2.3 Systèmes acoustiques
Partie 1: équations de l'acoustique

H. Lissek

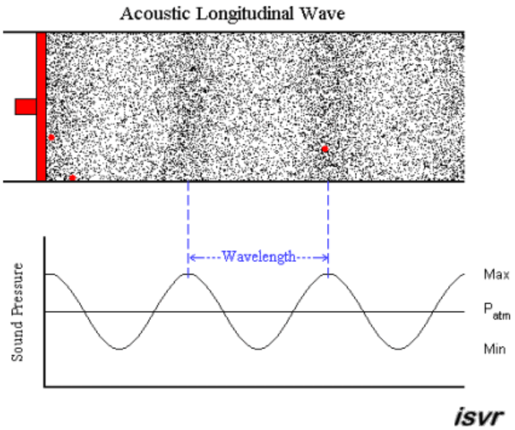
Laboratory of Wave Engineering LWE

2 octobre 2025

Objectifs

- Présenter les phénomènes de propagation acoustique dans un milieu 1D
- Définir les grandeurs acoustique et expliquer la linérisation des comportements dans l'approximation acoustique
- Donner l'équation de propagation des ondes 1D, ainsi que ses solutions
- Illustrer ces phénomènes par des schémas analogues, en lien avec l'approximation en constants localisées

LE SON : LA MISE EN MOUVEMENT D'UN FLUIDE



LE SON : LA MISE EN MOUVEMENT D'UN FLUIDE

- Le son correspond à la mise en oscillation des particules du fluide dans lequel se propage l'onde sonore.
- Le mouvement des particules du milieu matériel (qui peut être caractérisé par la vitesse des particules, ou vitesse particulaire) sous l'effet d'une onde de pression est oscillatoire.
  Note: Il est impératif d'avoir un milieu matériel pour que l'onde se propage.
- En revanche, il n'y a pas de transport de matière (la vibration de chaque particule reste locale).
- Les particules oscillent autour d'une position d'équilibre.
- Il y a transport d'énergie, de manière non instantanée (à une certaine vitesse de propagation).
- Cette vitesse dépend du milieu de propagation.

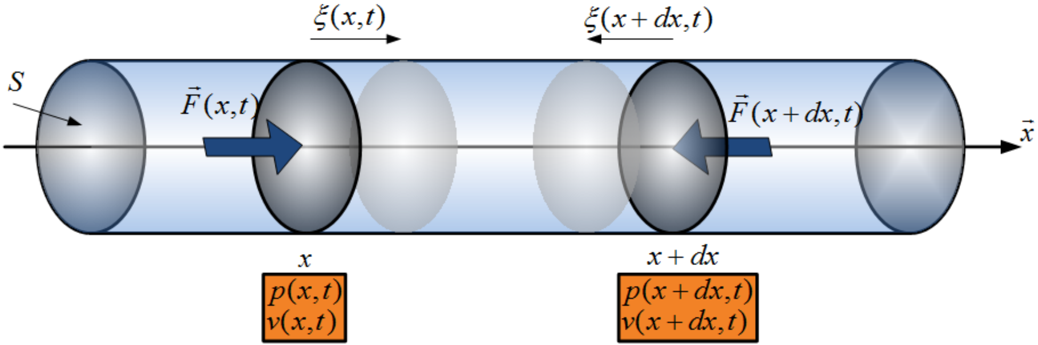
HYPOTHÈSES SUR LE MILIEU FLUIDE

Propriétés mécaniques:

- Les fluides, par opposition aux solides, sont des matières (milieux) aisément déformables: on considèrera par la suite que le fluide est compressible, et que les molécules de fluide sont peu liées entre elles (dans le cas des gaz parfaits, on considère même qu'il n'y aucune interaction mutuelle entre les molécules de fluide).
- On considèrera aussi que le fluide est homogène (pas de variations des propriétés physiques dans l'espace en l'absence de perturbation acoustique), continu, et isotrope (pas de direction privilégiée) et illimité (pas de réflexions).
- On supposera que le fluide n'est pas soumis à des contraintes extérieures (la gravité sera négligée devant les effets des forces de pression).
- Les seules forces mises en jeu sont donc les forces de pression dans le fluide.
- Pour finir, on supposera qu'il n'y a pas de phénomène de dissipation.

