3.1 Couplage mécano acoustique

H. Lissek

30 octobre 2025

Objectifs, pré-requis

Objectifs

L'objectif de ce cours est de comprendre les mécanismes existant entre un système mécanique en vibration et un champ acoustique sachant que :

- le système mécanique vibrant peut créer le champ acoustique,
- le champ acoustique peut provoquer la vibration du système mécanique.

Pré requis

Les pré-requis pour ce cours sont :

- Systèmes mécaniques et analogies électro-mécaniques (cours 2.2)
- Systèmes acoustiques et analogies électro-acoustiques (cours 2.3)
- Synthèse et applications (cours 2.4)

Découverte du couplage mécano-acoustique

En guise d'introduction, vous pouvez tester vos connaissances concernant le couplage mécano acoustique.
Choisissez un des deux tests suivants :

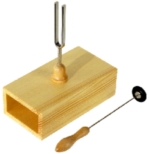
- Relation entre son et vibration ▸ Son/Vibration
- Analyse d'un diapason ▸ Diapason

▸ Suite : début du cours

Classez ces objets acoustiques

Vous voyez ci-dessous des objets "acoustiques". Déterminez le(s)quel(s) :

- Capte une vibration
- Génère un son audible
- Transmet un son audible
- Génère une vibration
- Protège du bruit



Relation entre son et vibration

D'une manière générale, une vibration est une perturbation de particules d'un milieu qui se déplacent par rapport à une position au repos. Cette perturbation se propage dans un milieu matériel. Elle peut exister dans les gaz, les liquides et les solides.

On parle plus couramment de vibration quand la perturbation se propage dans un solide. Dans certains cas, cette vibration peut être perçue de manière physique, par exemple en touchant le solide du bout des doigts.

Le son est un cas particulier de vibration se propageant dans un fluide. Le son est dit "audible" s'il peut être perçu par un être humain. Ceci suppose qu'il soit capable de mettre en vibration le tympan (partie sensible de l'oreille), et que ce mouvement soit perceptible (rapidité et niveau).

Analyse d'un diapason

On considère les trois situations suivantes :

- cas 1 : un diapason est frappé puis posé sur un crâne d'un être humain
- cas 2 : un diapason est frappé puis posé sur une table
- cas 3 : un diapason est frappé puis laissé en l'air

Question :
Classez, pour ces 3 cas, les niveaux sonores générés par le diapason par ordre croissant pour un auditeur placé à 1 m du diapason .

Explication

- Dans le cas où le diapason est laissé en l'air, la vibration du diapason est transmise à l'air par le mouvement des branches. La surface d'échange avec l'air et le déplacement des branches du diapason étant très petits, l'air est très peu mis en mouvement.
- Dans le cas où le diapason est placé sur le crâne d'un être humain, les vibrations du diapason sont transmises au crâne. Ce dernier étant rigide, sa déformation est faible et il déplace peu d'air. Néanmoins la surface du crâne étant beaucoup plus grande que celle des branches du diapason, l'air est mis un peu en mouvement et un son audible est créé.
- Dans le cas où le diapason est posé sur un table, l'amplitude de déformation de la table est assez grande si la table n'est pas trop rigide. D'autre part, la surface de la table étant importante, beaucoup d'air est déplacé, créant ainsi un son audible.

Couplage mécano acoustique : introduction

Cette partie vise à comprendre le phénomène de couplage entre un système mécanique et un système acoustique.

Plus particulièrement, les relations entre les grandeurs physiques caractérisant le système mécanique et le système acoustique sont écrites.

Les schémas équivalents traduisant ces relations entre grandeurs sont présentés.

Cas étudiés

De façon à comprendre les phénomènes de couplage mécano-acoustique, les configurations suivantes seront étudiées

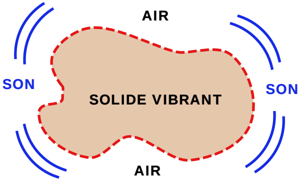
- Piston oscillant dans un tube de section identique à celle du piston
- Piston oscillant dans un tube de section supérieure à celle du piston
- Piston oscillant dans un espace infini

Rappel :

Avant cela, il peut être utile de rappeler le principe du calcul du rayonnement de sources sonores simples : la sphère pulsante et le monopole acoustique.

Notion d'interface : solide vibrant dans l'air

Le couplage mécano acoustique met en situation un solide vibrant dans l'air.



