

---

Examen mi-semestre

---

NOM : ..... PRENOM : .....

Numéro SCIPER : .....

**Problème 1: Systèmes discrets**

- a) On suppose un système linéaire invariant dans le temps, à temps discret, décrit par l'équation aux différences suivante:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

Montrez que la réponse impulsionnelle est donnée par:  $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ .

- b) Est-ce que ce système est stable? Causal? Sans-mémoire? Justifiez.  
c) Montrez que:

$$h[n] * h[n-1] = 2nh[n]$$

Avec  $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ .

**Solution (3.5 pts)**

- a) (1 pt) En utilisant la transformée Fourier on obtient:

$$\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)Y(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Et ainsi en utilisant la transformée de Fourier inverse:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- b) (1.5 pt) Soit  $|x[n]| \leq B < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$  on a:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]x[n-k] \right| \leq B \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- On reconnaît ici la série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  qui est donc finie, la sortie est donc bien bornée et le système est stable. On peut aussi voir que la réponse impulsionnelle  $h[n]$  ne part pas à l'infini.
  - Un système est causal ssi  $h[n] = 0 \forall n < 0$ , ce qui est le cas ici.
  - Un système est sans mémoire ssi  $h[n] \propto \delta[n]$ , ce qui n'est pas le cas ici.
- c) (1 pt) On utilise la transformée de Fourier pour changer la convolution en multiplication et en prenant en compte le décalage dans le temps:

$$\tilde{H}(\omega) = H(\omega)^2 e^{-j\omega} = \frac{e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}$$

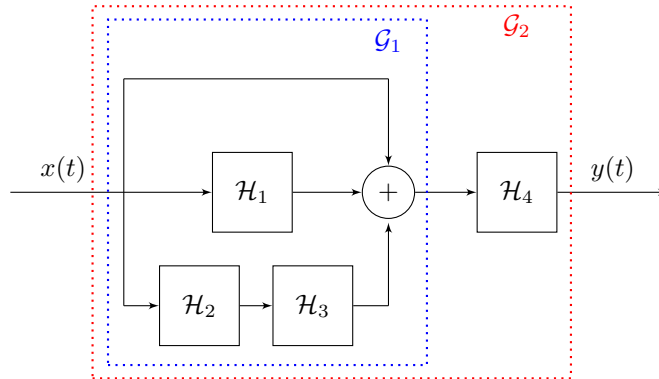
Cette réponse en fréquence correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle:

$$\tilde{h}[n] = 2n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

On a donc bien :  $h[n] * h[n-1] = 2nh[n]$

## Problème 2: Composition de systèmes à temps continu

Considérez le système linéaire invariant dans le temps (LTI) suivant, qui est une composition des systèmes LTI  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$ .



- Montrez que  $\mathcal{G}_1$  est un système linéaire invariant dans le temps.
- Donnez la réponse impulsionnelle du système  $\mathcal{G}_1$ ,  $g_1(t)$ , en fonction de  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  et  $h_3(t)$  qui sont les réponses impulsionnelles des systèmes  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$  respectivement.
- Soit  $H_1(\omega) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega))$ ,  $H_2(\omega) = \cos(\omega) + j\omega$ ,  $H_3(\omega) = H_2^*(\omega)$ .  
Montrez que  $G_1(\omega) = 2 + \omega^2$ .
- Nous définissons la réponse en fréquence du système total  $\mathcal{G}_2$  étant  $G_2(\omega) = 2$ .  
Calculez  $H_4(\omega)$  ainsi que  $h_4(t)$ .  
 $\mathcal{H}_4$  se comporte-t-il comme un filtre passe-bas, passe-bande ou passe-haut ?
- Nous voulons maintenant que  $G_2(\omega)$  supprime les fréquences  $|\omega| > 4$ , tout en conservant son amplitude initiale quand  $|\omega| \leq 4$ .  
Indiquez la nouvelle expression de  $H_4(\omega)$  qui permet d'obtenir l'effet souhaité.  
Quel effet cette opération a-t-elle sur  $h_4(t)$  ?
- Pour chacun des systèmes  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$ , indiquez si c'est un système causal. Justifiez.

