

**BOUCLES À VERROUILLAGE DE PHASE**  
**ou**  
**PHASE-LOCKED LOOPS (PLL)**



**BOUCLES À VERROUILLAGE DE PHASE**  
**ou**  
**PHASE-LOCKED LOOPS (PLL)**

	page
<b>1. ETUDE GENERALE DE LA PLL</b>	<b>1</b>
<b>1.1 DESCRIPTION</b>	<b>1</b>
<b>1.2 FONCTION DE TRANSFERT GENERALE DE LA PLL</b>	<b>4</b>
<b>1.3 COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL</b>	<b>9</b>
	<b>25</b>
	<b>34</b>
	<b>35</b>
	<b>36</b>
	<b>37</b>
	<b>38</b>
	<b>39</b>
<b>3.6 SYNTHESE DE FREQUENCE A PLL</b>	<b>39</b>
<b>3.7 MODULATION DE PHASE ET DE FREQUENCE A PLL</b>	<b>40</b>



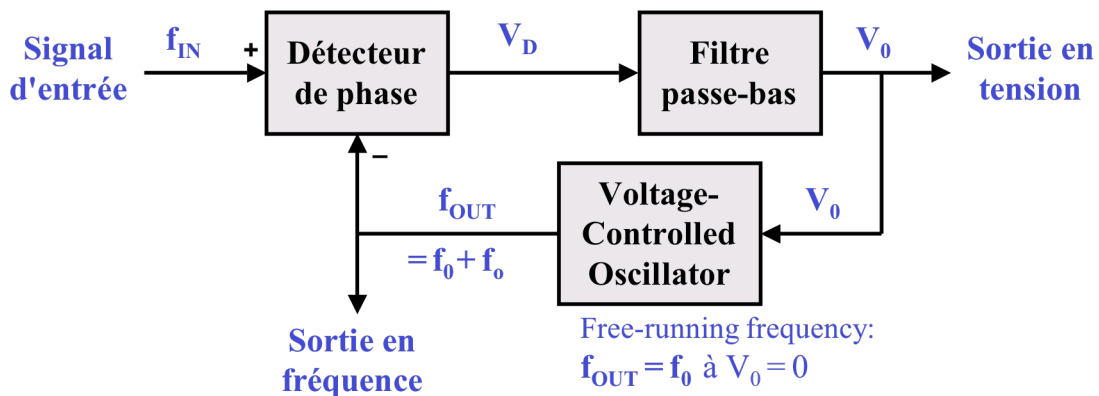
# 1. ETUDE GENERALE DE LA PLL

## 1.1 DESCRIPTION

### 1.1.1. Schéma-bloc d'une PLL

Les boucles à verrouillage de phase (Phase-Locked Loops ou PLLs), ou encore boucles à asservissement de phase, existent depuis les années 30. Au début, leurs applications se trouvaient essentiellement dans les systèmes de radiocommunications par satellite, car leur mise en pratique était complexe et coûteuse. Avec le développement de la microélectronique, la facilité de mise en oeuvre des PLLs s'est grandement améliorée, et leur usage s'est étendu aux systèmes grand public. On trouve ainsi des PLLs dans tous les systèmes de radio modernes (démodulateurs, synthétiseurs de fréquences, etc...), dans les systèmes numériques rapides (microprocesseurs), dans les systèmes de transmissions numériques sur câble ou fibre optique (clock recovery), et bien d'autres applications.

Une PLL est un système bouclé dans lequel la grandeur asservie est la phase d'un signal alternatif. Le schéma fonctionnel d'une PLL est le suivant:



Les éléments constitutifs d'une PLL sont :

- ♦ un détecteur ou comparateur de phase,
- ♦ un filtre passe-bas,
- ♦ un oscillateur dont la fréquence est commandée par une tension (ou VCO pour "Voltage-Controlled Oscillator")

La boucle est en régime normal, ou verrouillé, lorsque, à terme, la phase du signal de sortie du VCO est asservie à celle du signal d'entrée,  $\Phi_{OUT}(t) = \Phi_{IN}(t) - cst$ , ce qui implique alors que la fréquence du signal de sortie du VCO est égale à celle du signal d'entrée,  $f_{OUT} = f_{IN}$ , puisque la fréquence est la dérivée de la phase.

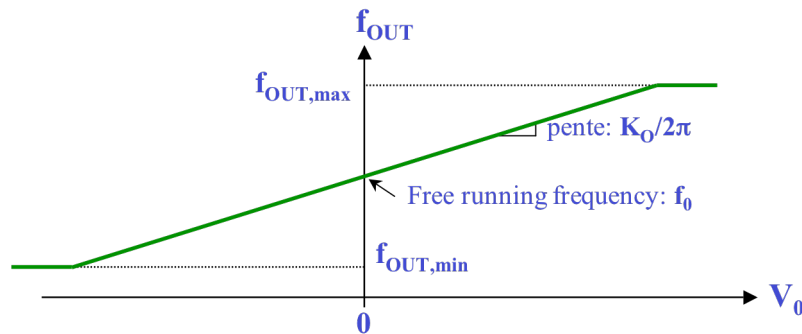
Le détecteur de phase fournit un signal  $V_D$  qui comprend une composante à  $f_{IN}$  ou  $2 \cdot f_{IN}$ , suivant le type de détecteur de phase, ainsi qu'une composante continue (mais pas forcément constante)  $V_0$  proportionnelle à l'écart entre la phase  $\Phi_{IN}$  du signal d'entrée et celle  $\Phi_{OUT}$  du signal généré par le VCO. Le filtre passe-bas permet de ne garder que la composante utile  $V_0$ . Celle-ci est appliquée à l'entrée du VCO, qui génère le signal dont la fréquence  $f_{OUT}$  varie à l'image de  $V_0$  autour d'une valeur propre au VCO.

L'écart de phase  $\Phi_E = \Phi_{IN} - \Phi_{OUT}$  sert donc à maintenir la tension correcte à l'entrée du VCO en régime verrouillé.

Si la fréquence du signal d'entrée augmente (ou diminue) légèrement, l'écart de phase croît (respectivement décroît) et donc le signal d'entrée du VCO varie de même, forçant la fréquence du VCO à rattraper celle d'entrée, jusqu'à ce que l'écart de phase soit stabilisé.

### 1.1.2. Le VCO – Voltage-Controlled Oscillator

Le VCO, ou oscillateur contrôlé en tension, est un circuit qui fournit un signal alternatif dont la fréquence varie à l'image d'une tension de commande. A noter que l'on rencontre aussi des oscillateurs contrôlés en courant (CCO ou Current-Controlled Oscillator). La caractéristique de transfert d'un VCO idéal est la suivante:



Elle répond à l'équation:

$$f_{OUT} = f_0 + V_0 \cdot K_O / 2\pi$$

La fréquence  $f_0$  est appelée fréquence centrale ou fréquence libre (free-running frequency) du VCO. C'est la fréquence à laquelle il oscille lorsque la tension de commande est nulle.

Dans la pratique, la caractéristique est plus ou moins linéaire, la fréquence libre n'est pas toujours au milieu de la plage de variation et peut correspondre à une valeur particulière, non nulle, de la tension de commande. On n'utilisera alors le VCO que dans une partie restreinte de sa dynamique, autour de  $f_0$ , où la caractéristique peut être considérée comme linéaire.

Les VCOs courants sont de trois types qui seront étudiés plus en détail dans un autre chapitre:

- **les oscillateurs sinusoïdaux**, en général du type LC, avec une diode Varicap dont la capacité de jonction peut être commandée par sa tension inverse (surtout utilisés en haute fréquence)
- **les oscillateurs à relaxation, ou bascules astables, ou encore multivibrateurs**, qui fournissent des signaux carrés et triangulaires, par charge et/ou décharge d'une capacité avec une source de courant commandée par une tension.
- **les oscillateurs en anneaux** qui fournissent des signaux carrés à haute fréquence, en utilisant la dépendance du temps de propagation des cellules formant l'anneau, en fonction de la tension ou du courant d'alimentation, ou encore d'un élément R ou C commandé par une tension.

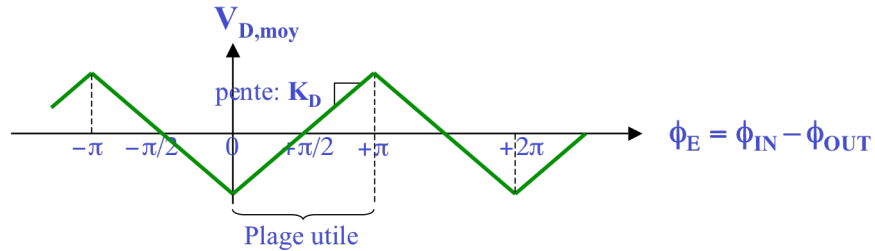
### 1.1.3. Le détecteur de phase

Un détecteur de phase idéal fournirait une tension proportionnelle à l'écart de phase de deux signaux alternatifs. Il répondrait à l'équation:

$$V_D = K_D \cdot (\phi_{IN} - \phi_{OUT})$$

Il existe plusieurs principes pour détecter le déphasage entre deux signaux alternatifs. En pratique, les plus souvent utilisés sont: la multiplication pour les signaux analogiques (sinus, triangles carrés), la détection des flancs pour les signaux binaires. Le fonctionnement des différents détecteurs de phase sera étudié plus en détail en 2.1 de ce chapitre.

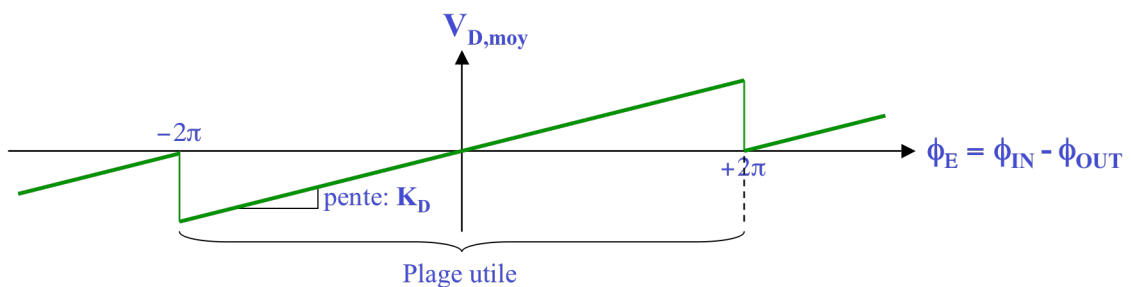
Les détecteurs de phase basés sur la multiplication (cellule de Gilbert ou fonction logique XOR) génèrent un signal à  $2 \cdot f_{IN}$  superposé au signal utile  $V_{D,moy} = f(\phi_{IN} - \phi_{OUT})$  dont la caractéristique est la suivante (sous certaines conditions):



La caractéristique étant périodique, la PLL ne peut se verrouiller que dans la seule partie de pente positive. La gamme de phase utile est donc de  $\pi$  centrée sur  $\pi/2$ .

La caractéristique peut aussi être décalée verticalement (composante continue).

Les comparateurs de phase basés sur la détection des flancs sont des systèmes logiques séquentiels qui génèrent des impulsions à  $f_{IN}$  dont la valeur moyenne  $V_{D,moy}$  est proportionnelle à  $(\phi_{IN} - \phi_{OUT})$ . Le type le plus répandu, appelé comparateur de "phase-fréquence", a la

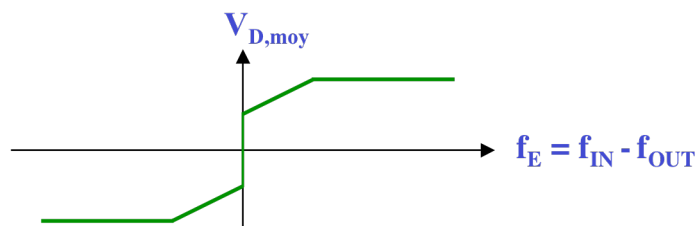


caractéristique suivante:

La gamme de phase utile est donc de  $4\pi$  centrée sur 0.

La caractéristique peut être décalée verticalement (composante continue).

Comme l'indique son nom, ce comparateurs de "phase-fréquence" jouent aussi le rôle de comparateur de fréquence lorsque la PLL n'est pas verrouillée, et donc lorsque  $f_{OUT} \neq f_{IN}$ . La caractéristique en est généralement la suivante:



### 1.1.4 Le filtre passe-bas F(p)

Le filtre passe-bas F(p) joue un rôle majeur dans le comportement de la PLL. Cet élément capital a pour fonctions de:

- ♦ atténuer les composantes indésirables (harmoniques de  $f_{IN}$ ) à la sortie du détecteur de phase,
- ♦ fixer "l'ordre" de la PLL,
- ♦ fixer la "bande passante" de la PLL,
- ♦ déterminer la stabilité et le comportement dynamique ou transitoire de la PLL,
- ♦ éventuellement mémoriser  $V_0$  (et donc  $f_{OUT}$ ) si le signal d'entrée à  $f_{IN}$  disparaît temporairement.

C'est à l'utilisateur de choisir l'ordre et la fréquence de coupure de ce filtre, dit de boucle. On utilise le plus souvent **des filtres passifs** constitués de résistances et de condensateurs (cas le plus fréquent avec des circuits PLL intégrés). On peut aussi utiliser **des filtres actifs** permettant, en plus de leur fonction initiale, d'apporter un gain supplémentaire.

## 1.2 FONCTION DE TRANSFERT GENERALE DE LA PLL

### 1.2.1 Le VCO

Comme déjà vu en 1.1.2, le VCO répond à l'équation:

$$f_{OUT} = f_0 + V_0 \cdot K_O / 2\pi$$

Où  $f_0$  est la fréquence libre ou "free-running frequency", c.-à-d. la fréquence lorsque  $V_0 = 0$ .