Cette situation fait intervenir deux changements :

- un changement de domaine. Il existe deux volumes disjoints (l'objet et l'air ambiant)
- un changement de milieu : il existe un solide et un fluide (air)

La surface de contact entre ces deux domaines est appelée "interface"

Notion d'interface : changement de domaine

Définition d'une interface (Larousse)

"Plan ou surface de discontinuité formant une frontière commune à deux domaines aux propriétés différentes et unis par des rapports d'échanges et d'interaction réciproques".

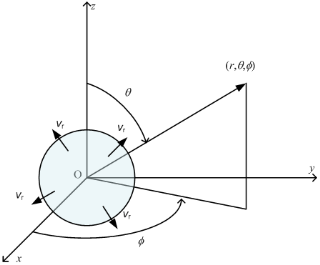
- L'interface est le lieu du couplage entre les deux domaines
- Ce couplage traduit les échanges entre les deux domaines
- L'interface permet d'exprimer la continuité de certaines grandeurs

Exemple

La surface d'un lac est une interface qui assure le couplage (mécanique, optique, ...) entre l'eau et l'air.

Champ rayonné par une sphère pulsante (1)

Considérons une sphére de rayon a, vibrant de manière radiale (indépendante des angles θ et ϕ) à la vitesse $v_r(a)$.



Note : En coordonnées sphériques, l'opérateur $\vec{\nabla}$ s'écrit :

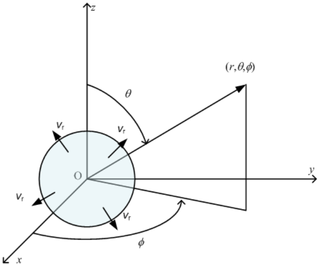
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$

et le Laplacien devient :

$$\triangle = \nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\text{dépendant de } r \text{ seulement}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\left[\cot an\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]}_{\text{dépendant de } \theta \text{ et } \phi}$$

Champ rayonné par une sphère pulsante (2)

Quelle est la forme du champ de pression acoustique dans un système de coordonnées à symétrie sphérique ?



L'équation d'onde en coordonnées sphériques à symétrie de révolution (indépendante de θ et ϕ) est :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions de cette équation sur $r.p(r,t)$ sont donc similaires à l'équation d'onde en 1D (ondes planes), ce qui entraîne :

$$p(r,t) = p_+ \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} + p_- \frac{e^{j(\omega t + kr)}}{r}$$

(Note : onde centrifuge et onde centripète) .

Cependant, la deuxième solution n'est pas physique car $\lim_{x\to 0} \frac{e^{jkr}}{r} = +\infty$, d'où :

$$p(r,t) = p_+ \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}$$

Champ rayonné par une sphère pulsante (3)

Cherchons les solutions correspondant à nos conditions aux limites. Exprimons maintenant la loi de Newton à l'interface de la sphère ($r = a$)

$$-\rho \frac{\partial v_r(a)}{\partial t} = -j\rho\omega v_r(a) = \frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=a} = p_+ \left[\frac{1}{a^2} + j\frac{k}{a}\right] e^{-jka}$$

Il en résulte l'inconnue p_+ (en considérant $v_r(a) = \frac{q}{4\pi a^2}$) :

$$p_+ = \rho\omega \frac{q}{4\pi} \frac{e^{+jka}}{ka - j}$$

et par conséquent la solution particulière $p(r)$ (ainsi que $v(r)$) :

$$p(r) = \rho ckq \frac{e^{-jk(r-a)}}{4\pi r(ka-j)}$$
$$v(r) = \left[k - \frac{j}{r}\right] q \frac{e^{-jk(r-a)}}{4\pi r(ka-j)}$$

La sphère en mouvement vibratoire de débit volumique q crée la pression acoustique $p(r)$ qui, à son voisinnage, va agir comme une force externe, l'empêchant de vibrer (principe de l'action et de la réaction). Ce phénomène est similaire à l'introduction d'une charge électrique sur un générateur (de tension ou de courant).

Impédance de rayonnement (1)

