ENG-267: Méthodes d'estimation

Complément du cours: somme de deux variables normales

Semaine 3

Procédé

Lors du cours, nous avons considéré deux variables normals a et b, ainsi que leur somme c. Avec la lois de propagation de variance, nous avons établi la formule générale pour l'écart-type de $c = \sigma_c$. Avec l'hypothèse $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_0 = 1$, la formule ne dépend que de la corrélation entre a et b, ρ_{ab}.

L'animation comprend plusieurs étapes:

a) Générer 1000 valeurs de a autour 10 avec l'écart-type de 1. L'histogramme illustre une réalisation de $a \in N(10, 1)$.

b) Générer 1000 valeurs de b autour 20 avec l'écart-type de 1. L'histogramme illustre une réalisation de $b \in N(20, 1)$.

c) Calculer 1000 valeurs de c. L'histogramme illustre une réalisation de $c \in N(30, \sigma_c)$. L'écart-type σ_c est estimé avec les formules de l'exercice 2.

d) Répéter b) et c) avec une corrélation entre a et b croissant de 0 à $+1$, puis décroissant de 0 à -1.

e) Pour les valeurs particulières de ρ_{ab}, comparer la valeur théorique de σ_c selon la lois de propagation de variance et sa r empirique obtenue avec les échantillons de a à b.

Visualisation

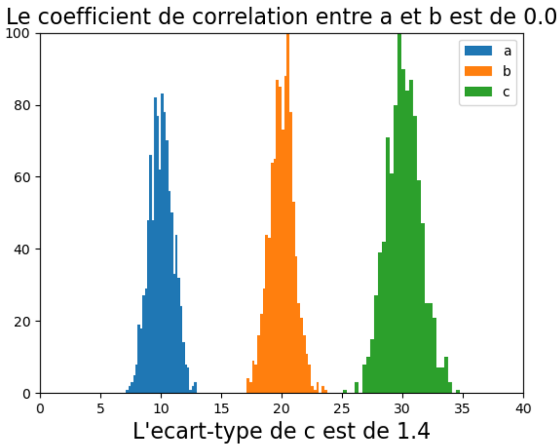
Les captures d'écrans ci-dessous illustrent les situations qui ont fait l'objecte d'une comparaison explicite. Dans tous les cas, la correspondance est très bonne. Ce résultat est prévisible grâce à la taille importante de l'échantillon.

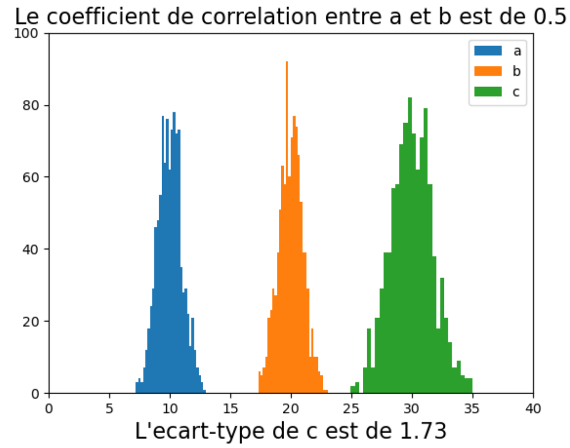
Remarque

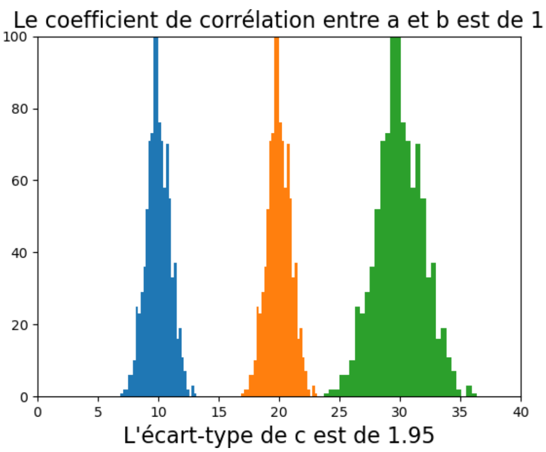
La loi de propagation de variance n'exige aucune hypothèse quant à la distribution des variables aléatoires. A ce stade, disons qu'elle s'applique particulièrement bien à des variables normales. Notamment, on constate que l'histogramme de c illustre bien une cloche.

