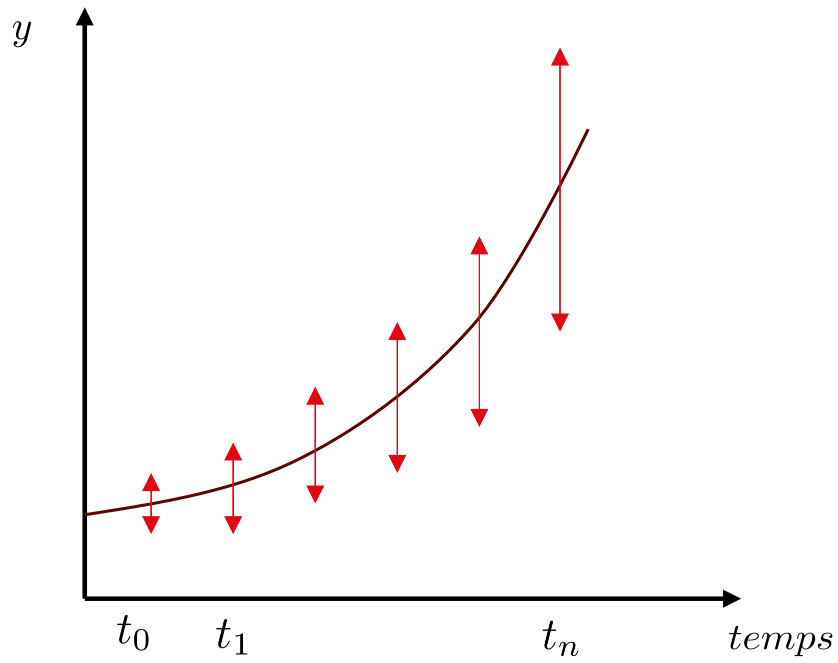
Agenda – même modèle, mais plus simple!

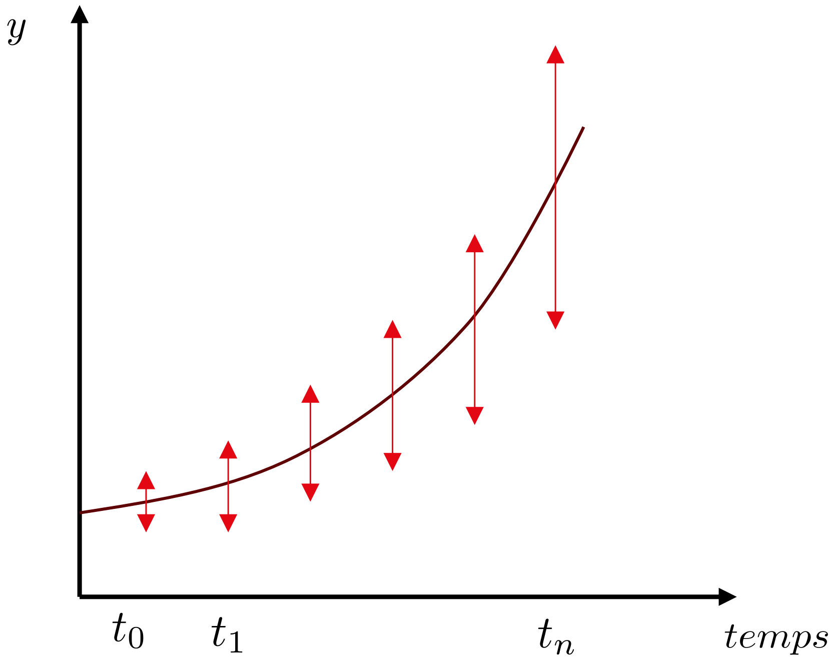
- Transformation d'un modèle
  - Motivation
  - Procédé
  - Exemple concret de biologie

Croissance bactérienne



- En comptant les bactéries:
  - L'erreur augment avec le no. de bactéries
  - Ce sont ne pas les cas de triangles ou les mesures avec la même précision!
  - On suppose que le mesures de temps sont parfaits (pas d'erreur selon l'axe horizontal)

Croissance bactérienne



- Modèle fonctionnel:

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 = y_1 = y_0 \cdot e^{b(t_1 - t_0)} \\ \vdots \\ \ell_n - v_n = y_n = y_0 \cdot e^{b(t_n - t_0)} \end{cases}$$