### Solution (6 pts)

a) (1 pt)

Linéarité (0.5 pt):

$$\mathcal{G}_1\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \mathcal{H}_1\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} + \mathcal{H}_3\{\mathcal{H}_2\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\}\}$$

$$\text{Puis, } \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \text{ étant linéaires: } \mathcal{G}_1\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_1\mathcal{H}_1\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{H}_1\{x_2(t)\} + \mathcal{H}_3\{a_1\mathcal{H}_2\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{H}_2\{x_2(t)\}\}$$

$$\text{Puis, } \mathcal{H}_3 \text{ étant linéaire: } \mathcal{G}_1\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_1\mathcal{H}_1\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{H}_1\{x_2(t)\} + a_1\mathcal{H}_3\{\mathcal{H}_2\{x_1(t)\}\} + a_2\mathcal{H}_3\{\mathcal{H}_2\{x_2(t)\}\} = a_1\mathcal{G}_1\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{G}_1\{x_2(t)\} \text{ donc } \mathcal{G}_1 \text{ est bien linéaire.}$$

Invariance dans le temps (0.5 pt):

$$\text{Nommons } z(t) \text{ la sortie } \mathcal{G}_1\{x(t)\}, z_1(t) \text{ la sortie } \mathcal{H}_1\{x(t)\} \text{ et } z_3(t) \text{ la sortie } \mathcal{H}_3\{\mathcal{H}_2\{x(t)\}\}.$$

$$z(t - \tau) = x(t - \tau) + z_1(t - \tau) + z_3(t - \tau)$$

$$\mathcal{G}_1\{x(t - \tau)\} = x(t - \tau) + \mathcal{H}_1\{x(t - \tau)\} + \mathcal{H}_3\{\mathcal{H}_2\{x(t - \tau)\}\} = z(t - \tau) \text{ donc } \mathcal{G}_1 \text{ est bien invariant dans le temps.}$$

b) (0.5 pt)

D'après le schéma,  $g_1(t) = \delta(t) + h_1(t) + (h_2 * h_3)(t)$ .

c) (1 pt)

(0.25 pt) Nous avons  $G_1(\omega) = 1 + H_1(\omega) + H_2(\omega)H_3(\omega)$ .

(0.25 pt)  $H_3(\omega) = H_2^*(\omega) = \cos(\omega) - j\omega$ . Donc  $H_2(\omega)H_3(\omega) = (\cos(\omega) + j\omega)(\cos(\omega) - j\omega) = \cos^2(\omega) + \omega^2$ .

(0.25 pt)  $H_1(\omega) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega)) = \sin^2(\omega)$ .

(0.25 pt) Ce qui donne:  $G_1(\omega) = 1 + \sin^2(\omega) + \cos^2(\omega) + \omega^2 = 2 + \omega^2$ .

d) (1.5 pt)

(0.5 pt)  $H_4(\omega) = \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)} = \frac{2}{2+\omega^2}$ .

(0.5 pt)  $\mathcal{H}_4$  se comporte comme un filtre passe-bas. La représentation graphique de  $H_4(\omega)$  est illustrée en Figure 1a.

(0.5 pt)  $h_4(t)$  est une exponentielle bilatérale avec  $a = \sqrt{2}$ ,  $h_4(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|t|}$ . Sa représentation graphique est illustrée en Figure 1b.

