son écart-type $\hat{\sigma}_f$.

Q1 (4 pts.)

$$\hat{f} = \frac{\hat{S}_{AS}}{\hat{S}_{AL}} = 7.08$$

Q2 (4 pts.)

$$\hat{\sigma}_f = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} \cdot \mathbf{F}^T} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{S}_{AL}} & -\frac{\hat{S}_{AS}}{\hat{S}_{AL}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma^2_{\hat{S}_{AS}} & \rho \cdot \sigma_{\hat{S}_{AS}} \cdot \sigma_{\hat{S}_{AL}} \\ \rho \cdot \sigma_{\hat{S}_{AS}} \cdot \sigma_{\hat{S}_{AL}} & \sigma^2_{\hat{S}_{AL}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{S}_{AL}} \\ -\frac{\hat{S}_{AS}}{\hat{S}_{AL}^2} \end{pmatrix}} = 0.17$$

Q3 (4 pts.) Proposez une méthode pour contrôler votre résultat de $\hat{f}$ et $\hat{\sigma}_f$:

Nous disposons du vecteur $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ et de la matrice de covariance $\mathbf{K}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$ des observations compensées, obtenus après répartition des résidus de manière à satisfaire au mieux la condition $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$. Si l'on sélectionne une autre paire d'observations $(\hat{S}_{WS}, \hat{S}_{WL})$ ou $(\hat{S}_{OS}, \hat{S}_{OL})$ et que l'on répète exactement les mêmes opérations, on obtient des valeurs numériquement très proches. Cette quasi-invariance du résultat fournit un contrôle robuste et indépendant de la validité des calculs.