L'écart de fréquence par rapport à la fréquence libre, noté  $f_o$ , vaut:

$$f_o = f_{OUT} - f_0 = V_0 \cdot K_O / 2\pi$$

L'écart de pulsation par rapport à la pulsation libre est:

$$\omega_o = 2\pi \cdot (f_{OUT} - f_0) = \omega_{OUT} - \omega_0 = K_O \cdot V_0$$

La sensibilité  $K_O$  du VCO s'exprime en [rad/V·s].

La phase d'un signal sinusoïdal est l'intégrale de sa pulsation par rapport au temps:

$$\phi_{OUT}(t) = \int_0^t 2\pi \cdot f_{OUT}(t) \cdot dt = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \int_0^t \omega_o(t) \cdot dt = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi_o(t)$$

En introduisant la relation tension-fréquence du VCO, cela donne:

$$\phi_{OUT}(t) = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi_o(t) = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \int_0^t K_O \cdot v_0(t) \cdot dt = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + K_O \cdot \int_0^t v_0(t) \cdot dt$$

Le VCO introduit une intégration entre sa tension d'entrée  $V_0$  et la phase de sortie  $\phi_{OUT}$ .

En utilisant la transformée de Laplace, cela donne :

$$\phi_o(p) = \frac{\omega_o(p)}{p} = \frac{K_O \cdot V_0(p)}{p}$$

### 1.2.2 Le signal d'entrée

Lorsque la boucle est verrouillée,  $f_{OUT} = f_{IN}$  à terme. Les deux fréquences variant autour de la même constante  $f_0$ , on peut définir l'écart de fréquence (ou de pulsation) par rapport à la fréquence (ou la pulsation) libre:

$$f_i = f_{IN} - f_0 \quad \omega_i = \omega_{IN} - \omega_0$$

De la même façon que pour la phase du signal du VCO, on peut écrire:

$$\phi_{IN}(t) = \int_0^t \omega_{IN}(t) \cdot dt = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \int_0^t \omega_i(t) \cdot dt = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi_i(t)$$

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient :

$$\phi_i(p) = \frac{\omega_i(p)}{p}$$

### 1.2.3 Le détecteur de phase

Comme vu en 1.1.3, le signal  $V_D$  sortant du détecteur de phase a une composante utile  $V_{D,moy}$  proportionnelle à l'écart de phase  $\phi_E = \phi_{IN} - \phi_{OUT}$ , avec un éventuel offset  $\phi_C = \pi/2$  (voir 1.1.3):

$$V_{D,moy}(t) = K_D \cdot (\phi_{IN}(t) - \phi_{OUT}(t) - \phi_C) = K_D \cdot (\phi_i(t) - \phi_o(t) - \phi_C) = K_D \cdot (\phi_E(t) - \phi_C) = K_D \cdot \phi_e(t)$$

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient:

$$V_D(p) = K_D \cdot \phi_e(p)$$

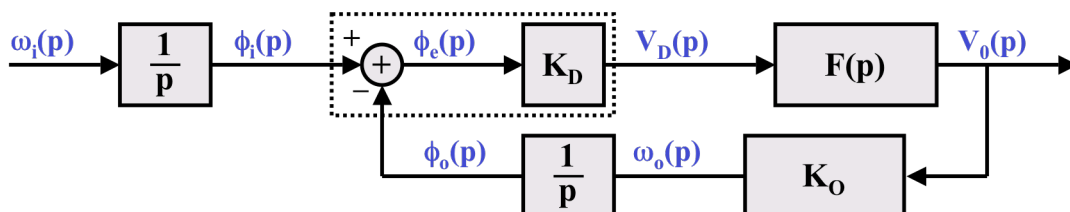
### 1.2.4 Le filtre passe-bas

Le filtre est caractérisé par sa fonction de transfert qui s'exprime directement avec la variable de Laplace:

$$V_0(p) = F(p) \cdot V_D(p)$$

### 1.2.5 Fonction de transfert de la boucle

A partir des résultats précédents on peut établir le modèle linéaire de la boucle à verrouillage de phase (PLL), qui est le suivant:



C'est un système bouclé à réaction négative avec:

$$A(p) = K_D \cdot F(p) \quad \text{et} \quad \beta(p) = \frac{K_O}{p}$$

Le "gain de boucle ouverte" (open-loop) est:

$$H_{ol}(p) = \left. \frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} \right|_{ol} = A(p) \cdot \beta(p) = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}$$

On en déduit la fonction de transfert de la PLL:

$$\frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot \beta(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{1 + \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}} = \frac{p \cdot K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

La fonction de transfert entre l'entrée *en pulsation* et la sortie *en tension*, appelé "gain" de la PLL, s'écrit:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{\frac{1}{K_O}}{1 + \frac{p}{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}}$$

Il s'agit d'une fonction de transfert de type "passe-bas", dont la fréquence de coupure correspond à la bande passante de la PLL.

La fonction de transfert *en fréquence* (ou *pulsation*) s'écrit:

$$\frac{f_o(p)}{f_i(p)} = \frac{\omega_o(p)}{\omega_i(p)} = \frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} \cdot K_O = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}}$$

La PLL est bien un "suiveur" en fréquence ( $f_o = f_i$ , et donc  $f_{OUT} = f_{IN}$ ) dans une certaine bande passante.

La fonction de transfert de la boucle unitaire s'écrit:

$$\frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} = \frac{A(p) \cdot \beta(p)}{1 + A(p) \cdot \beta(p)} = \frac{\frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}}{1 + \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}} = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

La fonction de transfert dite "d'erreur" s'écrit:

$$\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} = \frac{1}{1 + A(p) \cdot \beta(p)} = \frac{1}{1 + \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p}} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O}$$

## 1.2.6 Le domaine de verrouillage ou "Lock Range" statique

Lorsque la boucle est verrouillée en régime quasi statique, c'est à dire que  $f_{IN}$  varie autour de  $f_0$  suffisamment lentement pour ne pas perdre temporairement le verrouillage,  $f_{OUT} = f_{IN}$ , et donc, si l'on considère l'écart par rapport à la fréquence centrale,  $f_o = f_i$ , ou encore  $\omega_o = \omega_i$ .

En tenant compte des caractéristiques  $K_O$  du VCO et  $K_D$  du détecteur de phase, ainsi que du facteur de transmission du filtre en continu, on peut écrire:

$$\omega_o = V_0 \cdot K_O = \phi_e \cdot K_D \cdot |F(j0)| \cdot K_O = \omega_i$$

L'écart maximal de fréquence autour de  $f_0$  est donc dépendant de la dynamique utile du détecteur de phase et du type de filtre.

Dans le cas très courant d'un détecteur de phase basé sur la multiplication ou le XOR, suivi d'un filtre passif:

$$\phi_{e,max/min} = \pm \pi/2 \text{ autour de } \pi/2 \quad F(j0) = 1 \quad \omega_{o,max} = -\omega_{o,min} = \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O$$

Ce qui correspond à l'écart maximal de pulsation autour de  $\omega_0$  sur lequel la PLL peut rester verrouillée, appelé "**Lock Range**", qui s'exprime par:

$$\omega_{\text{lock}} = \omega_{i,\text{max}} = -\omega_{i,\text{min}} = \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O$$

Ce résultat sous-entend que la dynamique d'entrée en tension du VCO est plus large que celle de sortie du détecteur de phase, sinon c'est le VCO qui impose le "Lock Range".

Dans le cas d'un filtre actif introduisant une intégrale supplémentaire dans la boucle, le "Lock Range" est déterminée par la dynamique du VCO, ou celle de sortie du filtre.

### 1.2.7 Le domaine de capture ou "Capture Range"

Lorsque la boucle n'est donc pas verrouillée, donc lorsque  $f_{\text{OUT}} \neq f_{\text{IN}}$ , un détecteur de phase de type multiplicateur va donner une tension de sortie  $V_D$  avec une valeur moyenne nulle, une composante à  $|f_{\text{IN}} - f_{\text{OUT}}|$  (de forme sinus ou triangulaire, suivant les cas) et une composante à  $|f_{\text{IN}} + f_{\text{OUT}}|$  (de forme sinus, arcs de sinus ou rectangulaire, suivant les cas). Avec un filtre ne comportant pas d'intégrale,  $V_{0,\text{moy}} = 0$ , donc  $f_{\text{OUT}} = f_0$ , et la composante à basse fréquence de  $V_D$ , qu'on peut approximer grossièrement par un sinus de pulsation  $\omega_i = 2\pi \cdot |f_{\text{IN}} - f_0|$ , va créer à la sortie du filtre passe-bas une variation de  $V_0$  dont l'amplitude peut s'exprimer par:

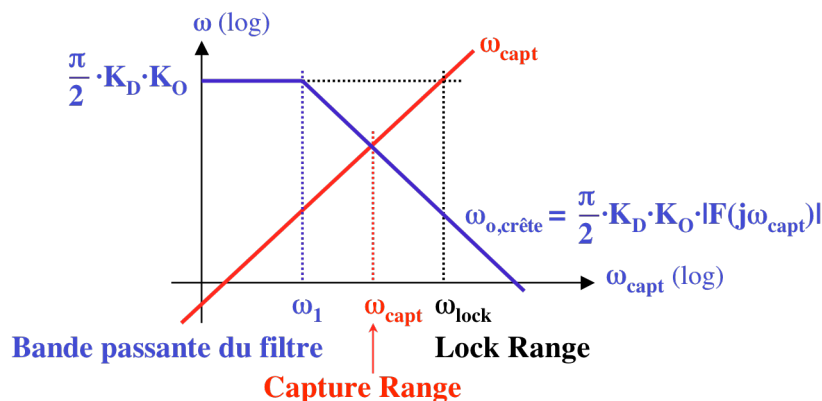
$$V_{0,\text{crête}} = V_{D,\text{crête}} \cdot |F(j\omega_i)| = \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot |F(j\omega_i)|$$

Cette variation de  $V_0$  provoque à la sortie du VCO une variation de pulsation  $\omega_o = K_O \cdot V_{0,\text{crête}}$  autour de la pulsation libre  $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ . La PLL arrivera à se verrouiller si  $V_{0,\text{crête}}$  est suffisant pour produire un écart de pulsation  $\omega_o = \omega_i$ .

L'écart maximal de fréquence par rapport à  $f_0$  sur lequel la PLL peut acquérir son verrouillage, appelé "**Capture Range**", s'exprime par:

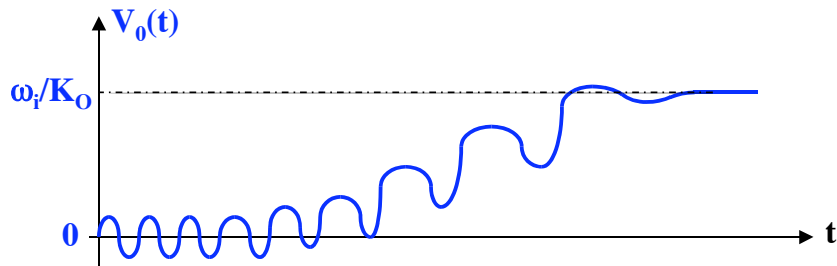
$$\omega_{\text{capture}} = V_{0,\text{crête}} \cdot K_O = \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O \cdot |F(j\omega_{\text{capture}})| = \omega_{\text{lock}} \cdot |F(j\omega_{\text{capture}})|$$

Cette équation non-linéaire est illustrée dans le cas d'un simple filtre passe-bas RC du 1<sup>er</sup> degré à un pôle et sans zéro (voir 1.3.3.1), par la figure suivante:



Dans la pratique, la PLL arrive à capturer une fréquence plus éloignée de  $f_0$  que celle établie dans le calcul précédent. En effet, même lorsque la tension  $V_0(t)$  a encore une valeur de crête trop petite pour permettre le verrouillage immédiat, elle a déjà un effet sur  $f_{\text{OUT}}$  qui est modulée autour de  $f_0$ , se rapprochant et s'éloignant périodiquement de  $f_{\text{IN}}$ .

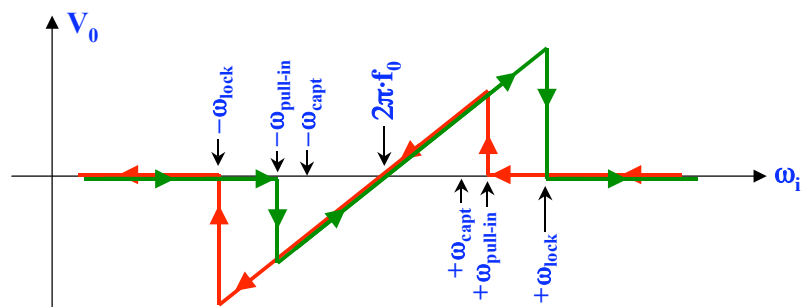
La tension  $V_0(t)$  n'est pas purement sinus, mais dissymétrique, avec une valeur moyenne non-nulle qui a tendance à "attirer"  $f_{OUT}$  vers  $f_{IN}$ . Le phénomène s'amplifie à chaque battement jusqu'à éventuellement aboutir au verrouillage de la PLL. Ce phénomène, appelé "Pull-In", est illustré par la figure suivante:



La "Pull-In Range" est l'écart de fréquence maximum par rapport à  $f_0$  dans lequel la PLL peut se verrouiller ainsi. Elle est supérieure à la "Capture Range".

La capture par "Pull-In" est beaucoup plus lente que la capture directe dans la "Capture Range".