PRÉSENTATION DU PROBLÈME PHYSIQUE

On considèrera dans ce qui suit un guide d'ondes acoustiques cylindrique d'axe x, de section S et de longueur transverse infinie, soumis à une perturbation acoustique. On s'intéresse à une tranche de fluide d'épaisseur dx



GRANDEURS PHYSIQUES DANS LE FLUIDE

GRANDEURS DIRECTEMENT LIÉES AU MOUVEMENT :

- Déplacement des surfaces de la tranche de fluide $\xi(x,t)$
- Vitesse particulaire $v(x,t) = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$
- Accélération particulaire $a(x,t) = \dfrac{\partial v}{\partial t}$

GRANDEURS LIÉES AUX EFFORTS :

- Pression acoustique $p(x,t)$
- Représente la petite fluctuation de pression autour de la valeur de la pression statique (pression atmosphérique $p_s = P_{atm}$)

PARAMÈTRES INTRINSÈQUES DU FLUIDE :

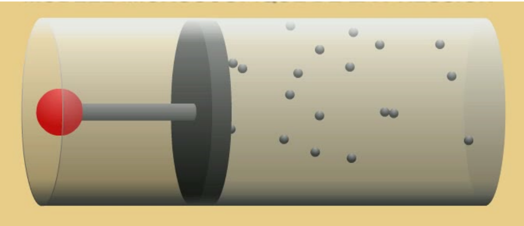
- Masse volumique ρ_0 au repos, qui fluctue localement ($\rho(x,t)$) sous l'effet des oscillations de particules de fluide
- Grandeurs thermodynamiques :
  - pression statique p_s
  - rapport des chaleurs massiques isobares (C_p) et isochores (C_v): $\Gamma = C_p/C_v$ ($\Gamma \approx 1,402$ pour les gaz diatomiques)

$\rightarrow$ compressibilité adiabatique $\chi_s = (\Gamma p_s)^{-1}$, représente la capacité du fluide à se déformer sous l'action d'une force externe, sans échange de chaleur (pas de pertes)

Pression dans un gaz

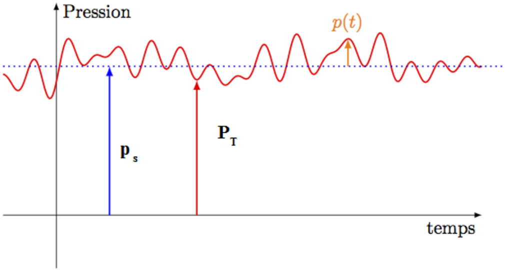
- La force exercée par un fluide non visqueux sur une paroi est perpendiculaire à cette paroi
- La force de pression est proportionnelle à la surface S sur laquelle elle s'exerce
- $\overrightarrow{F} = P_T S \overrightarrow{n}$ où P_T est la pression totale ($P_T = p_s + p$)
- L'unité de la pression est le Pascal (Pa ou N.m^{-2}), qui correspond à une unité d'énergie volumique
- Pour rappel d'ordres de grandeurs, la pression atmosphérique est de 10^5 Pa
- D'un point de vue microscopique la pression corrrespond à une unité d'énergie volumique transférée lors de chocs entre molécules, ou de molécule sur une surface. Ces chocs sont illustrés dans l'animation suivante.

Pression dans un gaz



Ordres de grandeur (1)

En acoustique dite "linéaire", on considère l'hypothèse selon laquelle les fluctuations de pression sont très petites par rapport à la pression atmosphérique. Ce phénomène est illustré par le schéma suivant :



Pour fixer les idées par rapport aux ordres de grandeur rencontrés en acoustique, voici des valeurs qui permettent de fixer un ordre d'idée:

- Équilibre : pression atmosphérique : $p_s = P_{atm} = 10^5$ Pa
- Seuil d'audition : $p_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa
- Niveau de pression acoustique en dB : $L_p = 20 \times log_{10}\left(\frac{p_{eff}}{p_{ref}}\right)$
- Seuil de douleur : $L_{p_{douleur}} = 120dB$

Ordres de grandeur (2)

Ordres de grandeurs de pression

Source acoustique	Pression acoustique	Rapport à P_{atm} (%)	Niveau en dB
Moteur d'avion à 30 m	630 Pa	0.63	150
Coup de feu à 1 m	200 Pa	0.2	140
Seuil de douleur	100 Pa	0.1	134
Blessures auditives à court terme	20 Pa	0.02	120
Blessures auditives à long terme	$6 \cdot 10^{-1}$ Pa	$6 \cdot 10^{-4}$	90
Télévision à 1 m	$2 \cdot 10^{-2}$ Pa	$2 \cdot 10^{-5}$	60
Dialogue normal à 1 m	$[2 \cdot 10^{-3}; 2 \cdot 10^{-2}]$ Pa	$[2 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-5}]$	$[40 - 60]$
Respiration calme	$6 \cdot 10^{-5}$ Pa	$6 \cdot 10^{-8}$	10
Seuil de l'audition (à 1 kHz)	$2 \cdot 10^{-5}$ Pa	$2 \cdot 10^{-8}$	0