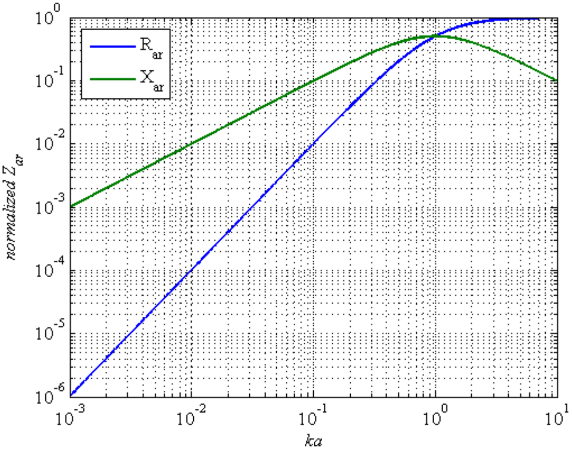
On introduit la notion d'impédance de rayonnement, caractérisant la résistance du milieu à sa mise en vibration :

$$Z_{ar} = \frac{p(a)}{q} = \frac{Z_c k}{4\pi a(ka-j)} = \frac{Z_c}{4\pi a^2}\frac{(ka)^2+j(ka)}{(ka)^2+1}$$

$$\Re(Z_{ar}) = R_{ar} = \frac{Z_c}{4\pi a^2}\frac{(ka)^2}{(ka)^2+1}$$

et

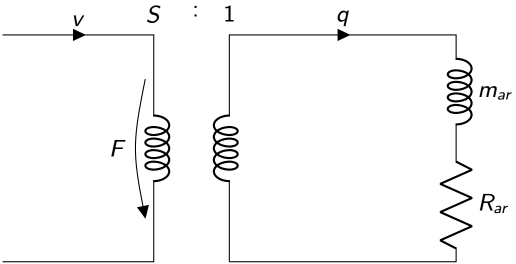
$$\Im(Z_{ar}) = X_{ar} = \frac{Z_c}{4\pi a^2}\frac{(ka)}{(ka)^2+1}$$



Impédance de rayonnement (2)

On remarque que pour $ka << 1$ (basses fréquences)

$R_{ar} \approx \frac{Z_c}{4\pi a^2}(ka)^2$
et
$X_{ar} \approx \omega \frac{\rho a}{4\pi a^2} = \omega m_{ar}$



Le milieu oppose donc une (faible) résistance de rayonnement (qui croît avec la fréquence au carré) et une masse acoustique de rayonnement m_{ar}.
Ce résultat est important : aux basses fréquences, une petite source pulsante en champ libre (par exemple la membrane d'un haut-parleur sur une enceinte close) se voit opposer une masse de rayonnement (masse d'air mise en mouvement par la source pulsante), ainsi qu'une résistance de rayonnement (on peut montrer que la résistance est responsable de la puissance acoustique rayonnée).

Monopole

Un monopole est une source pulsante ponctuelle. On peut dériver le champ acoustique rayonnée par un monopole en champ libre à partir de celui de la sphère pulsante, pour $a \to 0$.
On trouve :

$$p_m(r) = j\rho ckq \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

Note : si le monopole se situe sur un plan réfléchissant et rayonne seulement dans un $1/2$ espace (que l'on appelle un semi-monopole), le champ acoustique devient :

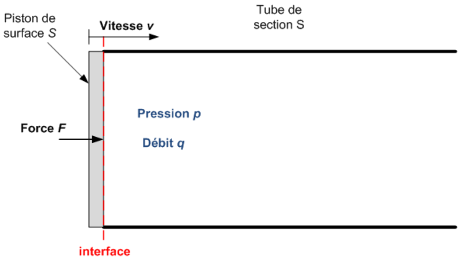
$$p_{sm}(r) = j\rho ckq \frac{e^{-jkr}}{2\pi r}$$

Couplage entre un piston sans changement de section

L'objectif de cette section est de présenter les phénomènes existant dans le cas d'un couplage entre un piston et un tube de sections identiques.
Nous présentons les grandeurs physiques mises en jeu, les équations de couplage ainsi que le schéma électrique équivalent au système piston - tube .

Grandeurs physiques mises en jeu

Considérons le couplage entre un solide plan indéformable (piston rigide) de surface S et un fluide contenu dans un cylindre de section S. La vitesse du fluide au voisinage de l'interface est identique sur toute la section du tube.



Changement de grandeurs

- Les grandeurs mécaniques sont la force F normale à l'interface et la vitesse v de l'interface.
- Les grandeurs acoustiques sont la pression p dans le fluide et le débit volumique q généré par le déplacement de la surface.

Relations de couplage

Les équations de couplage s'écrivent

$$F = p\, S$$
$$q = Sv$$

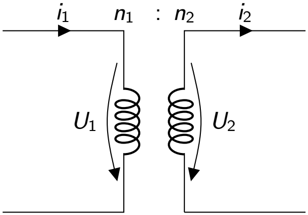
Puissance au travers de l'interface

- La puissance mécanique instantanée est $P_m(t) = F(t)v(t)$
- La puissance acoustique instantanée $P_a(t) = p(t)q(t)$
- Elles sont égales $P_a(t) = p(t)q(t) = \dfrac{F(t)}{S} Sv(t) = F(t)v(t) = P_m(t)$

Les relations de couplage assurent que l'interface mécano acoustique est conservative

Système électrique équivalent

Les équations de continuité peuvent être représentées, d'un point de vue électrique, à l'aide d'un transformateur idéal.