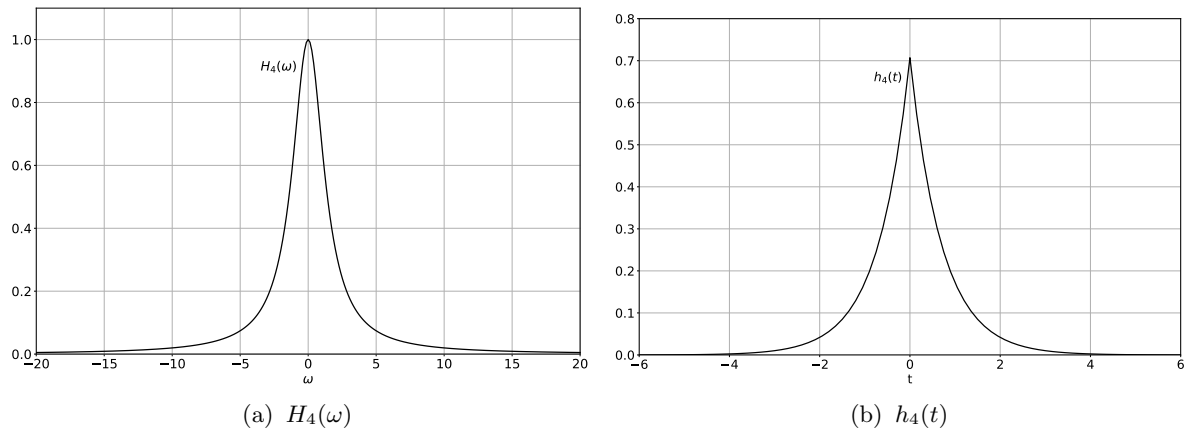


Figure 1: Représentations graphiques du Problème 2.d).

e) (1 pt)

(0.75 pt) Il faut que  $G_2(\omega)$  soit une fonction rectangle avec  $\omega_0 = 2 \times 4 = 8$ . Si nous gardons une amplitude de 2, il faut prendre un facteur de correction  $2\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ , ce qui donne:

$$G_2(\omega) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{4}{\pi}} \times \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0}} & \text{si } |\omega| \leq \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si } |\omega| \leq 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui revient à (illustration en Figure 2a):

$$H_4(\omega) = \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)} = \begin{cases} \frac{2}{2+\omega^2} & \text{si } |\omega| \leq 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(0.25 pt) Cette modification a comme effet l'introduction d'un sinus cardinal dans l'expression de  $h_4(t)$  (suffisant pour les points, illustration en Figure 2b).

Détails: En effet,  $h_4(t) = g_2(t) * \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{G_1(\omega)}\}$ , avec  $g_2(t) = 2\sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi}}\text{sinc}(\frac{\omega_0}{2\pi}t) = \frac{8}{\pi}\text{sinc}(\frac{4}{\pi}t)$ .

$\frac{1}{G_1(\omega)}$  correspond à une exponentielle bilatérale avec  $a = \sqrt{2}$ , donc  $\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{G_1(\omega)}\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|t|}$ .

Donc  $h_4(t) = \frac{8}{\pi}\text{sinc}(\frac{4}{\pi}t) * \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|t|} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\text{sinc}(\frac{4}{\pi}t) * e^{-\sqrt{2}|t|}$ .

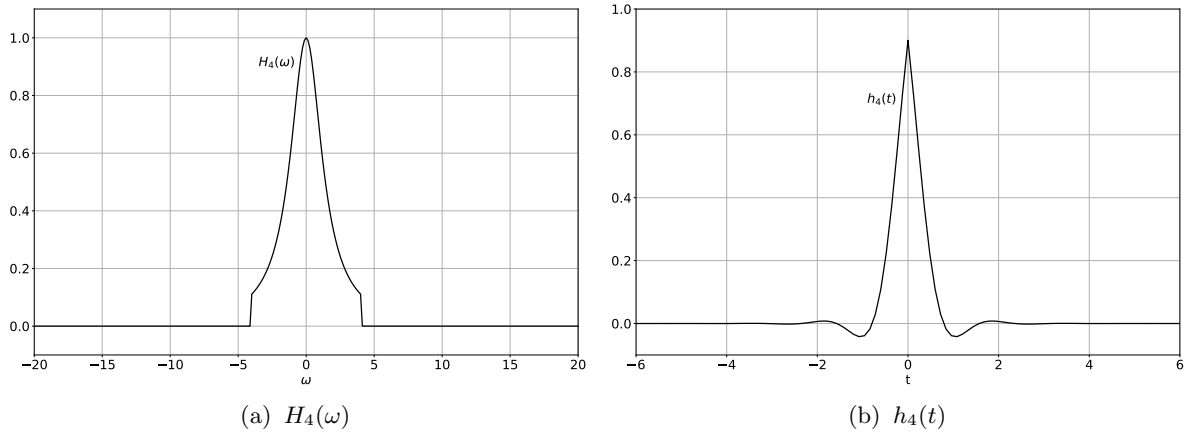


Figure 2: Représentations graphiques du Problème 2.e).