Masse volumique d'un fluide

- La densité est souvent également appelée masse volumique
- Elle correspond à une masse par unité de volume
- L'unité dans le système international est le kg.m^{-3}
- Notation : ρ

Hypothèse linéaire des petites fluctuations

En acoustique, la pression, la vitesse de déplacement des particules (vitesse particulaire), et la masse volumique fluctuent sous l'effet du passage de l'onde acoustique.
En utilisant les notations définies plus haut et les hypothèse données en début de cette partie, on obtient :

$$\begin{cases} P_T = p_s + p(x,t) \\ \rho_T = \rho_0 + \rho(x,t) \\ v_T = 0 + v(x,t) \\ p(x,t) \ll P_0 \\ \rho \ll \rho_0 \\ p_s = cste \\ \rho_0 = cste \end{cases} \tag{1}$$

Fluide au repos : p_s, ρ_0
Perturbations acoustiques : $p(x,t)$, $\rho(x,t)$, et $v(x,t)$

Hypothèse linéaire des petites fluctuations

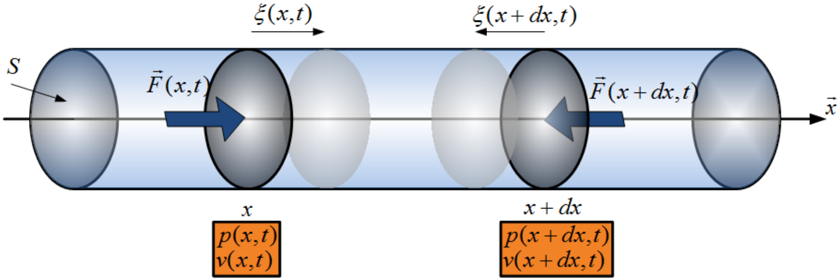
En acoustique, la pression, la vitesse de déplacement des particules (vitesse particulaire), et la masse volumique fluctuent sous l'effet du passage de l'onde acoustique.
En utilisant les notations définies plus haut et les hypothèse données en début de cette partie, on obtient :

$$\begin{cases} P_T = p_s + p(x,t) \\ \rho_T = \rho_0 + \rho(x,t) \\ v_T = 0 + v(x,t) \\ p(x,t) \ll P_0 \\ \rho \ll \rho_0 \\ p_s = cste \\ \rho_0 = cste \end{cases} \tag{1}$$

Fluide au repos : p_s,ρ_0
Perturbations acoustiques : $p(x,t)$, $\rho(x,t)$, et $v(x,t)$

Propagation acoustique unidimensionnelle

- Dans tout ce qui suit, on va considérer une propagation unidimensionnelle
- Le milieu considéré possède une direction privilégiée, ce qui permet de considérer les propriétés d'un guide d'onde 1D (infini pour l'instant)
- La particule de fluide est l'élément qui va être étudié (correspond à une tranche élémentaire de fluide entre x et $x + dx$, voir schéma)
- La tranche de fluide est déformable (compressibilité) et peut se déplacer "en bloc" (inertie), mais les limites aux extrémités de la tranche de fluide ne seront pas déformées.



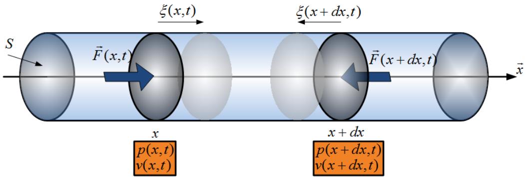
Phénomènes physiques: mise en équation

Mettre en équation un phénomène physique, c'est avant tout comprendre et traduire des phénomènes physiques. Ici, les phénomènes physiques mis en jeu concernent le déplacement des particules (composantes inertielles), et leur déformation (composantes liées aux effets de la compressibilité du fluide).