En régime quasi statique, c'est à dire si  $f_{IN}$  varie autour de  $f_0$  suffisamment lentement pour éviter tout phénomène transitoire, on peut relever la caractéristique suivante:



Dans le cas d'un détecteur de phase-fréquence, suivi d'un filtre comportant une intégrale, le "Capture Range" est identique au "Lock Range", imposé par la dynamique du VCO, ou celle de sortie du filtre actif. Il n'y a pas de phénomène de "Pull-In"

### 1.3 COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA PLL

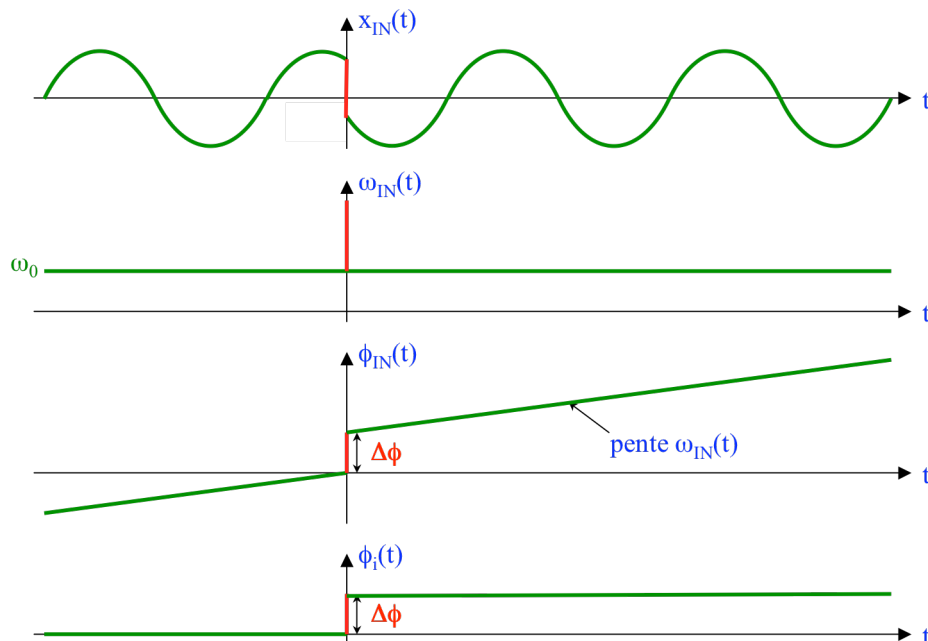
Le comportement dynamique d'une PLL est directement lié aux caractéristiques du filtre passe-bas dans la boucle, c'est à dire, l'ordre du filtre, le nombre et la position de ses pôles et de ses zéros.

#### 1.3.1 Les différentes sollicitations

Pour qualifier le comportement dynamique d'un PLL, on va étudier sa réponse à quatre types de sollicitations:

- le saut de phase, par exemple dans une modulation PSK
- le saut de fréquence, par exemple dans une modulation FSK
- la rampe de fréquence, par exemple par effet Doppler
- la modulation sinusoïdale de fréquence, soit une modulation FM analogique

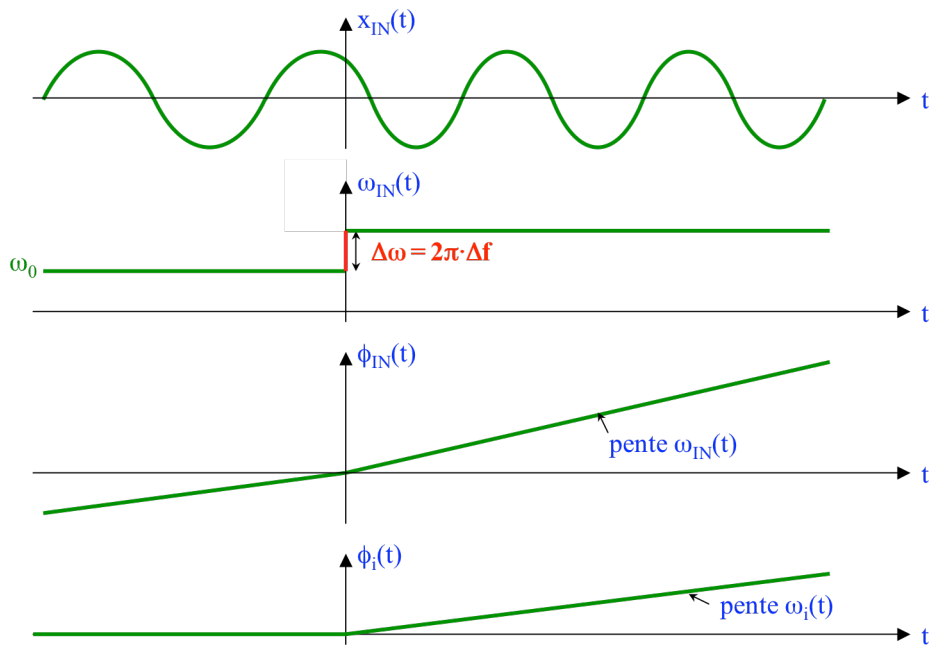
Le **saut de phase** est illustré par la figure suivante:



En utilisant la variable de Laplace, cette sollicitation s'écrit:

$$\phi_i(p) = \frac{\Delta\phi}{p}$$

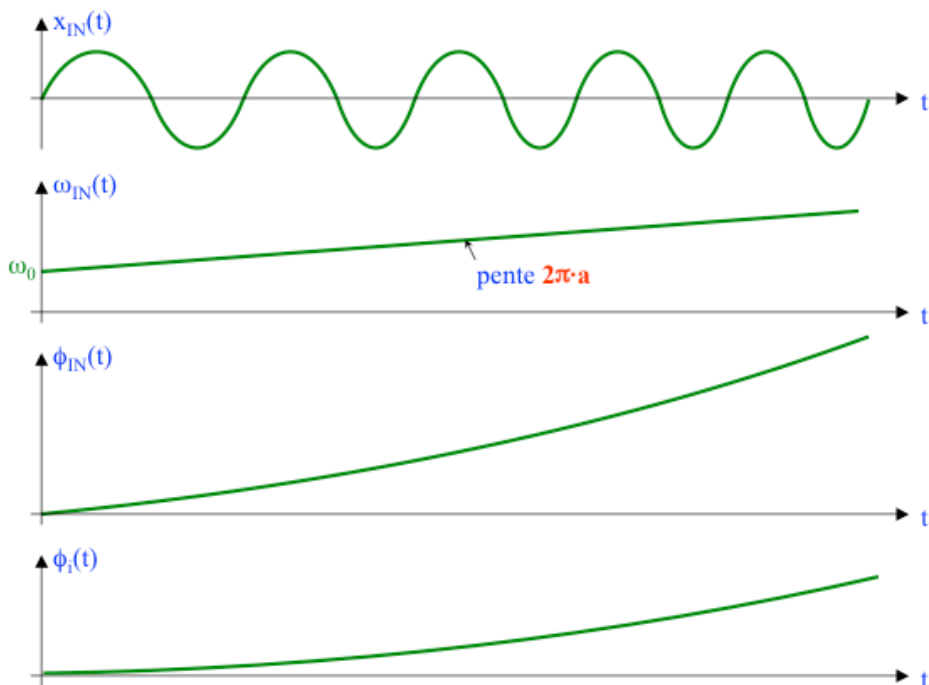
Le **saut de fréquence** est illustré par la figure suivante:



En utilisant la variable de Laplace, cette sollicitation s'écrit:

$$\omega_i(p) = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p} \quad \text{et} \quad \phi_i(p) = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2}$$

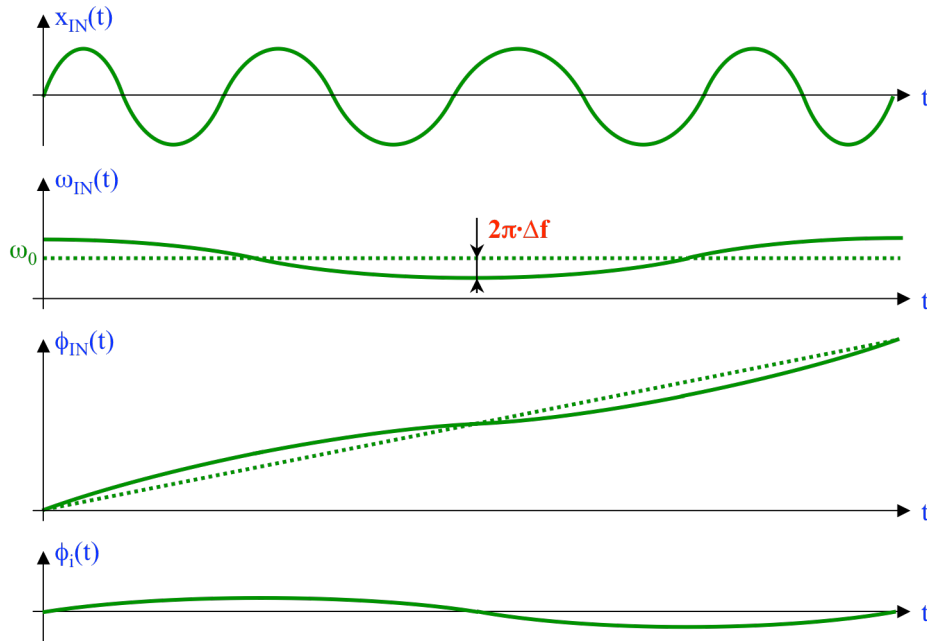
La **rampe de fréquence** est illustrée par la figure suivante:



En utilisant la variable de Laplace, cette sollicitation s'écrit:

$$\omega_i(p) = \frac{2\pi \cdot a}{p^2} \quad \text{et} \quad \phi_i(p) = \frac{2\pi \cdot a}{p^3}$$

La **modulation sinusoïdale de fréquence** répondant à l'équation  $f_{IN}(t) = f_0 + \Delta f \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$ , est illustrée par la figure suivante:



En notation complexe, cette sollicitation s'écrit:

$$\omega_i(j\omega) = 2\pi \cdot \Delta f \quad \text{et} \quad \phi_i(j\omega) = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{j\omega}$$

### 1.3.2 Comportement dynamique de la PLL du 1<sup>er</sup> ordre

La PLL du 1<sup>er</sup> ordre correspond au cas où  $F(p) = 1$ , c'est-à-dire à l'absence de filtre.

La fonction de transfert de la PLL du 1<sup>er</sup> ordre s'écrit:

$$\frac{V_0(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p \cdot K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p \cdot K_D}{p + K_D \cdot K_O}$$

Le pôle qui apparaît dans la fonction de transfert correspond à l'intégration implicite liant la phase à la fréquence en sortie du VCO.

La stabilité est toujours garantie puisque le seul pôle ( $-K_D \cdot K_O$ ) est toujours situé dans la moitié gauche du plan complexe.

Le "gain" de la PLL du 1<sup>er</sup> ordre s'écrit:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{K_D}{p + K_D \cdot K_O} = \frac{1/K_O}{1 + p/K_D \cdot K_O}$$

C'est une fonction du type passe-bas d'ordre 1, avec une bande passante  $B_{-3dB} = K_D \cdot K_O / 2\pi$  [Hz].

La fonction "d'erreur" de la PLL du 1<sup>er</sup> ordre s'écrit:

$$\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p}{p + K_D \cdot K_O}$$

L'erreur de phase résultant d'un saut de phase  $\Delta\phi$  en entrée est:

$$\phi_e(t) = L^{-1}\left(\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} \cdot \frac{\Delta\phi}{p}\right) = L^{-1}\left(\frac{\Delta\phi}{p + K_D \cdot K_O}\right) = \Delta\phi \cdot e^{-K_D \cdot K_O \cdot t}$$

C'est un transitoire qui tend vers zéro en  $\exp(-t/\tau)$ , avec  $\tau = 1/K_D \cdot K_O$ .

La réponse en tension à un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée est:

$$V_0(t) = L^{-1}\left(\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p}\right) = L^{-1}\left(\frac{2\pi \cdot \Delta f \cdot K_D}{p \cdot (p + K_D \cdot K_O)}\right) = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_O} \cdot (1 - e^{-K_D \cdot K_O \cdot t})$$

C'est un transitoire qui tend vers une valeur finie  $2\pi \cdot \Delta f / K_O$  en  $\exp(-t/\tau)$ , avec  $\tau = 1/K_D \cdot K_O$ .

L'erreur de phase résultant de ce saut fréquence  $\Delta f$  en entrée est:

$$\phi_e(t) = L^{-1}\left(\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{2\pi \cdot \Delta f}{p \cdot (p + K_D \cdot K_O)}\right) = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_D \cdot K_O} \cdot (1 - e^{-K_D \cdot K_O \cdot t})$$

C'est un transitoire qui tend vers une valeur finie  $2\pi \cdot \Delta f / K_D \cdot K_O$ , il y a donc une erreur statique de phase.

L'erreur de phase résultant d'une rampe de fréquence en entrée est:

$$\phi_e(t) = L^{-1}\left(\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3}\right) = L^{-1}\left(\frac{2\pi \cdot a}{p^2 \cdot (p + K_D \cdot K_O)}\right)$$

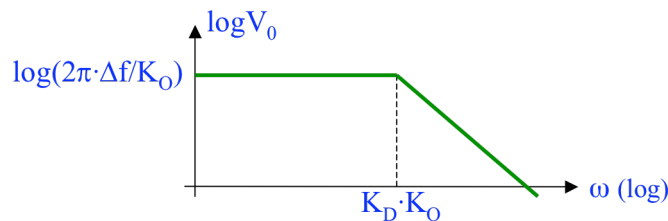
Elle n'est pas bornée car:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^2 \cdot (p + K_D \cdot K_O)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2\pi \cdot a}{p \cdot (p + K_D \cdot K_O)} = \infty$$

La PLL du 1<sup>er</sup> ordre est incapable de rester synchronisée sur une rampe de fréquence, par exemple un signal soumis à l'effet Doppler, comme celui reçu d'un satellite non-géostationnaire.