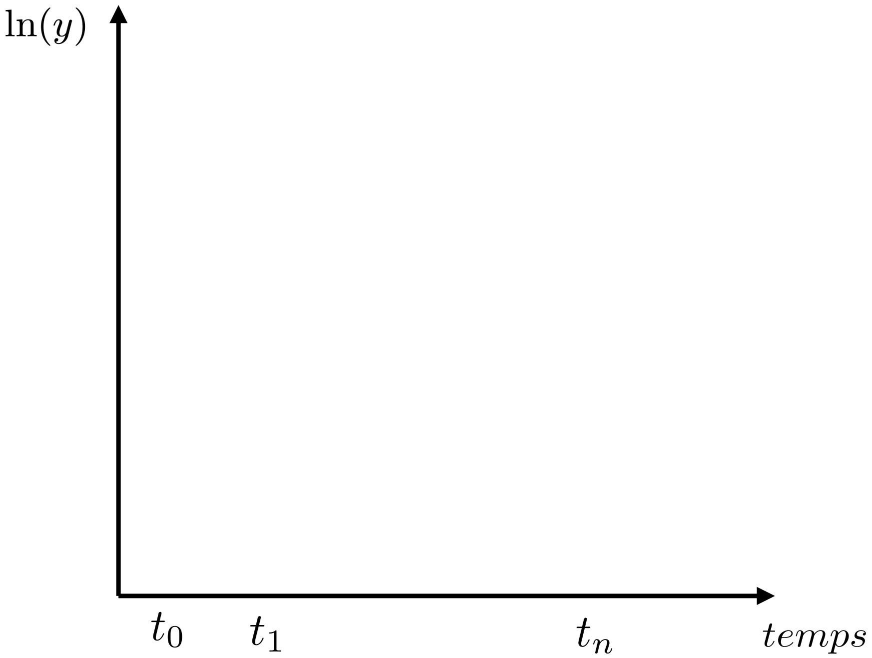
- Modèle stochastique:

$$\sigma \ell_i \propto \ell_i \qquad \sigma_{\ell_i} = \underbrace{c}_{\text{une certaine proportion}} \cdot \ell_i \qquad K_{\ell\ell} = c^2 \cdot \begin{bmatrix} \ell_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_n^2 \end{bmatrix}$$

- Paramètres:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_0 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{puis } \mathring{\mathbf{x}} + \delta\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} q_{\hat{y}_0}^2 & q_{\hat{y}_0\hat{b}} \\ q_{\hat{y}_0\hat{b}} & q_{\hat{b}}^2 \end{bmatrix}$$

Croissance bactérienne – changer les observations



- C'est cas particulière invite à les simplifications:

$$\begin{cases} \ell_1^\star - v_1^\star = & \ln(y_1) = & \overbrace{\ln(y_0)}^{a} + b(t_1 - t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_n^\star - v_n^\star = & \ln(y_n) = & \ln(y_0) + b(t_n - t_0) \end{cases}$$

- Modèle stochastique:

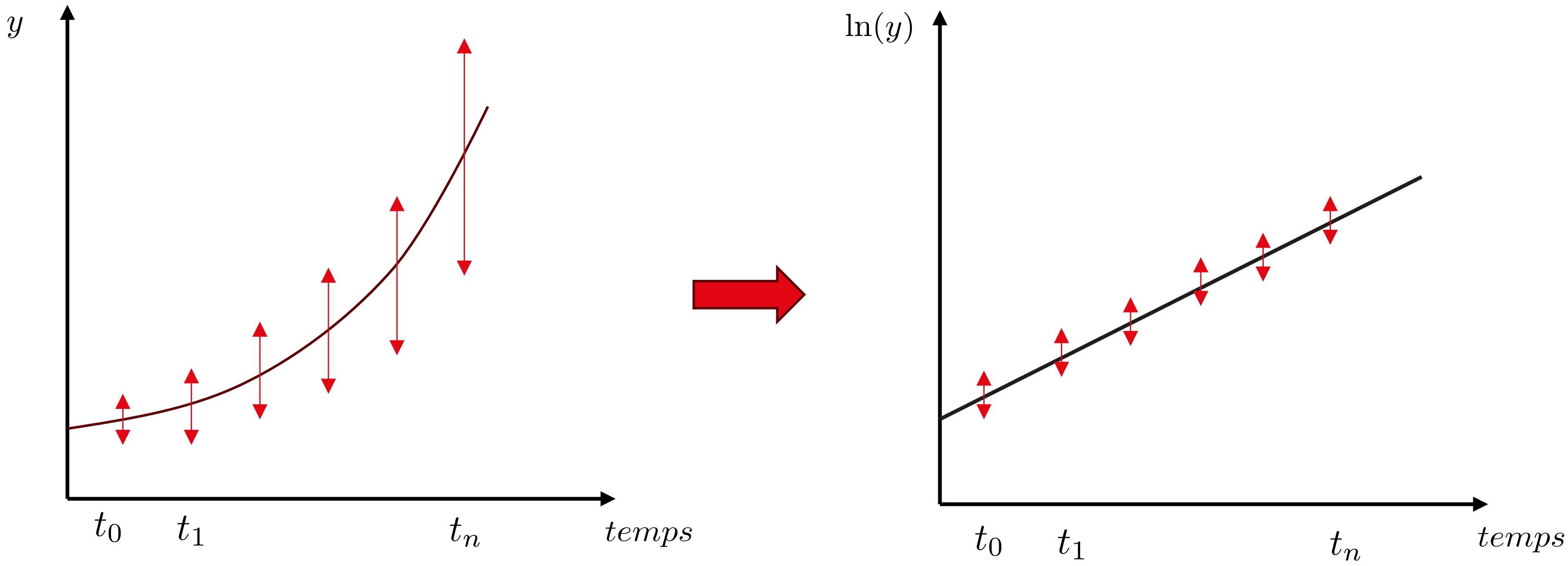
$$\ell_i^\star = f(\ell_i) \longrightarrow \frac{\delta \ell_i^\star}{\delta \ell_i} = \frac{\partial \ln(\ell_i)}{\partial \ell_i} = \frac{1}{\ell_i}$$

$$\ell_i^\star = \begin{bmatrix} \delta \ell_1^\star \\ \vdots \\ \delta \ell_n^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\ell_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \ell_1 \\ \vdots \\ \delta \ell_n \end{bmatrix}$$

- Propagation de variances:

$$\mathbf{K}_{\ell^\star \ell^\star} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T = c^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} \ell_1^2 \frac{1}{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\ell_n} \ell_n^2 \frac{1}{\ell_n} \end{bmatrix} = c^2 \cdot \underbrace{\mathbf{I}_n}_{\mathbf{Q}_{\ell^\star \ell^\star}}$$

Croissance bactérienne - changer les observations



- On obtienne :
  - Comme dans l'exemple de régression linéaire, mais …

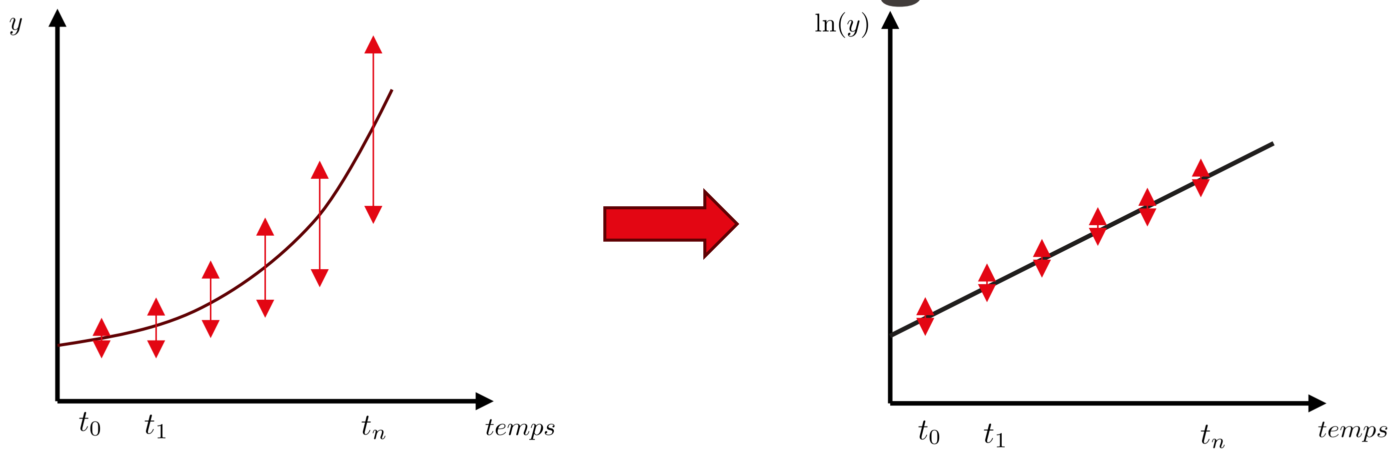
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} q_{\hat{a}}^2 & q_{\hat{a}\hat{b}} \\ q_{\hat{a}\hat{b}} & q_{\hat{b}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a} = \ln(y_0) \Longrightarrow y_0 = e^{\hat{a}}$$