- La loi fondamentale de la dynamique traduit le mouvement des particules de fluide sous l'effet des forces de pression (pas de compressibilité, pas de dissipation, effets inertiels, linéarisation des équations de la mécanique des fluides)
  On utilise également le principe de conservation de masse (pas de perte ni de création de matière au passage d'une onde acoustique)
- Pour finir, la déformation de la particule de fluide est traduite par l'équation d'état du fluide, qui provient essentiellement d'une description thermodynamique du fluide considéré (pas de dissipation, pas de transferts de chaleur, et effet de compressibilité)

Deux effets majoritaires se déroulent lors d'une perturbation de pression : effet d'inertie et effet de compressibilité

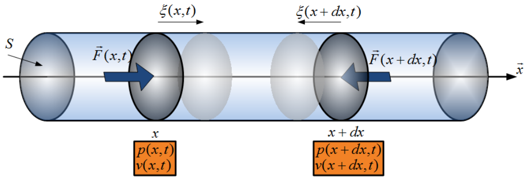
Mise en équations: effets d'inertie



- Pour comprendre les effets d'inertie sans déformation, il faut imaginer que notre tranche de fluide n'est pas compressible. La tranche de fluide d'épaisseur dx est considérée comme une masse indéformable $m_0 = \rho_0 S dx$
- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à cette tranche de fluide, on obtient: $m_0 a(x,t) = \sum F = F(x,t) - F(x+dx,t)$
- Derrière cette équation, on considère que la tranche de fluide ne se déforme pas et se déplace sous l'effet d'un gradient de forces de pression
- Le bilan des forces de pression correspondant à $S(-p(x+dx,t) + p(x,t)) = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx$
- Au final la loi traduisant les effets d'inertie, appelée loi d'Euler linéarisée s'écrit :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

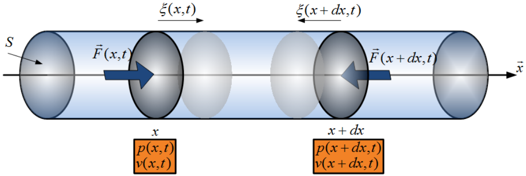
Mise en équations: effets de compressibilité



- Pour comprendre les effets de compressibilité sans changement de masse, il faut imaginer que notre tranche de fluide peut cette fois-ci se déformer.
- On se ramène à un objet déformable sous l'effet de la pression moyenne exercée sur la tranche :
- $\frac{\delta V(x,t)}{V_0} = -\chi_s p(x,t)$, où $\chi_s = (\Gamma p_s)^{-1}$ est la compressibilité adiabatique
- Remarque sur le signe $-$ dans l'équation : le volume diminue s'il y a une surpression, et augmente s'il y a une dépression
- La variation de volume étant liée à la variation des déplacement des deux faces de la tranche de fluide, on peut ramener cette équation (en la dérivant temporellement) à l'équation suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

Équation d'onde (1D)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & \text{Inertie} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t} & \text{Compressibilite} \end{cases}$$

Ce système d'équations locales permet d'écrire l'équation d'onde:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

- Le terme $\rho_0 \chi_s$ est un paramètre provenant des caractéristiques du fluide uniquement
- On pose $c = \sqrt{\dfrac{1}{\rho_0 \chi_s}}$ en $m.s^{-1}$: c'est la célérité de l'onde!

Célérité acoustique

célérité acoustique $\Leftrightarrow$ vitesse de propagation de la perturbation acoustique

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ dépend des caractéristiques physiques du milieu de propagation

Remarque importante:
c, constante pour un milieu homogène donné, ne doit pas être confondue avec la vitesse particulaire!

Exercice: calculer la valeur de c pour l'eau et pour l'air :
Données :

- $\chi_{S,eau} \approx 4.76.10^{-10}$ Pa^{-1}
- $\rho_{eau} = 1000$ kg.m^{-3}
- $\chi_{S,air} \approx 6.57 \cdot 10^{-6}$ Pa^{-1} à 20 C
- $\rho_{air} = 1.29$ kg.m^{-3} à 20 C

En effet,

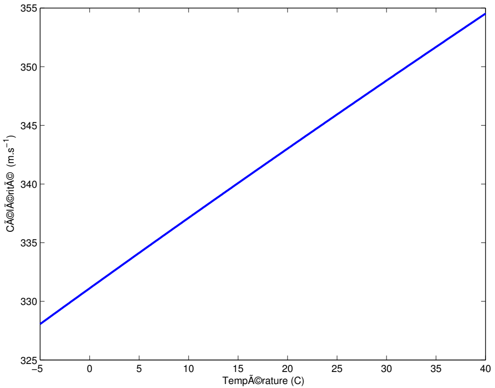
- l'eau est beaucoup moins compressible que l'air
- mais l'eau est beaucoup plus dense que l'air.
- Lequel de ces effets l'emporte-t-il ?

