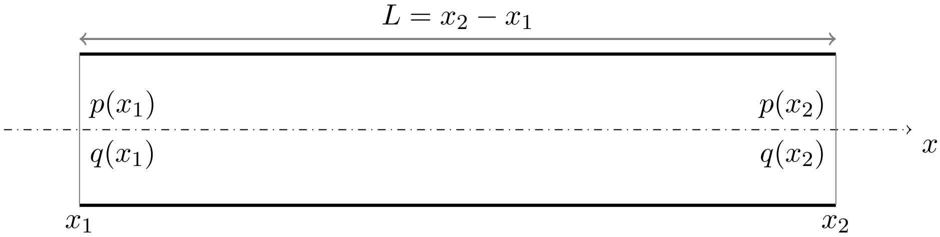
# Formulations pour un "tube long"

Hervé Lissek

16 octobre 2025

Soit un tube long (par rapport à la longueur d'onde $\lambda$) orienté selon un axe $x$, de longueur $L = x_2 - x_1 > \lambda$ et de section efficace $S$, comme illustré ci-dessous.




## 1 Formulation de la matrice de transmission entre $x_1$ et $x_2$

On rappelle les solutions générales de l'équation de propagation des ondes sonores en 1 dimension $(p(x), q(x))$:

$$\begin{cases} p(x) = p_+ e^{-jkx} + p_- e^{jkx} \\ q(x) = \dfrac{S}{\rho_0 c_0}\left[p_+ e^{-jkx} - p_- e^{jkx}\right] \end{cases} \tag{1}$$

où $p_-$ et $p_+$ sont les amplitudes des ondes planes progressives et retrogrades s'établissant dans le tube, qui dépendent des conditions aux limites (ici en $x = x_1$ et $x = x_2$), et on désigne $Z_{ac} = \frac{\rho_0 c_0}{S}$ l'impédance acoustique caractéristique des ondes planes dans le tube de section $S$.
Il est possible d'écrire l'équation Eq. 1 sous forme matricielle aux deux extrémités $x_i$ avec $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{pmatrix} p(x_i) \\ q(x_i) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_+ & p_- \\ \frac{p_+}{Z_{ac}} & -\frac{p_-}{Z_{ac}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-jkx_i} \\ e^{+jkx_i} \end{pmatrix} \tag{2}$$

En inversant la matrice de l'Eq. 2:

$$\begin{bmatrix} p_+ & p_- \\ \frac{p_+}{Z_{ac}} & -\frac{p_-}{Z_{ac}} \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{Z_{ac}}{2p_+p_-}\begin{bmatrix} -\frac{p_-}{Z_{ac}} & -p_- \\ -\frac{p_+}{Z_{ac}} & p_+ \end{bmatrix}$$

L'Eq. 2 en $x = x_2$ devient donc:

$$\begin{pmatrix} e^{-jkx_2} \\ e^{+jkx_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{p_+} & \frac{Z_{ac}}{p_+} \\ \frac{1}{p_-} & -\frac{Z_{ac}}{p_-} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x_2) \\ q(x_2) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Or on peut aussi exprimer la rotation de phase entre $x_1$ et $x_2$ pour l'onde plane progressive $p_- e^{jkx}$ et l'onde plane rétrograde $p_- e^{jkx}$ de manière matricielle:

$$\begin{pmatrix} e^{-jkx_1} \\ e^{+jkx_1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{jk(x_2-x_1)} & 0 \\ 0 & e^{-jk(x_2-x_1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-jkx_2} \\ e^{+jkx_2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

On peut ensuite réécrire l'Eq. 2 en $x = x_1$ comme:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p(x_1) \\ q_(x_1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} p_+ & p_- \\ \frac{p_+}{Z_{ac}} & -\frac{p_-}{Z_{ac}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{jk(x_2-x_1)} & 0 \\ 0 & e^{-jk(x_2-x_1)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{p_+} & \frac{Z_{ac}}{p_+} \\ \frac{1}{p_-} & -\frac{Z_{ac}}{p_-} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x_2) \\ q(x_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_+ & p_- \\ \frac{p_+}{Z_{ac}} & -\frac{p_-}{Z_{ac}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^{jk(x_2-x_1)}}{p_+} & \frac{Z_{ac}e^{jk(x_2-x_1)}}{p_+} \\ \frac{e^{-jk(x_2-x_1)}}{p_-} & -\frac{Z_{ac}e^{-jk(x_2-x_1)}}{p_-} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x_2) \\ q(x_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{jk(x_2-x_1)} + e^{-jk(x_2-x_1)} & Z_{ac}\left(e^{jk(x_2-x_1)} - e^{-jk(x_2-x_1)}\right) \\ \frac{1}{Z_{ac}}\left(e^{jk(x_2-x_1)} - e^{-jk(x_2-x_1)}\right) & e^{jk(x_2-x_1)} + e^{-jk(x_2-x_1)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

On arrive à l'expression finale:

$$
\begin{pmatrix} p(x_1) \\ q(x_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k(x_2 - x_1) & jZ_{ac} \sin k(x_2 - x_1) \\ \frac{j}{Z_{ac}} \sin k(x_2 - x_1) & \cos k(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x_2) \\ q(x_2) \end{pmatrix} \tag{6}
$$

## 2 Formulation de l'impédance "ramenée" (vue de l'entrée du tube)

Maintenant supposons que l'on "charge" le tube à son extrémité en $x_2$, c'est à dire qu'on le connecte à un sytème acoustique qui présentera une impédance acoustique imposant la relation entre $p(x_2)$ et $q(x_2)$ selon: $p(x_2) = Z_2 q(x_2)$.

Dans ce cas on peut écrire la relation entre $p(x_1)$ et $q(x_1)$ introduisant une impédance $Z_1$ telle que $p(x_1) = Z_1 q(x_1)$. En réécrivant l'Eq. 6 on obtient:

$$
Z_1 = \frac{p(x_1)}{q(x_1)} = \frac{p(x_2)\cos k(x_2 - x_1) + q(x_2) j Z_{ac} \sin k(x_2 - x_1)}{p(x_2)\frac{j}{Z_{ac}} \sin k(x_2 - x_1) + q(x_2)\cos k(x_2 - x_1)} \tag{7}
$$

En divisant numérateur et dénominateur par $q(x_2)\cos k(x_2 - x_1)$ on obtient donc:

$$
Z_1 = Z_{ac} \frac{\frac{Z_2}{Z_{ac}} + j \tan k(x_2 - x_1)}{j\frac{Z_2}{Z_{ac}} \tan k(x_2 - x_1) + 1} \tag{8}
$$