La réponse à une modulation sinusoïdale de fréquence est:

$$V_0(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} \cdot 2\pi \cdot \Delta f = \frac{K_D \cdot 2\pi \cdot \Delta f}{j\omega + K_D \cdot K_O} = \frac{2\pi \cdot \Delta f / K_O}{1 + j\omega / K_D \cdot K_O}$$



Rappel: dans le cas très courant d'un détecteur de phase basé sur la multiplication ou le XOR, la plage de pulsation dans laquelle la PLL peut rester verrouillée, ou "Lock Range", vaut:

$$\pm\omega_{lock} = \pm \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O \quad \text{autour de } \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

**Conclusions sur la PLL du 1<sup>er</sup> ordre:**

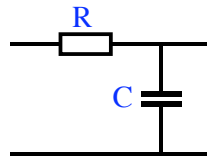
- la stabilité est toujours garantie, et son régime transitoire est en  $\exp(-t/\tau)$ , parfaitement amorti;
- la bande passante est toujours liée uniquement au "lock-range", ce qui limite considérablement les applications;
- les signaux issus du détecteur de phase sont appliqués sans filtrage à l'entrée du VCO; or ceux-ci comportent des éléments parasites à  $f_{IN}$  ou  $2 \cdot f_{IN}$  de forte amplitude (p.r. à  $V_0$ ) que la plupart des VCOs tolèrent mal, voir pas du tout;
- la PLL du 1<sup>er</sup> ordre ne peut rester verrouillée sur une rampe de fréquence;
- la PLL du 1<sup>er</sup> ordre n'a aucune mémoire de fréquence en cas de disparition momentanée du signal d'entrée.

**1.3.3 Comportement dynamique de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre**

La PLL du 2<sup>e</sup> ordre correspond au cas où le filtre  $F(p)$  est de type passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre. Le comportement de la boucle diffère selon la nature exacte de ce filtre.

**1.3.3.1 PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre passe-bas passif à seulement un pôle, sans zéro**

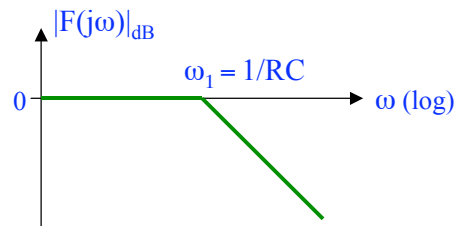
Le filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre le plus simple est donné dans le schéma suivant:



Sa fonction de transfert est:

$$F(p) = \frac{1}{1+p \cdot R \cdot C} = \frac{1}{1+p \cdot \tau_1} = \frac{1}{1+p/\omega_1} = \frac{\omega_1}{p+\omega_1} \quad \text{avec: } \omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{R \cdot C}$$

Sa réponse harmonique en amplitude est la suivante:



Le "gain" de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à seulement un pôle s'écrit:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{\frac{K_D \cdot \omega_1}{p + \omega_1}}{p + \frac{K_D \cdot \omega_1 \cdot K_O}{p + \omega_1}} = \frac{K_D \cdot \omega_1}{p^2 + p \cdot \omega_1 + K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}$$

Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme canonique:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

avec: la pulsation propre  $\omega_n = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}}$

le facteur de qualité  $Q = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \tau_1} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\omega_1}} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$

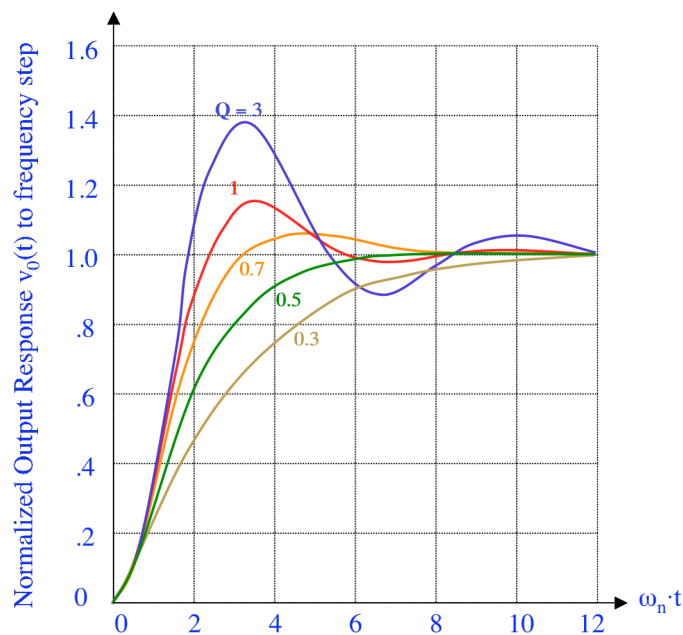
Toutes les PLLs du 2<sup>e</sup> ordre sont toujours stables, car les pôles de leur fonction de transfert ont une partie réelle toujours négative:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_n}{2 \cdot Q} \pm \frac{\omega_n}{2 \cdot Q} \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot Q^2}$$

La réponse en tension à un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée est:

$$V_0(t) = L^{-1} \left( \frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p} \right) = L^{-1} \left( \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2}{p \cdot (p^2 + p \cdot 2\xi \cdot \omega_n + \omega_n^2)} \right)$$

Normalisée à  $2\pi \cdot \Delta f / K_O = 1$ , cette fonction à l'allure suivante:



La réponse harmonique en tension à une modulation sinusoïdale de fréquence  $\Delta f$  est:

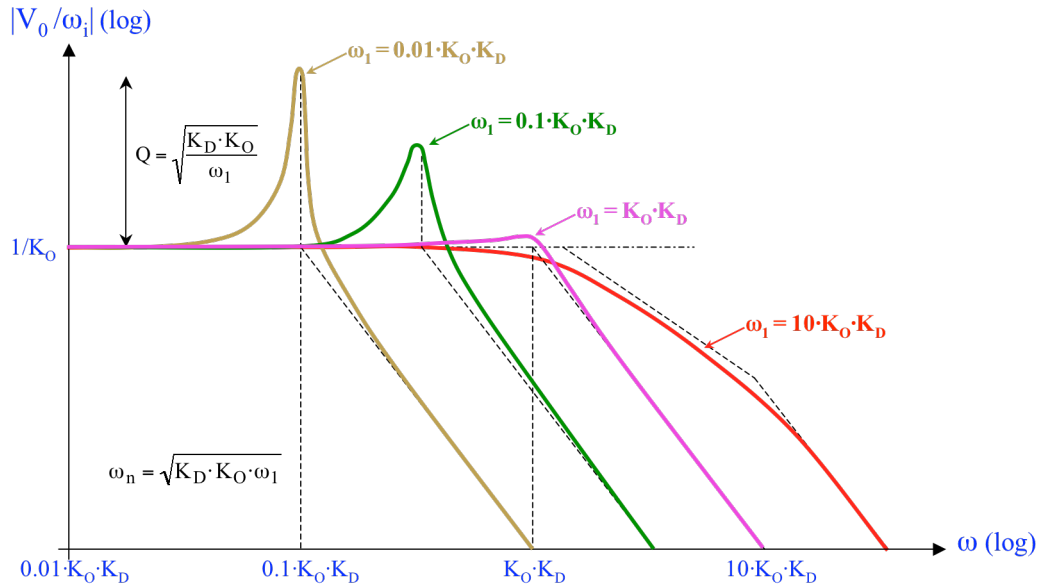
$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{K_D \cdot \omega_1}{(j\omega)^2 + j\omega \cdot \omega_1 + K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Pour un produit  $K_D \cdot K_O$ , donc un "Lock Range" donné, la courbe de réponse est très variable suivant la pulsation de coupure du filtre, comme le montre la figure à la page suivante.

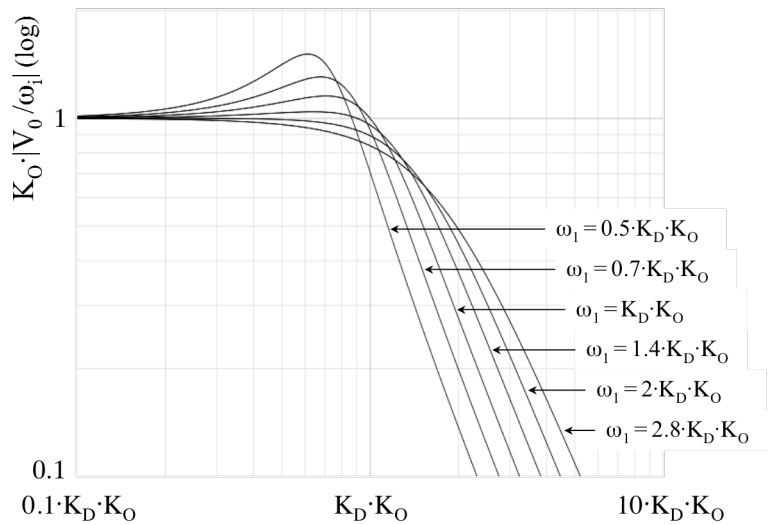
Rappel: dans le cas très courant d'un détecteur de phase basé sur la multiplication ou le XOR, la "Lock Range", vaut:

$$\pm \omega_{\text{lock}} = \pm \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O \quad \text{autour de } \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

Courbe de réponse à une modulation de fréquence de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre passif à seulement un pôle:



En pratique, seules sont utilisables les valeurs de  $\omega_1$  voisines de  $K_D \cdot K_O$ , c'est à dire Q autour de 1, ce qui donne les courbes de réponse normalisées à  $1/K_O$  suivantes:



On voit sur le graphique, et une analyse détaillée le confirme, que la bande passante est limitée à une valeur maximale:

$$B_{-3\text{db,max}} = \sqrt{2} \cdot K_D \cdot K_O \quad \text{pour } \omega_1 = 2 \cdot K_D \cdot K_O,$$

La fonction "d'erreur" de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre passif à seulement un pôle est:

$$\frac{\Delta\phi_e(p)}{\Delta\phi_1(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p}{p + K_D \cdot \frac{\omega_1}{p + \omega_1} \cdot K_O} = \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}$$

L'erreur de phase provoquée par un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_D \cdot K_O}$$

Il y a donc une erreur statique de phase.

L'erreur de phase provoquée par une rampe de fréquence en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot \omega_1 + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \infty$$

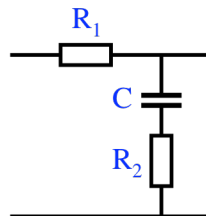
Cette PLL est incapable de rester verrouillée sur une rampe de fréquence, par exemple un signal soumis à l'effet Doppler, comme celui reçu d'un satellite non-géostationnaire.

### Conclusions sur la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à seulement un pôle, sans zéro:

- la stabilité est toujours garantie;
- si l'on veut conserver un amortissement correct ( $0.5 \leq Q \leq 1$ ), la bande passante reste liée quasi uniquement au "lock-range", avec un marge de manoeuvre très restreinte, ce qui limite considérablement les applications;
- elle ne peut rester verrouillée sur une rampe de fréquence;
- elle possède une mémoire de fréquence en cas de disparition momentanée du signal d'entrée, mais celle-ci s'éloigne de sa valeur de référence avec une constante de temps  $\tau_1 = R \cdot C = 1/\omega_1$ .

### 1.3.3.2 PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre passe-bas passif à un pôle et un zéro

Le schéma d'un filtre passe-bas passif du 1<sup>er</sup> ordre avec un pôle et un zéro est le suivant:

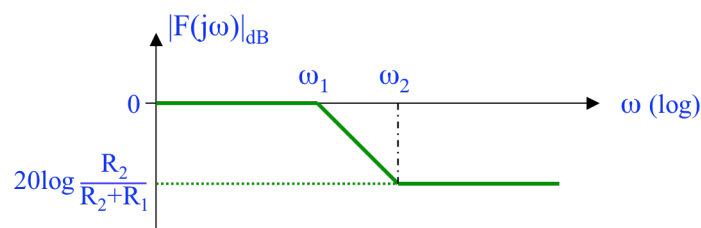


Sa fonction de transfert est:

$$F(p) = \frac{1 + p \cdot R_2 \cdot C}{1 + p \cdot (R_1 + R_2) \cdot C} = \frac{1 + p \cdot \tau_2}{1 + p \cdot \tau_1} = \frac{1 + p/\omega_2}{1 + p/\omega_1} = \frac{\omega_1 \cdot (p + \omega_2)}{\omega_2 \cdot (p + \omega_1)}$$

avec:  $\tau_1 = (R_1 + R_2) \cdot C$  et  $\tau_2 = R_2 \cdot C$ , ou encore:  $\omega_1 = 1/(R_1 + R_2) \cdot C$  et  $\omega_2 = 1/R_2 \cdot C$

Sa réponse harmonique en amplitude est la suivante:



Le "gain" de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à un pôle et un zéro s'écrit:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{\frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1} \cdot K_D}{p + K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 + 1} \cdot K_O} = \frac{\frac{K_D \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{\tau_1}}{p^2 + p \cdot \left( \frac{1 + \tau_2 \cdot K_D \cdot K_O}{\tau_1} \right) + \frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}}$$

Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme canonique:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot \left( p \cdot \left( \frac{1}{\omega_n \cdot Q} - \frac{1}{K_D \cdot K_O} \right) + 1 \right)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

avec: la pulsation propre  $\omega_n = \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{(R_1 + R_2) \cdot C}}$

le facteur de qualité  $Q = \left[ \omega_n \cdot \left( \frac{1}{K_D \cdot K_O} + \tau_2 \right) \right]^{-1} = \left[ \omega_n \cdot \left( \frac{1}{K_D \cdot K_O} + R_2 \cdot C \right) \right]^{-1}$

Le cas où  $\omega_n \cdot Q \ll K_D \cdot K_O$ , c'est à dire  $\omega_2 \ll K_D \cdot K_O$ , est le plus courant.

Avec  $\omega_n \cdot Q \approx K_D \cdot K_O$ , c'est à dire  $\tau_2 \approx 0$ , on en revient à la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre à un pôle, mais sans zéro.