Les équations de comportement du transformateur idéal sont

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$
$$\frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2}$$

où n_1 et n_2 représentent le nombre d'enroulements des circuits primaire (1) et secondaires (2).

Schéma équivalent de l'interface

Considérant l'analogie

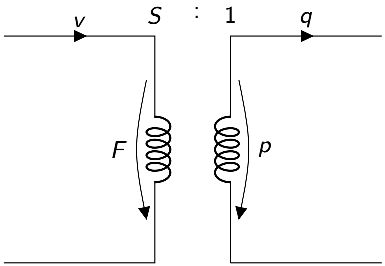
- $F \Longleftrightarrow U_1$, $v \Longleftrightarrow i_1$,
- $p \Longleftrightarrow U_2$ et $q \Longleftrightarrow i_2$,

Schéma équivalent de l'interface

Considérant l'analogie

- $F \Longleftrightarrow U_1$, $v \Longleftrightarrow i_1$,
- $p \Longleftrightarrow U_2$ et $q \Longleftrightarrow i_2$,

il vient $n_1 = S$ et $n_2 = 1$. Le schéma équivalent de l'interface mécano acoustique est donc



Les équations de comportement du couplage mécano-acoustique à section constante sont effectivement :

$$Sv = q$$
$$F = Sp$$

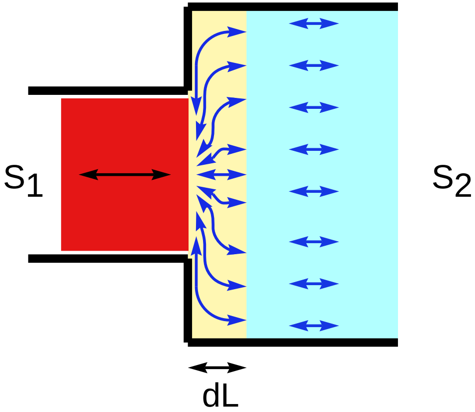
Changement de section dans un guide

L'objectif de cette partie est de présenter les phénomènes existant dans le cas d'une discontinuité entre un piston oscillant et un tube de sections différentes.

Nous présentons ici la notion de masse acoustique équivalente à la discontinuité et présentons le schéma électrique équivalent au piston rayonnant.

Discontinuité transversale

Considérons le couplage entre un solide plan indéformable de surface S_1 et un fluide contenu dans un cylindre de section $S_2 > S_1$. Dans ce cas, l'interface sépare des zones où le guidage des parois est différent



Evolution du champ acoustique

La vitesse dans le fluide à la discontinuité montre un comportement complexe. Il y a modification du champ acoustique par rapport au cas où il n'y a pas de discontinuité. Cette modification se traduit par les propriétés suivantes :

- Loin de l'interface, la propagation est guidée normalement
- Au voisinage de l'interface, la vitesse a une composante radiale
- La vitesse particulaire acoustique normale n'est pas constante sur l'interface (elle dépend de la coordonnée radiale)
- La pression acoustique n'est pas constante sur l'interface (elle dépend de la coordonnée radiale)

Il existe ainsi une zone de transition au voisinage de l'interface, comme dans le cas du changement de section d'un guide entre deux domaines fluides (voir cours 2.3).

Equations de continuités à l'interface

Dans le cas d'une discontinuité de section, les équations de couplage font intervenir les variables traduisant les effets locaux.

Ces variables locales sont reliées aux variables globales mécaniques F, v et acoustiques p, q par des sommes (intégrales) sur l'ensemble de la surface de l'interface.

Les grandeurs globales sont donc définies en moyenne sur l'interface. Ces grandeurs sont la force F appliquée par l'air sur le piston, la vitesse v, la pression acoustique p et le débit acoustique q.

