

Contrôle facultatif, 9 décembre 2025

(54 points)

Pollution dans la Venoge

On s'intéresse à la pollution de la Venoge, une rivière du canton de Vaud, en aval d'un site industriel à Aclens. On modélise la rivière comme un axe 1D, de coordonnée s (en km), avec le point de rejet supposé à $s = 0$.

On effectue des mesures de concentration en polluant dissous, notée C (en mg/l), à différentes distances s_i en aval. On suppose que, dans le tronçon étudié, la concentration moyenne suit approximativement un modèle linéaire :

$$C(s) = C_0 + a s$$

où :

- C_0 : concentration au niveau de la source de pollution (mg/L),
- a : gradient de concentration le long de la rivière (mg/l/km), attendu négatif,
- Les mesures de concentration ont le même écart-type a priori $\sigma_C = 0.2$ mg/l sans corrélation.
Les mesures de coordonnées s sont considérées parfaites.

On dispose des mesures suivantes :

Point de mesure i	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P5$
s_i (km)	1.0	2.0	3.5	5.0	7.0
C_i (mg/l)	8.2	7.6	6.9	6.1	5.4

Questions

1. (6pts.) Écrire, pour chaque point i , l'équation paramétrique de la forme $\boldsymbol{\ell} - \hat{\boldsymbol{v}} = \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$, en précisant le vecteur des paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{x}}$, le vecteur des observations $\boldsymbol{\ell}$ et le vecteur des résidus sur les observations $\hat{\boldsymbol{v}}$:

2. (4pts.) Ecrire explicitement la matrice **A en Python** ainsi que les valeurs numériques obtenues:

3. (3pts.) Ecrire explicitement le modèle stochastique **en Python**:

4. (2pts.) Combien d'itérations seront nécessaires pour converger, pourquoi?

5. (3pts.) Ecrire **en Python** le code qui permet de calculer numériquement $\delta\hat{\mathbf{x}}$ ainsi que la matrice des cofacteurs associée.

6. (1pt.) Un collègue vous dit qu'après 100 itérations de son algorithme de compensation il trouve une meilleure valeur que vous, que lui conseillez vous?

7. (2pts.) Après l'exécution de votre code en (5) vous obtenez:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} = \begin{bmatrix} 0.8004386 & -0.1622807 \\ -0.1622807 & 0.04385965 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8.5747807 \\ -0.46885965 \end{bmatrix}$$

Exprimer l'écart-type du paramètre de concentration au niveau de la source de pollution \hat{C}_0 :

8. Résidus et écart-type à posteriori

- (a) (4pts.) Calculer les résidus $\hat{v}_i = C_i - \hat{C}_i$:
- (b) (2pts.) Calculer l'écart-type de l'unité de poids à posteriori ($\hat{\sigma}_0$):
- (c) (2pts.) Calculer et commenter le quotient global:

9. Interprétation des résultats

- (a) (2pts.) Interpréter physiquement les valeurs de \hat{C}_0 et \hat{a} .
- (b) (2pts.) Estimer la concentration attendue à $s = 10$ km en aval de la source:
- (c) (4pts.) A quelle distance de la source de pollution devons-nous nous placer pour puiser de l'eau sans polluant avec une certitude à 99.9%? (Sachant que la probabilité de se trouver dans l'intervalle $[-3\sigma, +3\sigma]$ est de 99.8%)

10. Voici le listing de la matrice de cofacteurs des résidus $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$:

$$\begin{bmatrix} 0.48 & -0.4 & -0.22 & -0.05 & 0.19 \\ -0.4 & 0.67 & -0.21 & -0.1 & 0.05 \\ -0.22 & -0.21 & 0.8 & -0.19 & -0.17 \\ -0.05 & -0.1 & -0.19 & 0.73 & -0.39 \\ 0.19 & 0.05 & -0.17 & -0.39 & 0.32 \end{bmatrix}$$

- (a) (2pts.) Quel est la redondance totale?
- (b) (2pts.) Quel sont les parts des redonances (z_i) ?

11. Analyse de fiabilité

(a) (4pts.) Calculer la plus grande faute non détectable:

(b) (4pts.) Calculer son effect sur les paramètres:

12. Modélisation

(a) (2pts.) Évaluez la corrélation entre les deux paramètres:

(b) (3pts.) Proposer une méthode pour obtenir les paramètres décorélés à partir des mêmes observations:

Espace pour vos notes

NOM / PRÉNOM :

SCIPER NO. :

Aucun document n'est autorisé à l'exception **d'une feuille** de triche au **format A4**.

Veillez utiliser **un stylo** et pas un crayon.

Veillez utiliser **une calculatrice**, pas de PC, de tablette ou de téléphone.

Durée = 1 période.

Espace pour vos notes