Le cas  $\omega_n \cdot Q > K_D \cdot K_O$  est impossible, car correspondant à  $\tau_2$  négatif !

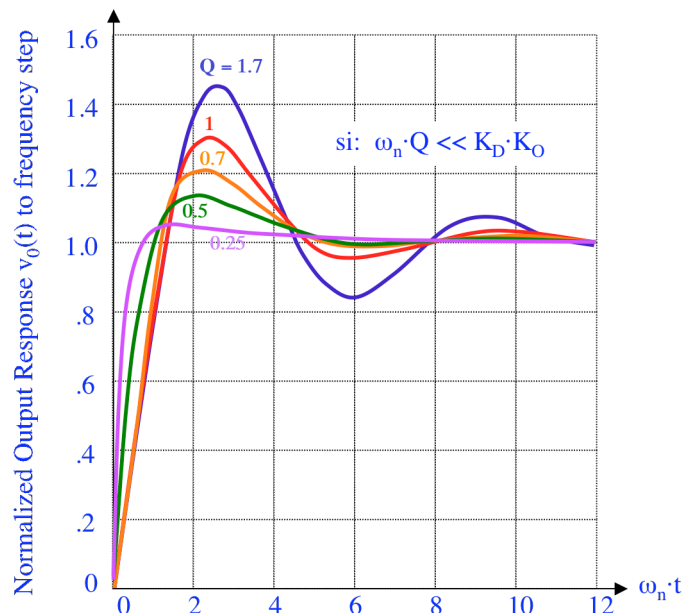
Toutes les PLLs du 2<sup>e</sup> ordre sont toujours stables, car les pôles de leur fonction de transfert ont une partie réelle toujours négative:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_n}{2 \cdot Q} \pm \frac{\omega_n}{2 \cdot Q} \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot Q^2}$$

La réponse en tension à un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée est:

$$V_0(t) = L^{-1} \left( \frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p} \right) = L^{-1} \left( \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot \left( p \cdot \left( \frac{1}{\omega_n \cdot Q} - \frac{1}{K_D \cdot K_O} \right) + 1 \right)}{P(p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2)} \right)$$

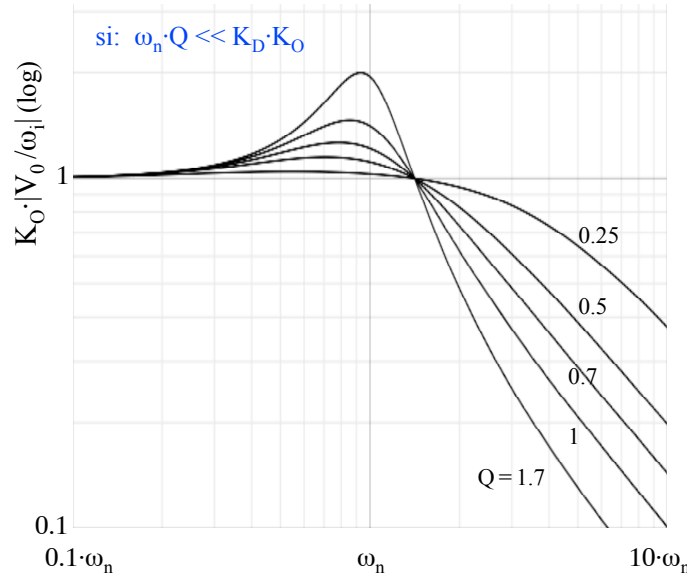
Avec  $\omega_n \cdot Q \ll K_D \cdot K_O$ , et normalisée à  $2\pi \cdot \Delta f / K_O = 1$ , cette fonction à l'allure suivante:



La réponse harmonique en tension à une modulation sinusoïdale de fréquence est:

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{(1 + j\omega \cdot (\frac{1}{\omega_n \cdot Q} - \frac{1}{K_O \cdot K_D}))}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$$

Avec  $\omega_n \cdot Q \ll K_D \cdot K_O$ , et normalisée à  $1/K_O = 1$ , cette fonction à l'allure suivante.



La fonction "d'erreur" de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre passif à un pôle et un zéro est:

$$\frac{\Delta\phi_e(p)}{\Delta\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p}{p + K_D \cdot \frac{\omega_1 \cdot (p + \omega_2)}{\omega_2 \cdot (p + \omega_1)} \cdot K_O} = \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot (\omega_1 + \frac{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}{\omega_2}) + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}$$

L'erreur de phase provoquée par un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot (\omega_1 + \frac{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}{\omega_2}) + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_D \cdot K_O}$$

Il y a donc une erreur statique de phase.

L'erreur de phase provoquée par une rampe de fréquence en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p \cdot (p + \omega_1)}{p^2 + p \cdot (\omega_1 + \frac{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}{\omega_2}) + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \infty$$

Cette PLL est incapable de rester verrouillée sur une rampe de fréquence, par exemple un signal soumis à l'effet Doppler, comme celui reçu d'un satellite non-géostationnaire.

Rappel: dans le cas très courant d'un détecteur de phase basé sur la multiplication ou le XOR, la plage de pulsation dans laquelle la PLL peut rester verrouillée, ou "Lock Range", vaut:

$$\pm \omega_{\text{lock}} = \pm \frac{\pi}{2} \cdot K_D \cdot K_O \quad \text{autour de } \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

**Conclusions sur la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à un pôle et un zéro:**

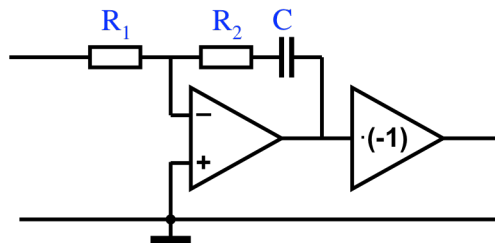
- la stabilité est toujours garantie;
- on peut dimensionner la boucle pour avoir le "Lock Range" désiré, une bande passante voulue, mais forcément inférieure à  $K_D \cdot K_O$ , et un amortissement correct;
- elle ne peut rester verrouillée sur une rampe de fréquence;
- elle possède une mémoire de fréquence en cas de disparition momentanée du signal d'entrée, mais celle-ci s'éloigne de sa valeur de référence avec une constante de temps  $\tau_1 = (R_1 + R_2) \cdot C$ .

Du fait de ces qualités, et de sa simplicité, ce type de filtre est très fréquemment utilisé.

Cette PLL du 2<sup>e</sup> ordre est souvent appelée de "type 1" car il y a 1 intégrale dans la boucle.

**1.3.3.3 PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre passe-bas actif à une intégrale et un zéro**

Le schéma d'un filtre passe-bas actif du 1<sup>er</sup> ordre avec une intégrale, c'est à dire un pôle à l'origine, et un zéro est le suivant:

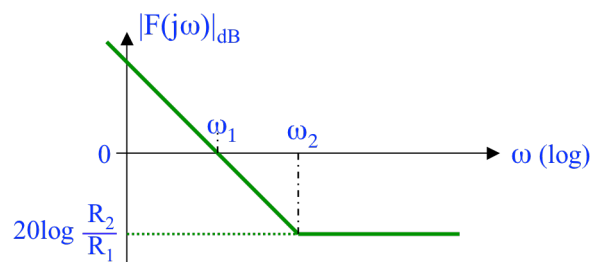


Sa fonction de transfert est:

$$F(p) = \frac{1 + p \cdot R_2 \cdot C}{p \cdot R_1 \cdot C} = \frac{1 + p \cdot \tau_2}{p \cdot \tau_1} = \frac{1 + p/\omega_2}{p/\omega_1} = \frac{\omega_1 \cdot (p + \omega_2)}{\omega_2 \cdot p}$$

avec:  $\tau_1 = R_1 \cdot C$  et  $\tau_2 = R_2 \cdot C$ , ou encore:  $\omega_1 = 1/R_1 \cdot C$  et  $\omega_2 = 1/R_2 \cdot C$

Sa réponse harmonique en amplitude est la suivante:



Le "gain" de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à un pôle et un zéro s'écrit:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{\frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1} \cdot K_D}{p + K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1} \cdot K_O} = \frac{\frac{K_D}{\tau_1} \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\tau_2 \cdot K_D \cdot K_O}{\tau_1} + \frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}}$$

Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme canonique:

$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \frac{1}{\omega_n \cdot Q} + 1)}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2}$$

avec: la pulsation propre  $\omega_n = \sqrt{K_D \cdot K_O} \cdot \omega_1 = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{\tau_1}} = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{R_1 \cdot C}}$

le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_2}{\omega_n} = \frac{1}{\omega_n \cdot \tau_2} = \frac{1}{\omega_n \cdot R_2 \cdot C}$

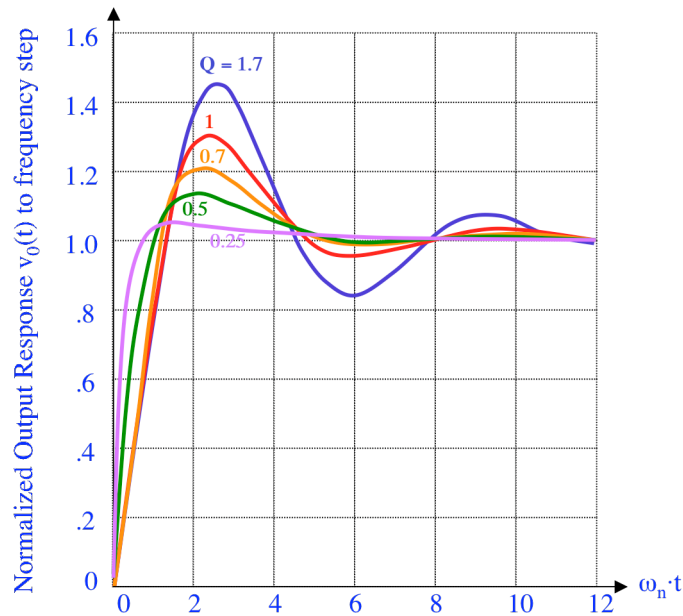
Toutes les PLLs du 2<sup>e</sup> ordre sont toujours stables, car les pôles de leur fonction de transfert ont une partie réelle toujours négative:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_n}{2 \cdot Q} \pm \frac{\omega_n}{2 \cdot Q} \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot Q^2}$$

La réponse en tension à un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée est:

$$V_0(t) = L^{-1} \left( \frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p} \right) = L^{-1} \left( \frac{2\pi \cdot \Delta f}{K_O} \cdot \frac{\omega_n^2 \cdot (p \cdot \frac{1}{\omega_n \cdot Q} + 1)}{p (p^2 + p \cdot \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2)} \right)$$

Normalisée à  $2\pi \cdot \Delta f / K_O = 1$ , cette fonction à l'allure suivante:

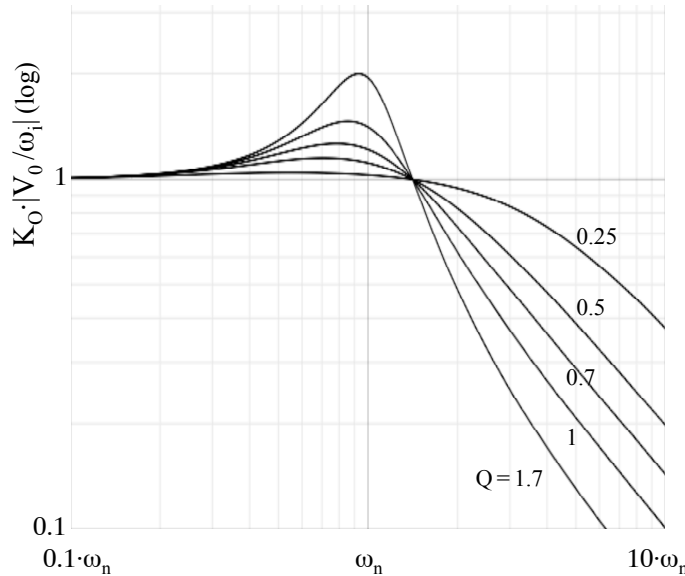


Cette réponse est identique à celle de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à un pôle et un zéro, mais sans la contrainte  $\omega_n \cdot Q \ll K_D \cdot K_O$

La réponse harmonique en tension à une modulation sinusoïdale de fréquence est:

$$\frac{V_0(j\omega)}{\omega_i(j\omega)} = \frac{1}{K_O} \cdot \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_n \cdot Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Normalisée à  $1/K_O = 1$ , cette fonction à l'allure suivante.



Cette réponse est identique à celle de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre passif à un pôle et un zéro, mais sans la contrainte  $\omega_n \cdot Q \ll K_D \cdot K_O$

La fonction "d'erreur" de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre actif à une intégrale et un zéro est:

$$\frac{\Delta\phi_e(p)}{\Delta\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p}{p + K_D \cdot \frac{\omega_1 \cdot (p + \omega_2)}{\omega_2 \cdot p} \cdot K_O} = \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}{\omega_2} + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}$$

L'erreur de phase provoquée par un saut de fréquence  $\Delta f$  en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta f}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}{\omega_2} + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = 0$$

Il y a donc une erreur statique de phase nulle.

L'erreur de phase provoquée par une rampe de fréquence en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p \cdot \frac{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}{\omega_2} + \omega_1 \cdot K_D \cdot K_O} = \frac{2\pi \cdot a}{\omega_1 \cdot K_D \cdot K_O}$$

Cette PLL est donc capable de rester verrouillée sur une rampe de fréquence, par exemple un signal soumis à l'effet Doppler, comme celui reçu d'un satellite non-géostationnaire.

Avec un filtre comportant une intégrale, l'erreur statique de phase est nulle, donc le domaine de verrouillage ou "Lock Range" n'est plus liée à la dynamique du détecteur de phase multipliée par  $K_D \cdot K_O$ , mais ne dépend que de la dynamique du VCO, ou de la dynamique de sortie du filtre actif (la plus restreinte des deux).