$$\sigma_{y_0} = ?$$

$\longrightarrow$ prop. var

Croissance bactérienne - changer les observations



- On considère 4 cas :

1. y_0 inconnu ✓

2. y_0 observé

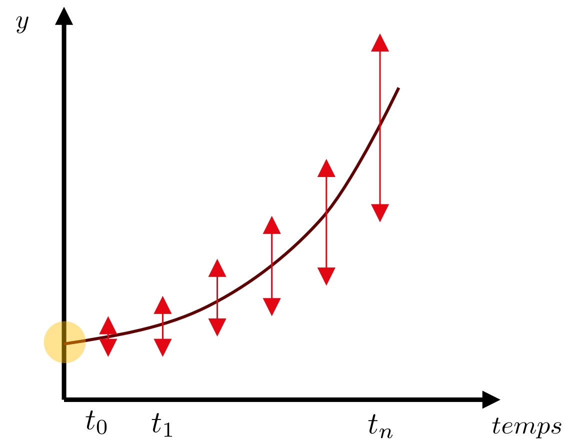
3. $\sigma_{y_0} = 0$

4. différenciation

EPFL

Croissance bactérienne

- cas $\boxed{\text{2. } y_0 \text{ observé}}$
  - Nouvelle mesure $\ell_{y_0} - v_{y_0} = y_0$
  - attention $\sigma_{\ell_0} \neq \underbrace{c \cdot \ell_0}_{\text{souvent plus précis}}$
  - $\rightarrow$ modèle stochastique mois simple!