Le détail de ces relations est présenté à l'annexe 1. Aller à l'annexe 1

Conséquences de la discontinuité

La discontinuité entre le piston et le tube de section plus importante se traduit par :

Une masse additionnelle

- La vitesse radiale conduit à une accélération sans compression
- Ceci augmente notablement la densité locale d'énergie cinétique
- La réaction sur le piston est une force d'inertie (masse équivalente)

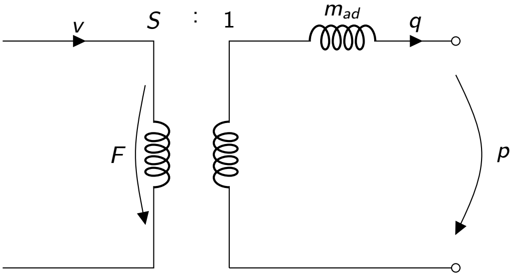
Un couplage moins efficace

- La vitesse radiale ne contribue pas au débit global
- La vitesse axiale est moindre que sans discontinuité
- La force exercée par le piston n'est pas transmise à l'identique (déperdition de pression à l'interface)

Ceci équivaut à une petite masse intercalée entre le piston et le guide

Schéma équivalent à la discontinuité

Le couplage entre un solide de surface S_1 et un guide de surface S_2 peut donc se traduire par le schéma équivalent présenté ci dessous montrant une masse de discontinuité m_{ad}.



La pression p indiquée sur le schéma est la pression qui existe après la zone de transition ($x > dL$). Cette pression est différente de celle qui existerait sans changement de section.

Rayonnement en demi-espace

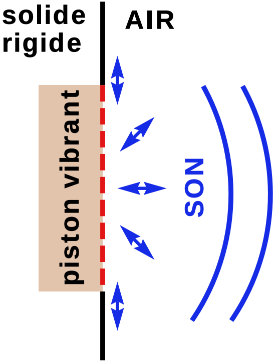
L'objectif de cette section est de présenter les phénomènes existant pour un piston rayonnant en demi espace infini, cas très courant en électroacoustique.

Nous donnons ici la notion d'impédance de rayonnement et présentons le schéma électrique équivalent au piston rayonnant.

Piston encastré dans un écran

Considérons le couplage entre un solide plan indéformable de surface S et un fluide contenu dans un espace délimité par un écran infini, appelé espace semi-infini. Dans ce cas, le phénomène de discontinuité est très marqué et se traduit par :

- une propagation acoustique "en 3D"
- un guidage par l'écran (demi-espace)
- une masse de discontinuité significative



Expression de l'impédance de rayonnement

Le couplage entre le piston et l'air présent dans le demi-espace se traduit par

- une impédance équivalente à la réaction du champ acoustique 3D
- Dans le cas d'un piston circulaire de rayon $a = \sqrt{S/\pi}$, l'expression analytique de l'impédance de rayonnement est

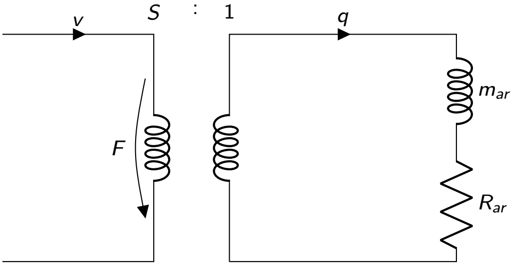
$$\frac{p}{q} = R_{ar} + j\omega m_{ar}, \tag{1}$$

où p est la pression acoustique moyenne à la surface du piston et q le débit acoustique (cf. annexe 1). $m_{ar} = \rho \frac{8}{3\pi} \frac{a}{S}$ est la masse de rayonnement et $R_{ar} = \frac{\rho c}{S} \frac{1}{2}(ka)^2$.

La résistance de rayonnement représente ici l'énergie qui est transmise du solide oscillant à l'air et permet le calcul de la puissance acoustique transmise à l'air. Si cette résistance était nulle, aucun son ne serait entendu dans le demi-espace.
Un calcul approché de cette résistance utilisant un modèle de propagation par décroissance géométrique est proposé à l'annexe 2.

Schéma électrique équivalent aux effets de rayonnement

Le schéma électrique équivalent au rayonnement du piston en écran infini est présenté ci-dessous.



L'air compris dans le demi-espace crée donc

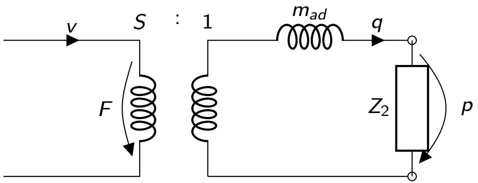
- un amortissement (résistance de rayonnement) traduisant la perte d'énergie mécanique en énergie acoustique audible
- une masse ajoutée (masse de rayonnement) traduisant de façon équivalente le faite qu'une tranche d'air de masse $M_{mr} = S^2 m_{ar}$ (en kg) se déplace "en suivant" le piston oscillant.

Synthèse

L'objectif de cette section est de résumer les phénomènes considérés dans ce cours.