### Conclusions sur la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec filtre actif à une intégrale et un zéro:

- la stabilité est toujours garantie;
- on peut dimensionner la boucle pour avoir le "Lock Range" désiré, une bande passante voulue, sans limitation, et un amortissement correct;
- l'erreur de phase statique est nulle;
- elle peut rester verrouillée sur une rampe de fréquence;
- elle possède une mémoire de fréquence en cas de disparition momentanée du signal d'entrée.

Du fait de toutes ces qualités, et de la facilité de dimensionnement, ce type de filtre est très fréquemment utilisé.

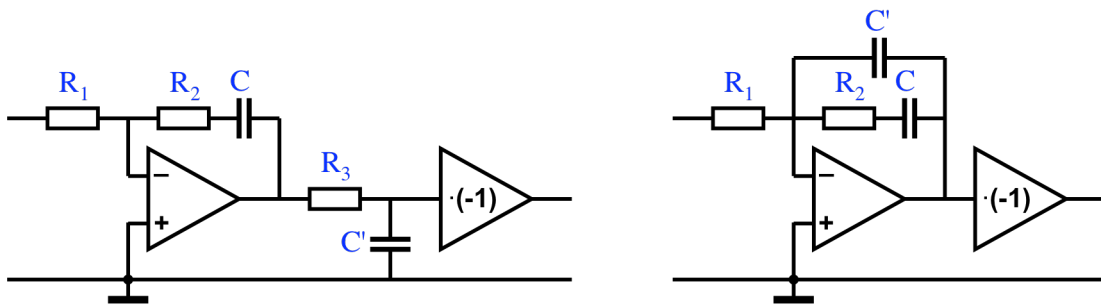
Cette PLL du 2<sup>e</sup> ordre est souvent appelée de "type 2" car il y a 2 intégrales dans la boucle, celle du filtre et celle, implicite, entre la phase et la fréquence du VCO.

### 1.3.4 Comportement dynamique de la PLL du 3<sup>e</sup> ordre

La PLL du 3<sup>e</sup> ordre correspond au cas où le filtre  $F(p)$  est de type passe-bas du 2<sup>e</sup> ordre. Le comportement de la boucle diffère selon la nature exacte de ce filtre.

#### 1.3.4.1 PLL du 3<sup>e</sup> ordre avec filtre passe-bas actif à une intégrale, un zéro et un pôle secondaire

Le filtre passe-bas du 2<sup>e</sup> ordre avec une intégrale (pôle à l'origine), un zéro et un second pôle, peut être réalisé avec l'un des schémas suivant:



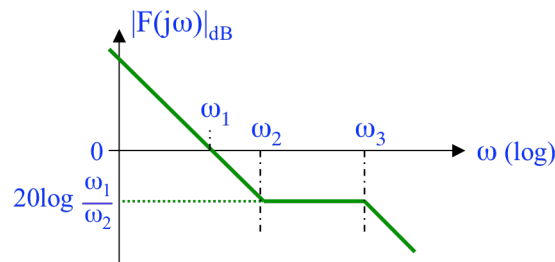
Sa fonction de transfert est:

$$F(p) = \frac{1 + p \cdot R_2 \cdot C}{p \cdot R_1 \cdot C \cdot (1 + p \cdot R_3 \cdot C')} = \frac{1 + p \cdot \tau_2}{p \cdot \tau_1 \cdot (1 + p \cdot \tau_3)} = \frac{1 + p/\omega_2}{p/\omega_1 \cdot (1 + p/\omega_3)} = \frac{\omega_1 \cdot \omega_3 \cdot (p + \omega_2)}{\omega_2 \cdot p \cdot (p + \omega_3)}$$

avec:  $\tau_1 = R_1 \cdot C$ ,  $\tau_2 = R_2 \cdot C$  et  $\tau_3 = R_3 \cdot C'$

ou encore:  $\omega_1 = 1/R_1 \cdot C$ ,  $\omega_2 = 1/R_2 \cdot C$  et  $\omega_3 = 1/R_3 \cdot C'$

Sa réponse harmonique en amplitude est la suivante:



Ce type de filtre est utilisé pour réduire, à l'entrée du VCO, l'amplitude des composantes parasites de fréquence  $f_{IN}$  ou  $2 \cdot f_{IN}$  générées par le détecteur de phase.

Le "gain" de la PLL du 3<sup>e</sup> ordre avec un filtre actif à une intégrale, un zéro et un pôle secondaire, s'écrit:

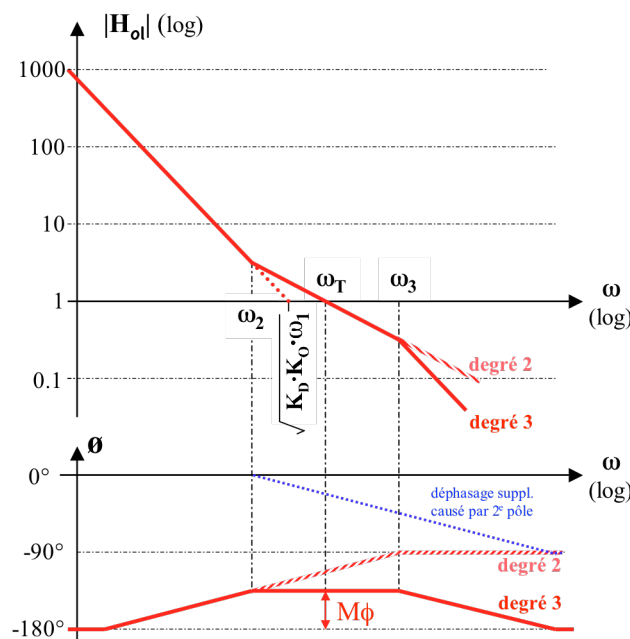
$$\frac{V_0(p)}{\omega_i(p)} = \frac{K_D \cdot F(p)}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{\frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 \cdot (p \cdot \tau_3 + 1)} \cdot K_D}{p + K_D \cdot \frac{p \cdot \tau_2 + 1}{p \cdot \tau_1 \cdot (p \cdot \tau_3 + 1)} \cdot K_O} = \frac{K_D \cdot (p \cdot \tau_2 + 1)}{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 + p^2 \cdot \tau_1 + p \cdot \tau_2 \cdot K_D \cdot K_O + K_D \cdot K_O}$$

L'analyse détaillée de cette fonction du 3<sup>e</sup> ordre est plus ardue que celle du 2<sup>e</sup> ordre. On peut néanmoins juger de la stabilité, de la bande passante et de la qualité de l'amortissement de cette PLL en étudiant son "gain de boucle ouverte" dans un diagramme de Bode.

Le "gain de boucle ouverte" de la PLL du 3<sup>e</sup> ordre avec un tel filtre s'écrit:

$$H_{ol}(p) = \frac{\phi_o(p)}{\phi_i(p)} \Big|_{ol} = \frac{K_D \cdot F(p) \cdot K_O}{p} = \frac{1 + \frac{p}{\omega_2}}{\frac{p^2}{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1} \cdot \left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)}$$

Dans le cas le plus courant où  $\omega_2 \leq \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}$ , et  $\omega_3 \leq 10 \cdot \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}$ , le diagramme de Bode de cette fonction de transfert est le suivant:



La bande passante est approximativement la même que celle de la PLL du 2<sup>e</sup> ordre avec un filtre du 1<sup>er</sup> degré, donc sans le pôle en  $\omega_3$ . Elle vaut:

$$\omega_T = \frac{K_D \cdot K_O \cdot \omega_1}{\omega_2}$$

La marge de phase est réduite à:

$$M_\phi \cong 45^\circ \cdot \log \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

Dans la pratique on fera en sorte que  $\omega_T$  corresponde au point d'inflexion de la phase, d'où :

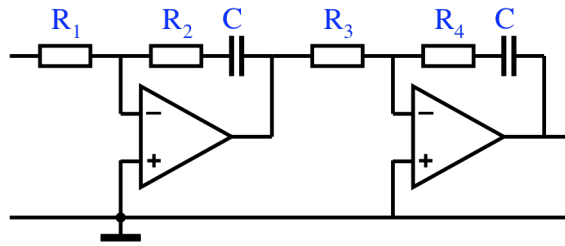
$$\omega_T \cong \sqrt{\omega_2 \cdot \omega_3}$$

Pour obtenir une bande passante  $\omega_T$  donnée, avec une marge de phase de 45°, cela donne:

$$\omega_1 = \frac{\omega_T^2}{\sqrt{10} \cdot K_D \cdot K_O} \cong \frac{\omega_T^2}{3 \cdot K_D \cdot K_O} \quad \omega_2 = \omega_T / \sqrt{10} \cong \omega_T / 3 \quad \text{et} \quad \omega_3 = \sqrt{10} \cdot \omega_T \cong 3 \cdot \omega_T$$

### 1.3.4.2 PLL du 3<sup>e</sup> ordre avec filtre passe-bas actif à deux intégrales et deux zéros

Le filtre passe-bas du 2<sup>e</sup> ordre théorique avec deux intégrales (pôle à l'origine) et deux zéros correspond au schéma suivant:



Sa fonction de transfert est:

$$F(p) = \frac{1+p \cdot R_2 \cdot C}{p \cdot R_1 \cdot C} \cdot \frac{1+p \cdot R_4 \cdot C}{p \cdot R_3 \cdot C} = \frac{1+p \cdot \tau_2}{p \cdot \tau_1} \cdot \frac{1+p \cdot \tau_4}{p \cdot \tau_3} = \frac{\omega_1 \cdot \omega_3 \cdot (p + \omega_2) \cdot (p + \omega_4)}{\omega_2 \cdot \omega_4 \cdot p^2}$$

avec:  $\tau_i = R_i \cdot C$  et  $\omega_i = 1/R_i \cdot C$

Avec ce filtre, la fonction "d'erreur" de phase est:

$$\frac{\phi_e(p)}{\phi_i(p)} = \frac{p}{p + K_D \cdot F(p) \cdot K_O} = \frac{p}{p + K_D \cdot \frac{1+p \cdot \tau_2}{p \cdot \tau_1} \cdot \frac{1+p \cdot \tau_4}{p \cdot \tau_3} \cdot K_O} = \frac{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3}{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 + p^2 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 \cdot K_D \cdot K_O + p \cdot (\tau_2 + \tau_4) \cdot K_D \cdot K_O + K_D \cdot K_O}$$

L'erreur de phase provoquée par une rampe de fréquence en entrée, une fois les transitoires amortis, tend vers:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \phi_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\pi \cdot a}{p^3} \cdot \frac{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3}{p^3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 + p^2 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 \cdot K_D \cdot K_O + p \cdot (\tau_2 + \tau_4) \cdot K_D \cdot K_O + K_D \cdot K_O} = 0$$

Cette PLL est donc capable de rester verrouillée sur une rampe de fréquence, par exemple un signal soumis à l'effet Doppler, comme celui reçu d'un satellite non-géostationnaire, et ceci sans erreur statique de phase.

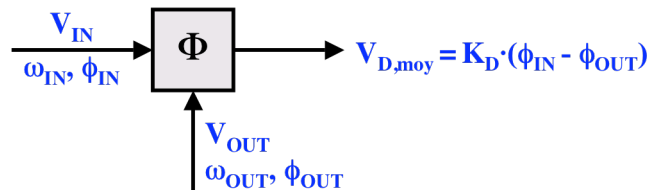
En plus, elle possède une mémoire de rampe de fréquence, ce qui lui évite de prendre un retard de fréquence en cas de disparition temporaire du signal d'entrée.

## 2. BLOCS FONCTIONNELS DE LA PLL

### 2.1 LES DETECTEURS DE PHASE

#### 2.1.1 Introduction

Le détecteur ou comparateur de phase doit fournir une tension moyenne proportionnelle à l'écart de phase existant entre le signal d'entrée  $V_{IN}$  de la PLL et celui de retour de boucle  $V_{OUT}$  issu du VCO ou d'un éventuel diviseur de fréquence.



Le comportement du détecteur de phase doit être soigneusement étudié en fonction des critères suivants:

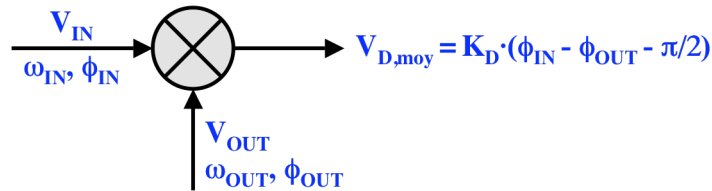
- ◆ Linéarité.
- ◆ Limite des écarts de phase admissibles.
- ◆ Comportement en présence de signaux de même fréquence, mais d'amplitude et/ou de forme variables.
- ◆ Comportement en présence de signaux de fréquence différente.
- ◆ Effet du bruit en entrée.