$\boxed{\text{1. } y_0 \text{ inconnu}}$ ✓

$\boxed{\text{3. } \sigma_{y_0} = 0}$

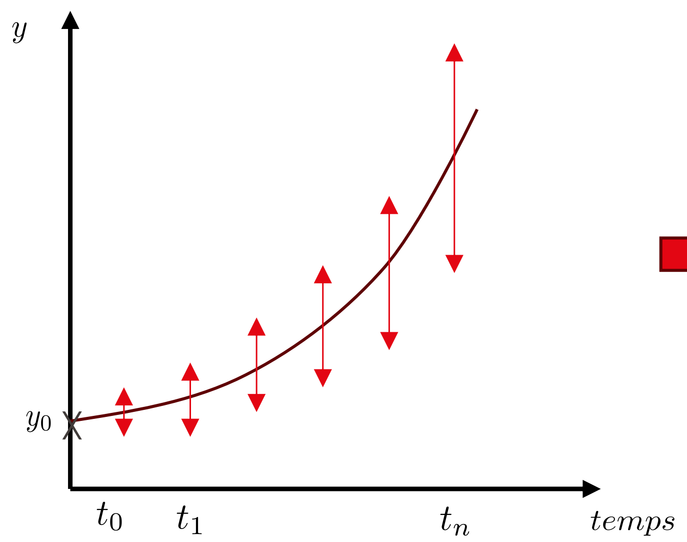
$\boxed{\text{4. différenciation}}$

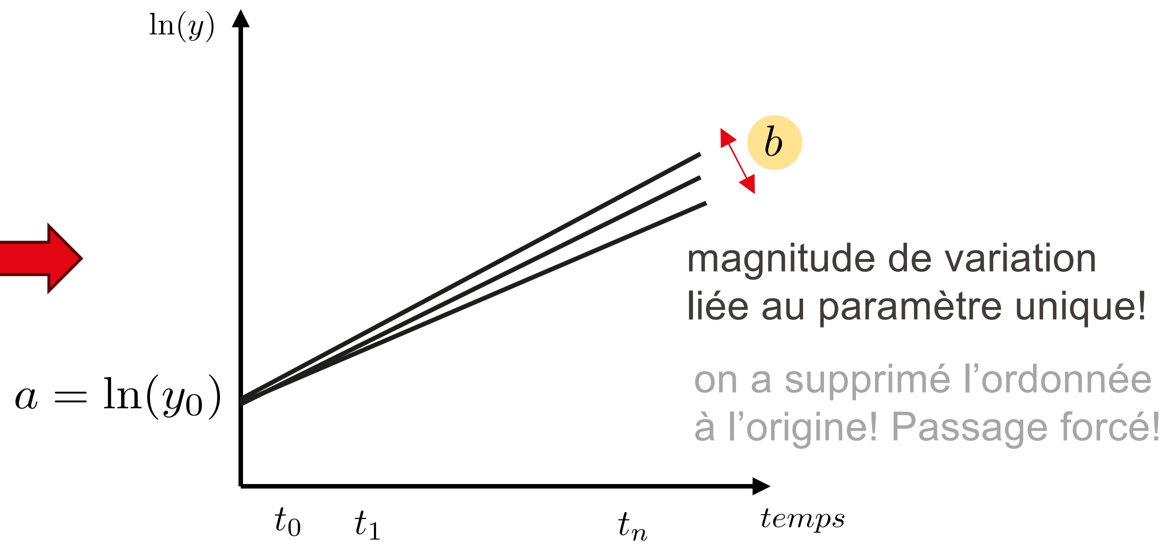
Croissance bactérienne

- cas $\boxed{3.\ \sigma_{y_0} = 0}$

1. Fix y_0 dans le modèle → 1 paramètre
2. Ajouter observation » pseudo »
   - Avec poids 10x → 100x plus élevé

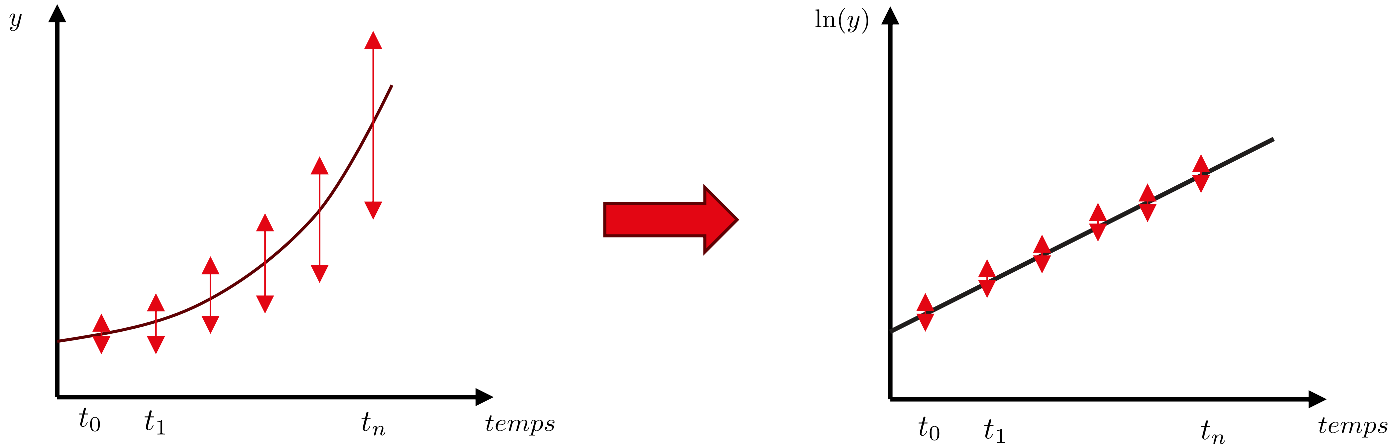
$$y_0^\star = \ln(y_0) = a$$
$$y_i^\star = y_0^\star + b(t - t_0)$$
$$(y_i^\star - y_0^\star) = b(t - t_0)$$





Régression inadéquate! Mieux – changé l'origine!