Célérité acoustique et température

- L'air peut être considéré comme un gaz parfait diatomique
- Pour un gaz parfait, $c = \sqrt{\dfrac{\Gamma p_s}{\rho_0}}$
- Or, la loi des gazs parfaits fournit : $p_s V_T = nR\theta \Leftrightarrow \dfrac{p_s}{\rho_0} = \dfrac{R\theta}{M}$
- avec R : constante des gazs parfaits ($R = 8,314472$ J.mol^{-1}.K^{-1})
- et M : masse molaire de l'air, ($M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg.mol^{-1})
- On peut alors en déduire la dépendance de la célérité avec la température :
- $c = \sqrt{\dfrac{\Gamma R}{M}\theta}$
- En traçant et en calculant les valeurs de la célérité avec des températures raisonnables pour des applications acoustiques sous nos latitudes, on trouve le tableau de la courbe données dans ce qui suit :

Célérité acoustique (pour en savoir plus)

Température (C)	Célérité (m.s^{-1})
-5	328.5
0	331.5
5	334.5
10	337.5
15	340.5
20	343.4
25	346.3
30	349.2



L'oeil avisé remarquera que la courbe ne ressemble pas franchement à une loi en racine, c'est tout simplement dû au fait que la température est en Kelvin, ce qui décale le zéro de 273,15 degrés, et la portion tracée à nos températures usuelles ne correspond donc qu'à une toute petite zone de la courbe, qui apparaît comme "linéarisée" par ce décalage de température.

Solutions de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions sinusoïdales de cette équation sont des solutions propagatives harmoniques, se propageant

- soit vers les x croissants,
- soit vers les x décroissants

à la vitesse c, et correspondent mathématiquement à
$p_+(x,t) = p_{0+} \cdot e^{j(\omega t - kx)}$ (onde progressive vers x croissants)
$p_-(x,t) = p_{0-} \cdot e^{j(\omega t + kx)}$ (onde retrograde vers x décroissants)

Les amplitudes (éventuellement complexes) p_{0+} et p_{0-} dépendent des conditions aux limites du guide d'onde.

Approximation en constantes localisées

- L'approximation en constantes localisées permet d'obtenir une analogie électrique des phénomènes propagatifs de l'acoustique.
- Sans forcément justifier les analogies, on ne peut que constater qu'un circuit électrique peut se comporter comme la tranche de fluide sous l'effet du passage de l'onde.
- En effet, les équations locales de la tranche de fluide peuvent être totalement analogue à celles d'une ligne de transmission électrique, à condition de remplacer les potentiels électriques par la pression, et le courant parcourant le circuit par la vitesse acoustique.

Approximation en constantes localisées

- L'approximation en constantes localisées permet d'obtenir une analogie électrique des phénomènes propagatifs de l'acoustique.
- Sans forcément justifier les analogies, on ne peut que constater qu'un circuit électrique peut se comporter comme la tranche de fluide sous l'effet du passage de l'onde.
- En effet, les équations locales de la tranche de fluide peuvent être totalement analogue à celles d'une ligne de transmission électrique, à condition de remplacer les potentiels électriques par la pression, et le courant parcourant le circuit par la vitesse acoustique.

Electrique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -L' \dfrac{\partial i}{\partial t} & \quad \textit{Mailles} \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} = -C' \dfrac{\partial u}{\partial t} & \quad \textit{Noeuds} \end{cases}$$

où L' est la inductance linéique de la ligne
et C' est la capacité linéique de la ligne.

Approximation en constantes localisées

- L'approximation en constantes localisées permet d'obtenir une analogie électrique des phénomènes propagatifs de l'acoustique.
- Sans forcément justifier les analogies, on ne peut que constater qu'un circuit électrique peut se comporter comme la tranche de fluide sous l'effet du passage de l'onde.
- En effet, les équations locales de la tranche de fluide peuvent être totalement analogue à celles d'une ligne de transmission électrique, à condition de remplacer les potentiels électriques par la pression, et le courant parcourant le circuit par la vitesse acoustique.

Electrique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -L' \dfrac{\partial i}{\partial t} & \textit{Mailles} \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} = -C' \dfrac{\partial u}{\partial t} & \textit{Noeuds} \end{cases}$$

où L' est la inductance linéique de la ligne
et C' est la capacité linéique de la ligne.