Schéma général d'un couplage

Le couplage entre un solide de surface S_1 et un guide de surface S_2 peut se traduire par le schéma équivalent présenté ci dessous montrant une masse de discontinuité m_{ad}.



Dans ce schéma, le milieu acoustique est symbolisé par l'impédance Z_2. Cette impédance peut représenter un guide cylindrique ou un demi-espace (assimilable à un guide cônique infini d'angle 180°).

La pression p indiquée sur le schéma est la pression qui existe après une éventuelle zone de transition. Cette transition est instantanée si la section du guide est la même que celle du solide vibrant (alors $m_{ad} = 0$) ; elle correspond à une courte distance dL dans le cas d'un changement de section, ou à une distance très importante dans le cas du rayonnement.

Couplage sans changement de section

Dans le cas d'un couplage entre un piston oscillant et un tube de sections identiques :

- Il y a égalité de la puissance mécanique et de la puissance acoustique (conservation des puissances)
- les relations entre grandeurs mécaniques et acoustiques s'écrivent $p = \frac{F}{S}$ et $q = Sv$.
- le schéma électrique équivalent au couplage est un simple transformateur

Couplage avec changement de section

Dans le cas d'un couplage entre un piston oscillant et un tube de sections différentes :

- Une puissance réactive est localisée au niveau de la transition ; le reste est transmis au guide
- La discontinuité génère une accélération du fluide créant ainsi une masse de discontinuité.
- le schéma électrique équivalent au couplage est un transformateur connecté à une inductance en série.

Rayonnement en demi-espace infini

Dans le cas d'un couplage entre un piston oscillant et un demi-espace infini

- Une puissance réactive est localisée au niveau de la transition ; le reste est rayonné.
- La discontinuité génère une accélération du fluide créant ainsi une masse de discontinuité. En outre la propagation du son en espace infini crée une résistance de rayonnement traduisant la dissipation de l'énergie mécanique en énergie sonore audible.
- le schéma électrique équivalent au couplage est un transformateur connecté à une inductance en série
- la réaction du milieu acoustique est représentée par une résistance pure (rayonnement).

Bibliographie

M. Rossi, Audio, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 2007

Rayonnement de la sphère pulsante : chapitre 1.7

Couplage mécano-acoustique : chapitre 6.4 (§6.4.17 - 6.4.19)

Masse acoustique d'un conduit ouvert : chapitre 6.3 (§6.3.18 - 6.3.20)

Rayonnement du piston encastré : chapitre 5.5 (§5.5.1 - 5.5.9)

Annexe 1

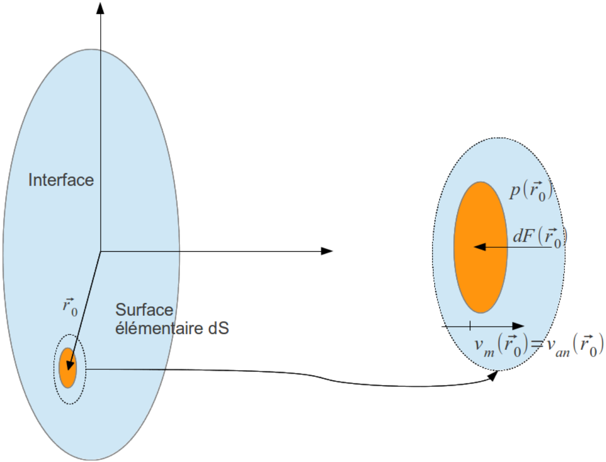
Cette annexe détaille le passage des variables locales aux variables globales sur une section S

▸ Retour à l'étude de la discontinuité

▸ Retour à l'étude du rayonnement

Variables locales

Considérant un petit élément de surface dS à l'interface



Variables locales

Les grandeurs physiques mises en jeu au niveau de cet élément sont

- Pour la partie mécanique
  - la vitesse $\vec{v_m}(\vec{r_0})$ au point $\vec{r_0}$
  - la force $d\vec{F}(\vec{r_0})$ au point $\vec{r_0}$ normale à la surface due à la pression appliquée par l'air ambiant [1].
- Pour la partie acoustique
  - la vitesse normale à la surface $\vec{v_{an}}(\vec{r_0})$ au point $\vec{r_0}$.
  - le débit volumique de l'air dû au mouvement de l'élément $dq = \int\int_S v_{an}(\vec{r_0})dS$ au point $\vec{r_0}$.
  - la pression $p(\vec{r_0})$ au point $\vec{r_0}$.