f) (1 pt)

Aucun système n'est causal. En effet, un système est causal si le signal de sortie dépend des entrées présentes et passées, mais pas des entrées futures. En terme de réponse impulsionnelle, cela se traduit par  $h(t) = 0 \forall t < 0$ . Or,

(0.25 pt)  $h_1(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{4}(\delta(t-2) + \delta(t+2))$

(0.25 pt)  $h_2(t) = \frac{\delta(t+1) + \delta(t-1)}{2} + \text{l'opérateur différentiel}$

(0.25 pt)  $h_3(t) = \frac{\delta(t+1) + \delta(t-1)}{2} - \text{l'opérateur différentiel}$

(0.25 pt) Le graphique de  $h_4(t)$  en Figure 2b montre que  $h_4(t) \neq 0 \forall t < 0$ .

### Problème 3: Signaux continus

- a) Soit le système linéaire invariant dans le temps, à temps continu, décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau - \frac{1}{4}y(t) - \frac{1}{8} \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Donnez l'expression de sa réponse en fréquence  $H(\omega)$  et en déduire l'expression de sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ . On suppose  $H(0) = 0$ .

*Indice: simplifiez l'expression de  $H(\omega)$  afin de trouver facilement  $h(t)$ .*

- b) Supposons qu'un signal  $x(t)$  a un spectre tel que:

$$X(\omega) = \frac{j(\omega - 1)}{1 + j(\omega - 1)} + \frac{j(\omega + 1)}{1 + j(\omega + 1)}$$

En utilisant les propriétés de la Transformée de Fourier, déterminez si le signal  $x(t)$  est réel. Justifiez.

### Solution (3.5 pts)

- a) (2.5 pts) En utilisant la transformée de Fourier et les propriétés de celle-ci, on obtient l'équation:

$$\left( \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}j\omega \right) Y(\omega) = X(\omega)$$

Ainsi:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega}{1 - \frac{1}{4}j\omega - \frac{1}{8}(j\omega)^2} = \frac{j\omega}{(1 - \frac{1}{2}j\omega)(1 + \frac{1}{4}j\omega)}$$

Cette expression se simplifie en utilisant la décomposition en élément simple.

On cherche  $A$  et  $B$  tel que:

$$H(\omega) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}j\omega} + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}j\omega} = \frac{(A + B) + \left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2}\right)j\omega}{(1 - \frac{1}{2}j\omega)(1 + \frac{1}{4}j\omega)}$$

Ce qui revient au système:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{4} = 1 \end{cases}$$

Donc  $A = \frac{4}{3}$  et  $B = -\frac{4}{3}$  et finalement:

$$H(\omega) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}j\omega} - \frac{1}{1 + \frac{1}{4}j\omega} \right) = \frac{4}{3} \left( \frac{2}{2 - j\omega} - \frac{4}{4 + j\omega} \right)$$

Ce qui permet de trouver  $h(t)$  facilement:

$$h(t) = \frac{4}{3} (2e^{2t}u(-t) - 4e^{-4t}u(t))$$

b) (1 pt) On rappelle que  $X(\omega) = X^*(-\omega)$  ssi  $x(t)$  est réel, vérifions:

$$X^*(-\omega) = \frac{j(\omega + 1)}{1 + j(\omega + 1)} + \frac{j(\omega - 1)}{1 + j(\omega - 1)} = X(\omega)$$

Donc on a bien que  $x(t)$  est réel.