Acoustique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} & \textit{Inertie} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t} & \textit{Compressibilite} \end{cases}$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide
et χ_s est la compressibilité du fluide.

Représentation par des schémas (direct) (1)

En introduisant le débit volumique $q(x,t) = Sv(x,t)$ (Rappel: $\mathcal{P}_a = p.q$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\rho_0}{S}\dfrac{\partial q}{\partial t} & \texttt{Mailles} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} = -S\chi_s\dfrac{\partial p}{\partial t} & \texttt{Noeuds} \end{cases}$$

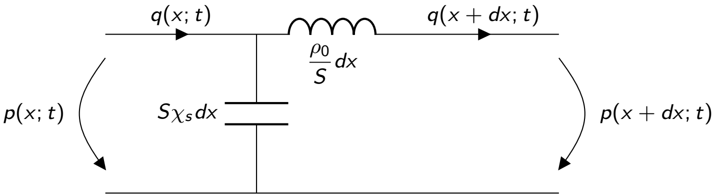
Comment représenter ces équations par un schéma "électrique"?

Représentation par des schémas (direct) (1)

En introduisant le débit volumique $q(x,t) = Sv(x,t)$ (Rappel: $\mathcal{P}_a = p.q$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\rho_0}{S}\dfrac{\partial q}{\partial t} & \texttt{Mailles} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} = -S\chi_s\dfrac{\partial p}{\partial t} & \texttt{Noeuds} \end{cases}$$

Comment représenter ces équations par un schéma "électrique"?



On remarque sur ce schéma que l'inductance est associée à la masse volumique, et que la capacité est liée à la compressibilité adiabatique.
Il existe donc un circuit électrique "analogue" direct, où

- les effets d'inertie sont représentés par une self
- les effets de compressibilité sont représentés par une capacité

Représentation par des schémas (inverse) (2)

En introduisant le débit volumique $q(x,t) = Sv(x,t)$ (Rappel: $\mathcal{P}_a = p.q$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = -S\chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t} & \texttt{Mailles} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\rho_0}{S} \dfrac{\partial q}{\partial t} & \texttt{Noeuds} \end{cases}$$

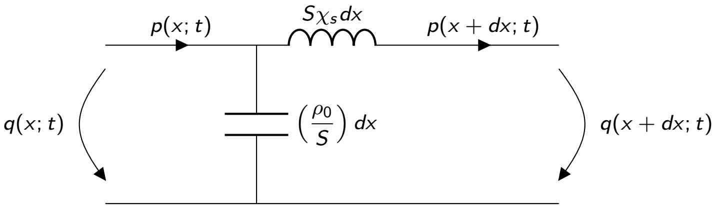
Comment représenter ces équations par un schéma "électrique"?

Représentation par des schémas (inverse) (2)

En introduisant le débit volumique $q(x,t) = Sv(x,t)$ (Rappel: $\mathcal{P}_a = p.q$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = -S\chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t} & \texttt{Mailles} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\rho_0}{S}\dfrac{\partial q}{\partial t} & \texttt{Noeuds} \end{cases}$$

Comment représenter ces équations par un schéma "électrique"?



On remarque sur ce schéma que l'inductance est associée à la compressibilité, et que la capacité est liée à la masse volumique.

Il existe donc un circuit électrique "analogue" inverse, où

- les effets d'inertie sont représentés par une capacité
- les effets de compressibilité sont représentés par une self

Synthèse des acquis

- Une tranche de fluide petite devant la longueur d'onde et soumise à une onde acoustique peut être représentée par un système d'équations couplées:
  - une sur les effets d'inertie seuls dus à la masse volumique du milieu,
  - une sur les effets de compressibilité seuls dus à la compressibilité du milieu.
- L'équation d'onde permet de relier les dérivées partielles d'espace et de temps d'une même grandeur acoustique (p ou v, voire $q = Sv$).
- La célérité acoustique ne dépend que des propriétés thermodynamiques du milieu.
- Les 2 équations couplées présentent des analogies avec les équations des télégraphistes (lignes de transmissions électriques).
- Il est possible de représenter une tranche de fluide par un circuit analogue
  - soit en analogie directe ou la pression acoustique p est analogue à la tension électrique u et le débit volumique q est analogue au courant électrique i
  - soit en analogie inverse ou le débit volumique q est analogue à la tension électrique u et la pression acoustique p est analogue au courant électrique i