Croissance bactérienne - changer les observations



- On considère 4 cas :

1. y_0 inconnu ✓

2. y_0 observé ✓

3. $\sigma_{y_0} = 0$ ✓

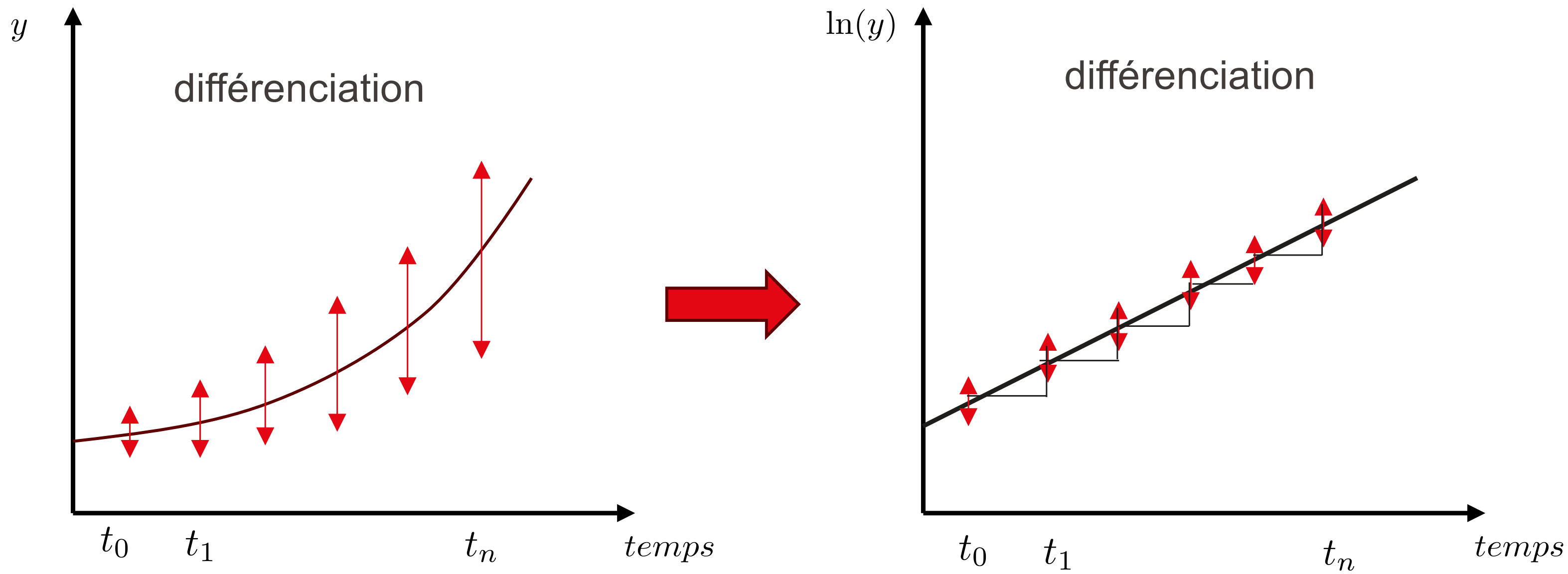
4. différenciation

Croissance bactérienne - changer les observations

- cas 4. différenciation

1. on différence entre les observations dans le temps
   - n-1 observations
   - 1 param. (b)

$$\begin{cases} \ell_1^+ = \ell_2^\star - \ell_1^\star = (a + bt_2) - (a + bt_1) = b(t_2 - t_1) \\ \vdots \\ \ell_{n-1}^+ = \ell_n^\star - \ell_{n-1}^\star = b(t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

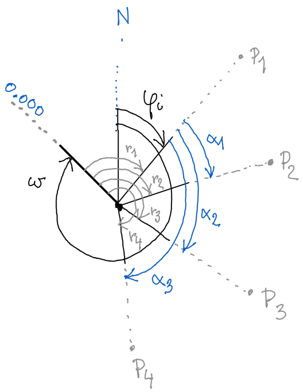


Croissance bactérienne - changer les observations

- cas 4. différenciation
  - On différence entre les observations dans le temps :
    - (n-1) observations
    - 1 param. (b), (a) a été éliminé

$$\begin{cases} \ell_1^+ = \ell_2^\star - \ell_1^\star = (a + bt_2) - (a + bt_1) = b(t_2 - t_1) \\ \vdots \\ \ell_{n-1}^+ = \ell_n^\star - \ell_{n-1}^\star = b(t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