Les grandeurs $\vec{v_m}(\vec{r_0})$, $\vec{v_{an}}(\vec{r_0})$, $d\vec{F}(\vec{r_0})$, $p(\vec{r_0})$ et $dq(\vec{r_0})$ sont dites locales puisqu'elles concernent la surface élémentaire dS.
Ces grandeurs peuvent prendre a priori des valeurs différentes pour différentes positions $\vec{r_0}$ à l'interface.

1. Il s'agit ici d'une convention. Il aurait aussi été possible de considérer la force appliquée par l'élément sur l'air

Variables globales

De façon à considérer les effets d'interaction sur l'ensemble de la surface S de l'interface, on prend en compte la somme ou la moyenne des variables locales. Ainsi on définit :

- Pour la partie mécanique
  - La vitesse moyenne de la structure $V_m = \frac{1}{S} \iint_S v_m(\vec{r_0}) dS$
  - La force totale appliquée par l'air sur la structure $\vec{F_t} = \iint_S p(\vec{r_0}) dS = \iint_S d\vec{F}(\vec{r_0})$ (somme des forces élémentaires).
- Pour la partie acoustique
  - Le débit généré par la structure $Q_t = \iint_S v_a(\vec{r_0}) dS$ (somme des débits élémentaires).
  - La pression moyenne de l'air $P_m = \frac{1}{S} \iint_S p(\vec{r_0}) dS$.

Variables globales

Les variables traduisant le comportement global de l'interface sont ainsi

- pour la partie mécanique : F_t, V_m, notées par la suite F, V.
- pour la partie acoustique : P_m et Q_t, notées par la suite P et Q.

Remarque : on considère parfois comme vitesse du système mécanique la vitesse V_0 au centre l'interface (membrane) et non comme la vitesse moyenne V_m. Dans ce cas, on parle de surface efficace ou effective pour décrire l'interface. La surface effective est définie par $Q_t = S_{eff} V_0$ soit $S_{eff} = S \frac{V_m}{V_0}$.

Fin de l'annexe

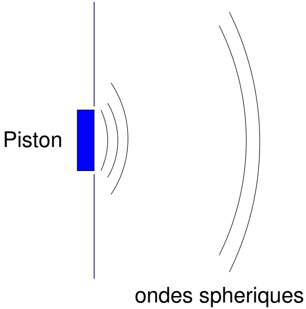
Annexe 2

Cette annexe présente le calcul du rayonnement en champ lointain d'un piston vibrant

▸ Retour a l'étude du rayonnement

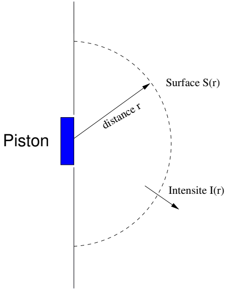
Hypothèses

Nous considérons ici un piston placé dans un écran infini et rayonnant dans un demi espace infini. Le diamètre du piston est petit devant la longueur d'onde ce qui autorise à supposer un rayonnement omnidirectionnel (indépendant de l'angle d'observation). A une distance grande par rapport à la longueur d'onde et à la taille du piston, l'onde rayonnée peut être considérée comme sphérique.



Puissance acoustique et décroissance géométrique

Dans un demi-espace, la surface du front d'onde augmente avec la distance r et vaut $S(r) = 2\pi r^2$.



En champ lointain ($r \to \infty$) la courbure du front d'onde est négligeable : ceui-ci devient localement assimilable à une onde plane, et donc $p(r) \to \rho_0 c_0 v(r)$. La vitesse étant normale au front d'onde, l'intensité tend ainsi vers une valeur limite $I(r) \to \frac{|p(r)|^2}{\rho_0 c_0}$. La puissance acoustique à une distance r du piston s'écrit alors :

$$P_a(r) = S(r)I(r) = 2\pi r^2 \frac{|p(r)|^2}{\rho_0 c_0} \tag{2}$$

Rayonnement d'un monopôle

Selon les hypothèses précédentes, le piston est équivalent à un monopôle rayonnant dans un demi espace infini, et l'amplitude de la pression acoustique à grande distance r peut s'écrire en fonction de son débit q_s

$$|p(r)| = k\rho_0 c_0 \frac{q_s}{2\pi r} \tag{3}$$

L'introduction de l'équation 3 dans 2 conduit ainsi à l'expression de la puissance acoustique à la distance r

$$P_a(r) = \frac{\rho_0 c_0}{2\pi} k^2 q_s^2 \tag{4}$$

La puissance acoustique est constante dès lors que la distance r considérée est suffisament grande. Cette valeur limite est la puissance rayonnée, supposée absorbée par le milieu (condition de Sommerfeld).