Les détecteurs de phase les plus répandus sont de trois types:

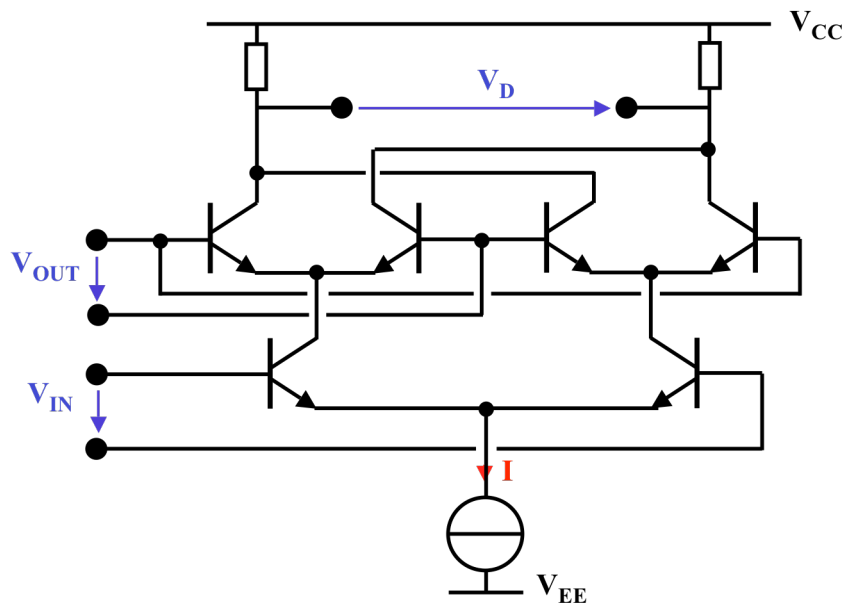
- ◆ Les détecteurs de phase basés sur la multiplication analogique, capables de fonctionner avec des signaux d'amplitude et de forme variables, et en présence de bruit.
- ◆ Les détecteurs de phase basés sur la fonction logique combinatoire XOR, capable de fonctionner uniquement avec des signaux logiques ayant un rapport cyclique proche de  $\frac{1}{2}$ , supportant un bruit binaire.
- ◆ Les détecteurs de phase et de fréquence basés sur une fonction logique séquentielle, capable de fonctionner uniquement avec des signaux logiques, sans contrainte sur leur rapport cyclique, mais ne supportant aucun bruit binaire.

### 2.2.2 Détecteur de phase analogique basé le multiplieur à cellule de Gilbert

Ce détecteur de phase analogique est en fait un multiplieur analogique à quatre quadrants dans sa version la plus simple, soit la cellule de Gilbert, aussi appelée "balanced mixer". Il est souvent représenté symboliquement par le schéma suivant:



Le schéma interne de la cellule de Gilbert est le suivant:



La caractéristique de ce circuit répond à l'équation:

$$V_D = -I \cdot R_C \cdot \left( \tanh \frac{V_{IN}}{2 \cdot U_T} \right) \cdot \left( \tanh \frac{V_{OUT}}{2 \cdot U_T} \right)$$

Le signal  $V_{OUT}$  provenant du VCO ou d'un diviseur de fréquence est toujours d'une amplitude suffisante pour faire travailler les paires différentielles du haut en "aiguilleurs" de courant "tout à gauche" ou "tout à droite". L'équation caractéristique du circuit se simplifie alors ainsi:

$$V_D = -I \cdot R_C \cdot \left( \tanh \frac{V_{IN}}{2 \cdot U_T} \right) \cdot (\text{signe}(V_{OUT}))$$

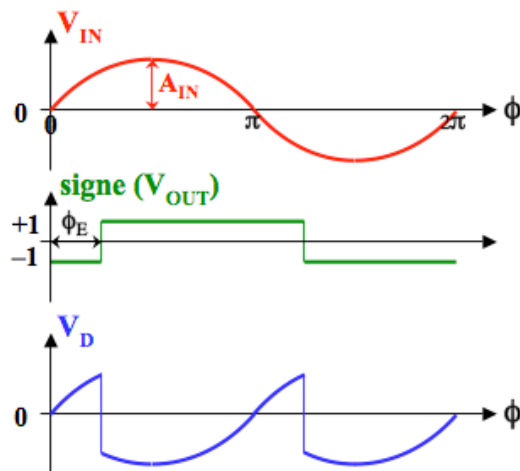
Si le signal d'entrée  $V_{IN}$  est inférieur à quelques dizaines de millivolts crête à crête, l'équation caractéristique du circuit peut être linéarisée ainsi:

$$V_D = -I \cdot R_C \cdot \frac{V_{IN}}{2 \cdot U_T} \cdot (\text{signe}(V_{OUT}))$$

Si le signal d'entrée  $V_{IN}$  est un petit sinus, de même fréquence que  $V_{OUT}$ , avec une avance de phase  $\phi_E$  sur ce dernier,  $v_D(t)$  s'exprime comme:

$$v_D(t) = -\frac{I \cdot R_C}{2 \cdot U_T} \cdot (A_{IN} \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot (\text{signe}(\sin(\omega \cdot t - \phi_E)))$$

Si le signal d'entrée  $V_{IN}$  est un "petit" sinus,  $v_D(t)$  a l'allure suivante:



Le signal  $v_D(t)$  est périodique de fréquence  $2 \cdot f_{IN}$ . La composante alternative sera atténuée par le filtre passe-bas de boucle.

La valeur moyenne de  $v_D(t)$  peut s'exprimer ainsi:

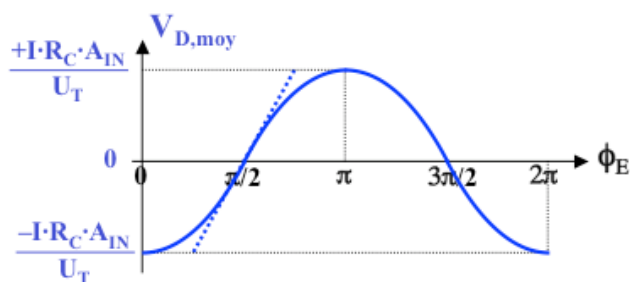
$$V_{D,moy} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} v_D(\phi) \cdot d\phi$$

$$V_{D,moy} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \left( \int_0^{\phi_E} -\frac{I \cdot R_C}{2 \cdot U_T} \cdot A_{IN} \cdot (\sin \phi) \cdot (-1) \cdot d\phi + \int_{\phi_E}^{\pi} -\frac{I \cdot R_C}{2 \cdot U_T} \cdot A_{IN} \cdot (\sin \phi) \cdot (+1) \cdot d\phi \right)$$

$$V_{D,moy} = \frac{I \cdot R_C \cdot A_{IN}}{\pi \cdot 2 \cdot U_T} \cdot (\cos(\phi_E) - \cos(0) - \cos(\pi) + \cos(\phi_E))$$

$$V_{D,moy} = \frac{I \cdot R_C \cdot A_{IN}}{\pi \cdot U_T} \cdot \cos(\phi_E)$$

La caractéristique n'est pas linéaire comme le montre la figure suivante:



Autour de  $\pi/2$  on peut considérer que le détecteur de phase est linéaire avec:

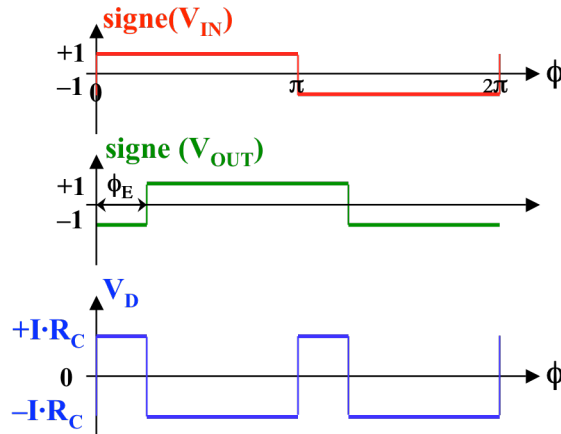
$$K_D = \frac{I \cdot R_C \cdot A_{IN}}{\pi \cdot U_T}$$

On voit que pour des signaux d'entrée de faible amplitude, celle-ci influence  $K_D$ , et donc les caractéristiques de la PLL.

Si le signal d'entrée  $V_{IN}$  dépasse 200 mV crête à crête, toujours avec la même fréquence que  $V_{OUT}$ , et une avance de phase  $\phi_E$  sur ce dernier,  $v_D(t)$  peut alors s'exprimer comme:

$$v_D(t) = -I \cdot R_C \cdot (\text{signe}(\sin(\omega \cdot t))) \cdot (\text{signe}(\sin(\omega \cdot t - \phi_E)))$$

Si le signal d'entrée  $V_{IN}$  est assez "grand" ( $> 200 \text{ mV}_{p-p}$ ),  $v_D(t)$  a l'allure suivante:



Le signal  $v_D(t)$  est périodique de fréquence  $2 \cdot f_{IN}$ . La composante alternative sera atténuée par le filtre passe-bas de boucle.

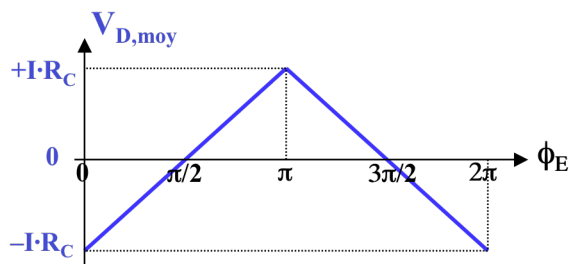
La valeur moyenne de  $v_D(t)$  peut s'exprimer ainsi:

$$V_{D,moy} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} v_D(\phi) \cdot d\phi$$

$$V_{D,moy} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \left( \int_0^{\phi_E} -I \cdot R_C \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot d\phi + \int_{\phi_E}^{\pi} -I \cdot R_C \cdot (+1) \cdot (+1) \cdot d\phi \right)$$

$$V_{D,moy} = \frac{I \cdot R_C}{\pi} \cdot (\phi_E - 0 - \pi + \phi_E) = \frac{I \cdot R_C}{\pi} \cdot (2 \cdot \phi_E - \pi) = \frac{2 \cdot I \cdot R_C}{\pi} \cdot \left( \phi_E - \frac{\pi}{2} \right)$$

La caractéristique est alors linéaire comme le montre la figure suivante:



Le "gain" du détecteur de phase est:

$$K_D = \frac{2 \cdot I \cdot R_C}{\pi}$$

On voit que pour des signaux d'entrée de forte amplitude,  $K_D$  est constant, donc les caractéristiques de la PLL aussi.

### Remarques

Dans tous les cas, lorsque la boucle de phase est verrouillée sur sa fréquence centrale, les deux signaux d'entrée et de réaction sont en quadrature (déphasés de  $\pi/2$ ).

Lorsque les fréquences d'entrée  $f_{IN}$  et de réaction  $f_{OUT}$  sont différentes, et donc que la boucle n'est pas verrouillée, on a, suivant que  $V_{IN}$  est "petite" ou "grande":

$$v_D(t) = -\frac{I \cdot R_C}{2 \cdot U_T} \cdot (A_{IN} \cdot \sin(\omega_{IN} \cdot t)) \cdot (\text{signe}(\sin(\omega_{OUT} \cdot t))) \quad \text{pour } V_{IN} \text{ "petite"}$$

$$v_D(t) = -I \cdot R_C \cdot (\text{signe}(\sin(\omega_{IN} \cdot t))) \cdot (\text{signe}(\sin(\omega_{OUT} \cdot t))) \quad \text{pour } V_{IN} \text{ "grande"}$$

Un signal carré peut se décomposer ainsi:

$$\text{signe}(\sin(\omega \cdot t)) = \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t) + \dots \right)$$

Le produit de deux sinus peut s'exprimer ainsi:

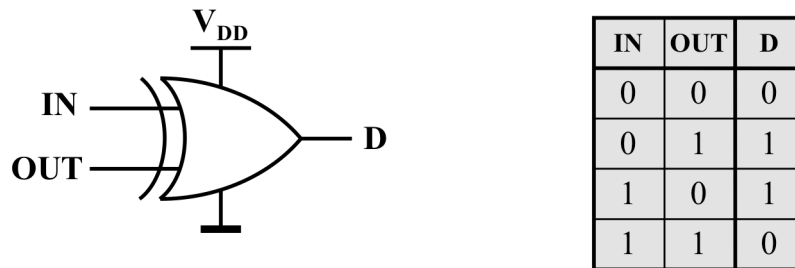
$$(\sin(\omega_1 \cdot t)) \cdot (\sin(\omega_2 \cdot t)) = \frac{1}{2} \cdot (\cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) - \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t))$$

Le signal  $v_D(t)$  sera donc une somme de termes en  $\cos((m \cdot \omega_{IN} \pm m \cdot \omega_{OUT}) \cdot t)$ , où  $m$  et  $n$  sont entiers.

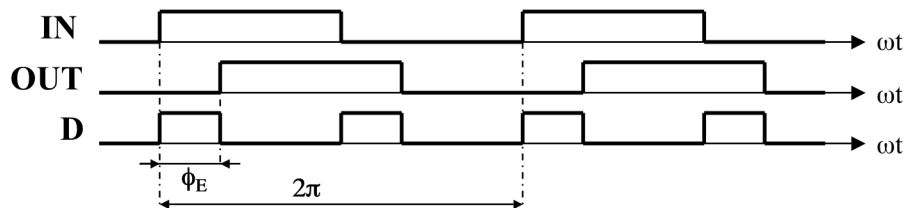
Dans tous les cas  $V_{D,moy} = 0$ , et  $v_D(t)$  comprendra une composante alternative, ou battement, à basse fréquence  $|f_{IN} - f_{OUT}|$ , qui, si l'écart de fréquence est suffisamment faible, sera transmise par le filtre et permettra l'accrochage de la boucle.

### 2.2.3 Détecteur de phase numérique basé sur la fonction logique "OU Exclusif"

Ce détecteur de phase est en fait une simple porte logique XOR, comme représentée dans le schéma ci-dessous, avec sa table de vérité:



Lorsque la PLL est verrouillée, et que donc que  $f_{IN} = f_{OUT}$ , les signaux logiques ont l'allure suivante:

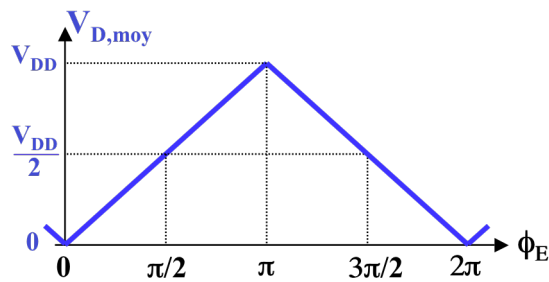


Le signal  $v_D(t) = D \cdot V_{DD}$  est périodique de fréquence  $2 \cdot f_{IN}$ . La composante alternative sera atténuée par le filtre passe-bas de boucle.