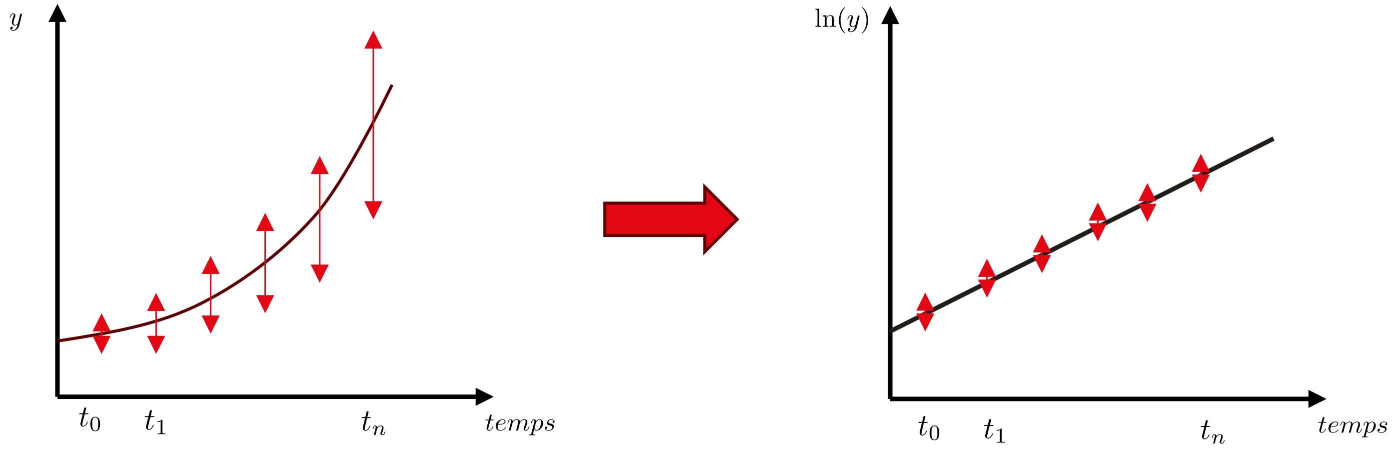
  - D'autre implication
    - les différences sont corrélées négativement !
    - rappelle: corrélation induite



$$\begin{bmatrix} \ell_1^+ \\ \vdots \\ \ell_{n-1}^+ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \ell_1^\star \\ \vdots \\ \ell_n^\star \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\ell^+\ell^+} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{K}_{\ell^\star\ell^\star} \cdot \mathbf{D}^T$$

Changement de observations



- 4 cas :

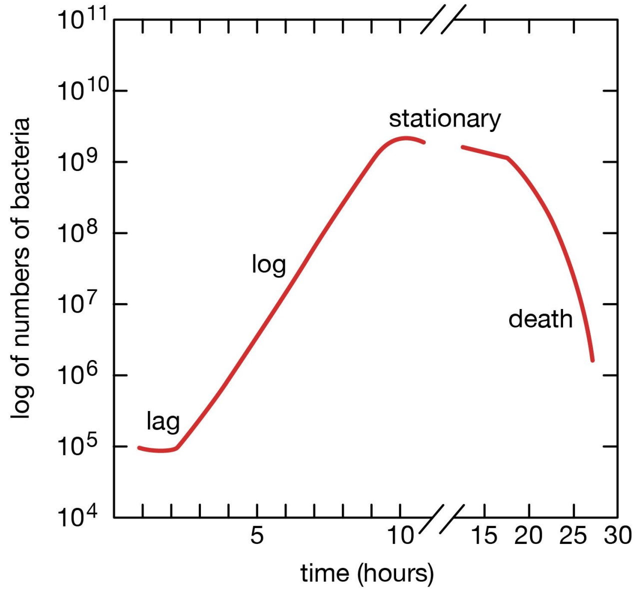
1. y_0 inconnu ✓

2. y_0 observé ✓

3. $\sigma_{y_0} = 0$ ✓

4. différenciation ✓

Changer les observations - synthèse



- Fonction d'une observation
  - Croissance bactérienne : fonction exponentielle
  - Choix d'un modèle linéaire
  - Adaptation du modèle stochastique
    - par propagation de variance
  - Statut de la population initiale y_0 → ⚠ ignorer ou éliminer ≠ fixer
    - inconnue? → régression linéaire avec deux paramètres *a* et *b* *m*
      modèle fonctionnel et modèle stochastique classiques
    - observée? → +1 observation; avec le même sigma que les autres?
      modèle stochastique pas forcément classique
    - connue? → régression forcée: fixer *a* (un seul paramètre: la pente *b*)
      modèle fonctionnel exotique
      → pseudo-observation avec un très petit sigma (grand poids)
      modèle stochastique exotique

Pour mardi lire Chap. 6.1 et 6.2