Puissance acoustique et impédance de rayonnement

Considérant un piston de section S_p petit devant la longueur d'onde et placé dans un écran infini, la puissance acoustique qu'il rayonne s'écrit :

$$P_p = \iint_{S_p} p(\vec{r_0}).\vec{v_p}^*(\vec{r_0}).\vec{dS}, \tag{5}$$

où $p(\vec{r_0})$ et $\vec{v_p}(\vec{r_0})$ sont la pression et la vitesse en un point $\vec{r_0}$ du piston.
Dans l'hypothèse où la vitesse $\vec{v_p}(\vec{r_0})$ est uniforme et normale au piston, il vient

$$P_p = \iint_{S_p} p(\vec{r_0}).v_p^* dS = v_p^*. \iint_{S_p} p(\vec{r_0}).dS = p.v_p.S_p = p.q_p \tag{6}$$

Ce calcul fait apparaître la pression moyenne p sur la surface S_p, grandeur globale qui découle ici de l'expression de la puissance. Elle est reliée au débit $q_p = v_p.S_p$ par une impédance qui traduit la réaction du millieu extérieur sur le piston : $p = Z_{ar} q_p$. Cette impédance Z_{ar} est donc l'impédance acoustique de rayonnement.

Conservation de la puissance acoustique

La pression sur le disque reflète deux phénomènes : le rayonnement en champ lointain d'une part, et l'inertie excédentaire liée à la réorganisation de la vitesse acoustique pour passer d'une répartition uniforme sur le piston à une répartition sphérique à grande distance (champ proche, assimilable à une masse). La puissance rayonnée par le piston P_r correspond ainsi à la partie réelle la puissance calculée à la surface du piston, liée à la partie réelle de l'impédance acoustique de rayonnement Z_{ar} :

$$P_r = Re(P_p) = Re(Z_{ar})q_p^2 \tag{7}$$

L'égalité de la puissance acoustique P_r rayonnée par la surface du piston et de la puissance acoustique $P_a(r)$ calculée en champ lointain d'une source monopolaire quelconque conduit à

$$Re(Z_{ar})q_p^2 = \frac{\rho_0 c_0}{2\pi} k^2 q_p^2. \tag{8}$$

Ceci permet d'en déduire la partie réelle de l'impédance de rayonnement Z_{ar}

$$Re(Z_{ar}) = \frac{\rho_0 c_0}{2\pi} k^2 \tag{9}$$

Rayonnement en espace infini

Le facteur 2π au dénominateur de l'expression de Z_{ar} correspond à l'angle solide de rayonnement, c'est à dire à l'angle solide sur lequel est intégrée l'intensité acoustique pour le calcul de la pussance en champ lointain. Dans le cas d'une source encastrée dans un écran infini, cet angle solide est limité à la moitié d'une sphère, soit 2π.

Si le piston rayonnait dans un espace infini (angle solide de 4π au lieu de 2π), la partie réelle de l'impédance de rayonnement s'écrirait :

$$Re(Z_{ar})|_{\infty} = \frac{\rho_0 c_0}{4\pi} k^2 \tag{10}$$

Cette dépendance exprime que la réaction du milieu au rayonnement acoustique augmente lorsque l'angle solide où est "concentrée" la puissance diminue. Ainsi la directivité d'une source contribue à augmenter la puissance qu'elle rayonne, en plus de concentrer celle-ci dans une plus petite partie de l'espace.

Cas d'un piston circulaire

L'expression de $Re(Z_{ar})$ est valide pour toute petite source encastrée. Il est intéressant de l'analyser dans le cas d'un piston circulaire de rayon a (d'où $S_p = \pi a^2$), en revenant au rapport p/v exprimé en moyenne sur la surface :

$$< Re(p/v) >= \rho_0 c_0 \frac{(ka)^2}{2} \tag{11}$$

Le terme $\rho_0 c_0$ correspond à une onde plane, et serait la valeur de $Re(p/v)$ dans le cas d'un guide d'onde de longueur infinie. Le facteur $(ka)^2/2$ exprime la variation avec la fréquence de la puissance rayonnée, il est appelé efficacité de rayonnement du piston, très faible tant que celui-ci est petit par rapport à la longueur d'onde ($ka \ll 1$).

Un calcul analogue (mais plus complexe) aux hautes fréquences donnerait comme limite $< Re(p/v) >= \rho_0 c_0$ (onde plane).

Ces deux tendances asymptotiques sont très générales.

Fin de l'annexe