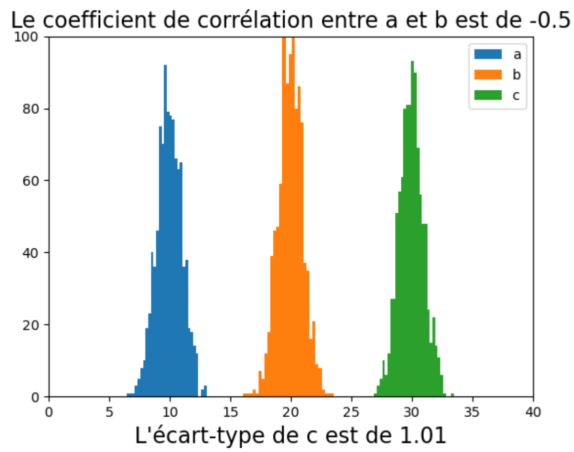
On rappelle ici le *théorème central limite*. En langage ordinaire: "Le mélange de variables aléatoires tend vers la loi normale".

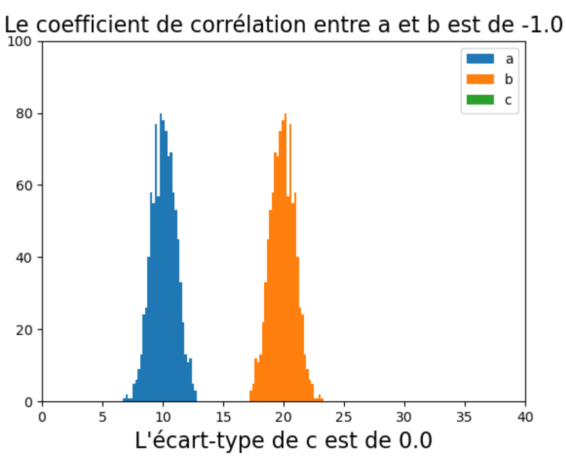
Pour des variables non-normales dont on connaît la distribution, on peut recourir à des simulations Monte-Carlo. Toutefois la loi normale est souvent adéquate pour modéliser des erreurs de mesure.


Le coefficient de correlation entre a et b est de 0.0
a
b
c
L'ecart-type de c est de 1.4


Le coefficient de correlation entre a et b est de 0.5
a
b
c
L'ecart-type de c est de 1.73


Le coefficient de corrélation entre a et b est de 1
L'écart-type de c est de 1.95


Le coefficient de corrélation entre a et b est de -0.5
a
b
c
L'écart-type de c est de 1.01


Le coefficient de corrélation entre a et b est de -1.0
a
b
c
L'écart-type de c est de 0.0

Output numérique

```
Rho:  0.0 ecart_type emp: 1.40   ecart_type_theo: 1.41
Rho:  0.0 ecart_type emp: 1.40   ecart_type_theo: 1.41
Rho:  0.1 ecart_type emp: 1.49   ecart_type_theo: 1.48
Rho:  0.2 ecart_type emp: 1.49   ecart_type_theo: 1.55
Rho:  0.3 ecart_type emp: 1.59   ecart_type_theo: 1.61
Rho:  0.4 ecart_type emp: 1.71   ecart_type_theo: 1.67
Rho:  0.5 ecart_type emp: 1.73   ecart_type_theo: 1.73
Rho:  0.6 ecart_type emp: 1.78   ecart_type_theo: 1.79
Rho:  0.7 ecart_type emp: 1.79   ecart_type_theo: 1.84
Rho:  0.8 ecart_type emp: 1.94   ecart_type_theo: 1.90
Rho:  0.9 ecart_type emp: 1.96   ecart_type_theo: 1.95
Rho:  1.0 ecart_type emp: 1.95   ecart_type_theo: 2.00
Rho:  0.0 ecart_type emp: 1.43   ecart_type_theo: 1.41
Rho: -0.1 ecart_type emp: 1.33   ecart_type_theo: 1.34
Rho: -0.2 ecart_type emp: 1.27   ecart_type_theo: 1.26
Rho: -0.3 ecart_type emp: 1.18   ecart_type_theo: 1.18
Rho: -0.4 ecart_type emp: 1.10   ecart_type_theo: 1.10
Rho: -0.5 ecart_type emp: 1.01   ecart_type_theo: 1.00
Rho: -0.6 ecart_type emp: 0.89   ecart_type_theo: 0.89
Rho: -0.7 ecart_type emp: 0.79   ecart_type_theo: 0.77
Rho: -0.8 ecart_type emp: 0.64   ecart_type_theo: 0.63
Rho: -0.9 ecart_type emp: 0.44   ecart_type_theo: 0.45
Rho: -1.0 ecart_type emp: 0.00   ecart_type_theo: 0.00
```