La valeur moyenne de  $v_D(t)$  peut s'exprimer ainsi:

$$V_{D,moy} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v_D(t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \cdot (V_{DD} \cdot \phi_E + 0 \cdot (2\pi - \phi_E)) = \frac{V_{DD}}{\pi} \cdot \phi_E$$

La caractéristique est alors linéaire comme le montre la figure suivante:



Le "gain" du détecteur de phase est:

$$K_D = \frac{V_{DD}}{\pi}$$

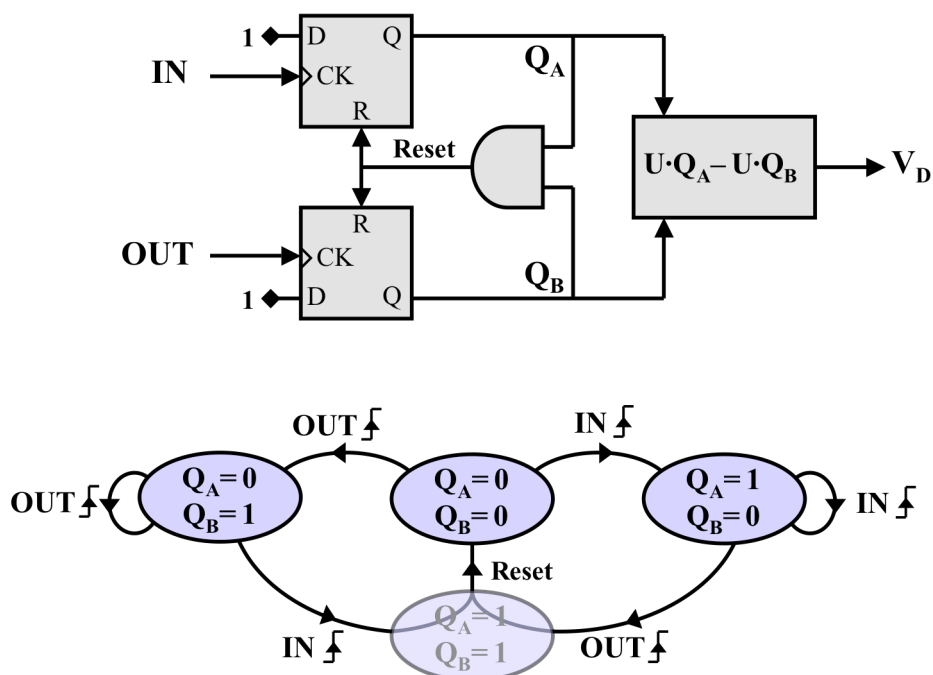
Cette analyse n'est juste que si les signaux dont on veut comparer la phase ont un rapport cyclique d'exactly  $1/2$ . Si ce n'est pas le cas, ce comparateur de phase présente les inconvénients suivants:

- ♦ sa dynamique se réduit d'autant que le rapport cyclique diffère de  $1/2$ ;
- ♦ il permet un verrouillage de la PLL sur des multiples entiers ou des fractions entières des certaines fréquences normales de verrouillage, c'est à dire celles qui sont dans la "Lock Range".

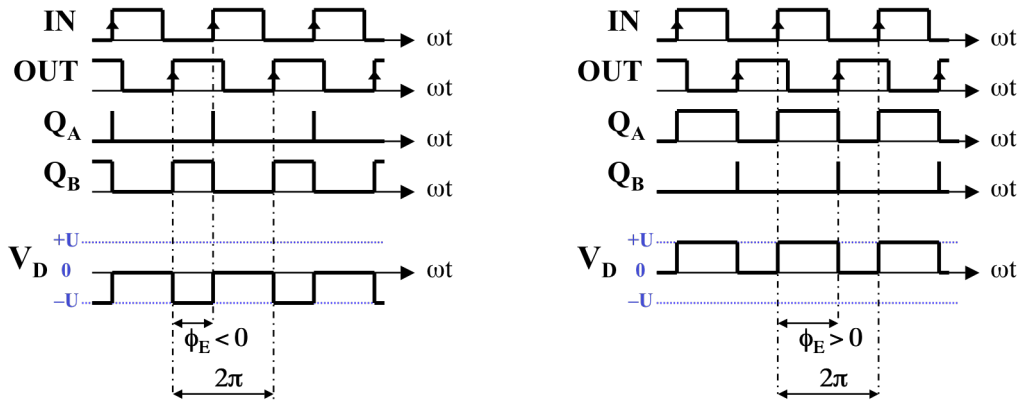
Lorsque les fréquences d'entrée  $f_{IN}$  et de réaction  $f_{OUT}$  sont différentes, et donc que la boucle de phase n'est pas verrouillée, on a à la sortie du XOR un signal rectangulaire de valeur moyenne égale à  $V_{DD}/2$ , et présentant un battement à  $|f_{IN} - f_{OUT}|$ , qui, si l'écart de fréquence est suffisamment faible, sera transmise par le filtre et permettra l'accrochage de la boucle.

### 2.2.4 Détecteur de phase-fréquence numérique basé sur une logique séquentielle

Ce détecteur est un système logique séquentiel dont le schéma et le diagramme d'état sont les suivants:



Lorsque la PLL est verrouillée, et que donc que  $f_{IN} = f_{OUT}$ , les signaux logiques ainsi que  $V_D$  ont l'allure suivante:

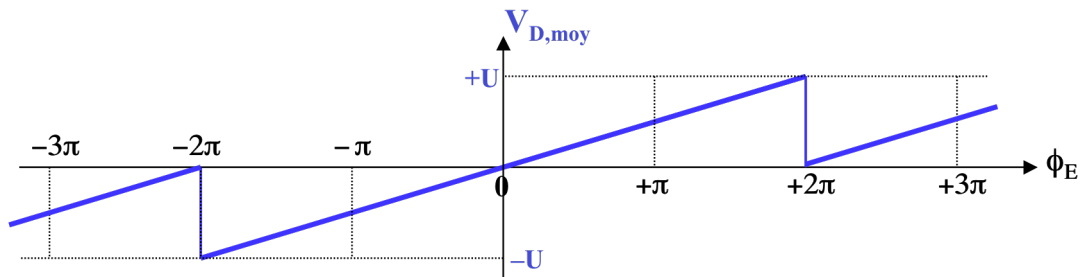


Le signal  $V_D$  est périodique de fréquence  $f_{IN}$ . La composante alternative sera atténuée par le filtre passe-bas de boucle.

La valeur moyenne de  $v_D(t)$  peut s'exprimer ainsi:

$$V_{D,moy} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v_D(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot U \cdot \phi_E$$

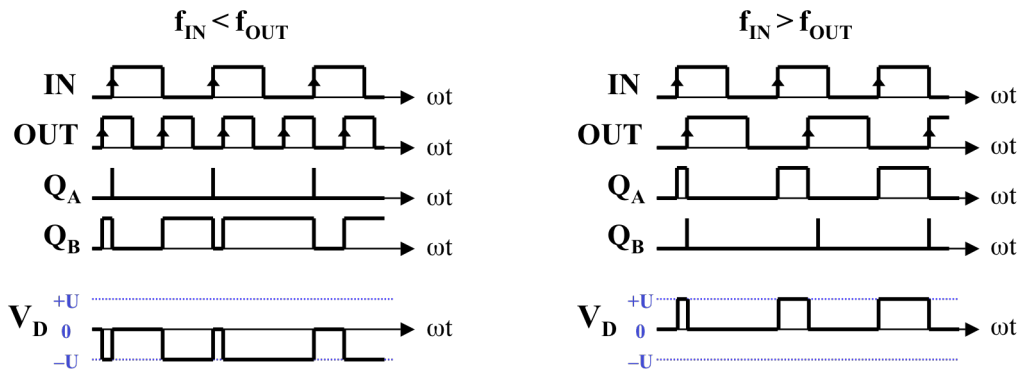
La caractéristique est alors linéaire comme le montre la figure suivante:



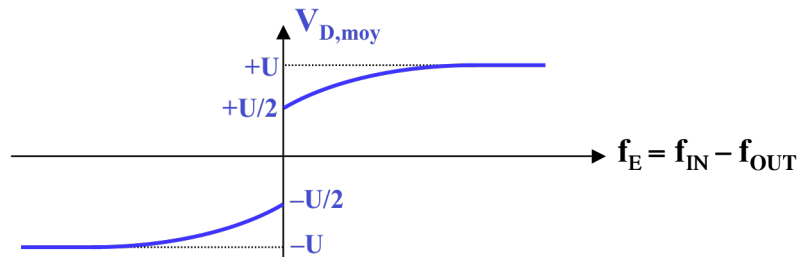
Le "gain" du détecteur de phase est:

$$K_D = \frac{2 \cdot U}{4 \cdot \pi}$$

Lorsque les fréquences d'entrée  $f_{IN}$  et de réaction  $f_{OUT}$  sont différentes, et donc que la boucle de phase n'est pas verrouillée, on a les signaux suivants:



On peut montrer que la caractéristique  $V_{D,moy}$  en fonction de la différence des fréquences est la suivante:



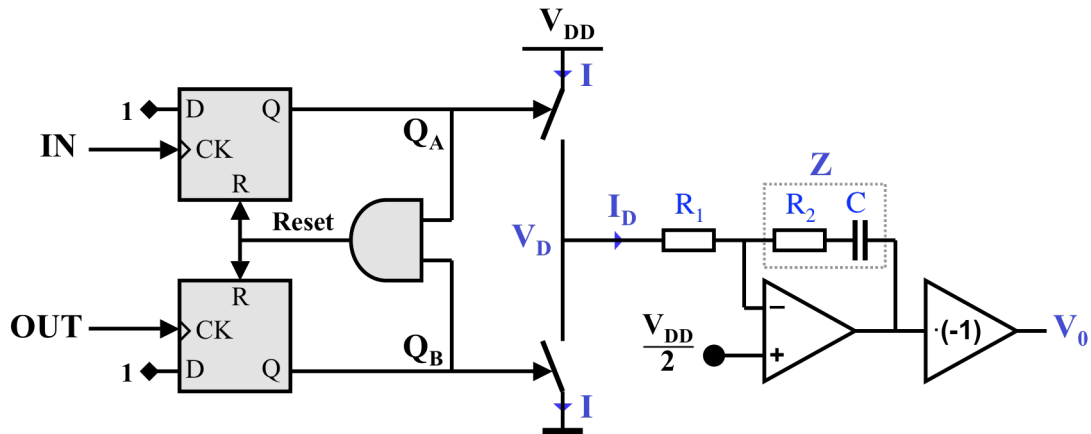
Ce détecteur de phase-fréquence présente les avantages suivants:

- ♦ il est insensible au rapport cyclique des signaux;
- ♦ il présente une large gamme de détection de phase, allant de  $-2\pi$  à  $+2\pi$ ;
- ♦ il fonctionne en détecteur de fréquence en dehors de la gamme de synchronisme, ce qui facilite la capture.

Ce détecteur de phase-fréquence présente néanmoins les inconvénients suivants:

- ♦ il ne fonctionne qu'avec des signaux logiques;
- ♦ il est très sensible aux impulsions manquantes;
- ♦ il est très sensible à toute impulsion parasite (bruit logique).

L'étage de sortie, représenté par le rectangle  $V_D = U \cdot Q_A - U \cdot Q_B$  dans le schéma de principe, est souvent réalisé simplement avec deux switches. Ce détecteur de phase fréquence étant le plus souvent associé à un filtre intégrateur selon le schéma suivant:



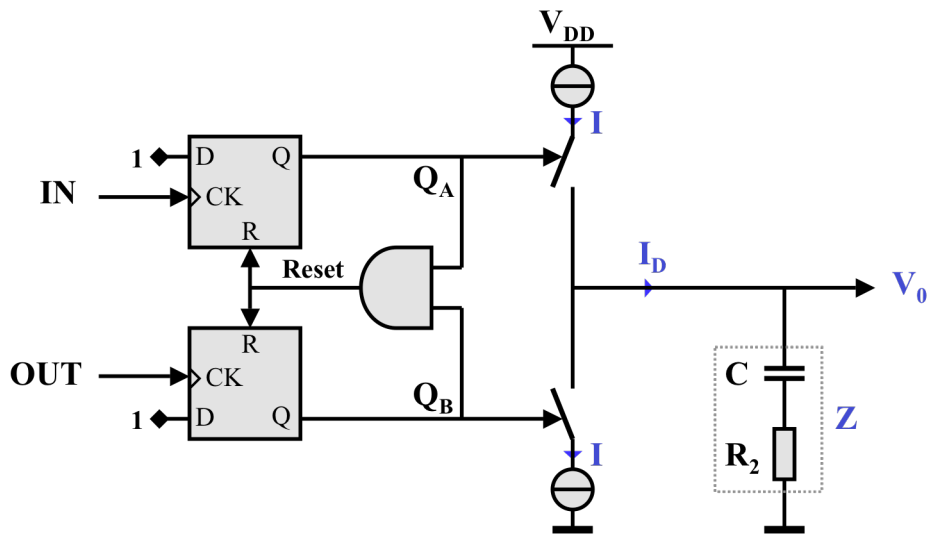
Le courant moyen de sortie est donné par:

$$I_{D,moy} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V_{DD}}{2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \phi_E$$

La fonction de transfert détecteur + filtre est alors:

$$K_D \cdot F(p) = \frac{V_0(p)}{\phi_E(p)} = \frac{I_D(p)}{\phi_E(p)} \cdot Z(p) = \frac{V_{DD}}{4 \cdot \pi \cdot R_1} \cdot \left( R_2 + \frac{1}{p \cdot C} \right) = \frac{V_{DD}}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1 + p \cdot C \cdot R_2}{p \cdot C \cdot R_1}$$

L'étage de sortie intègre parfois deux sources de courant I. Cette structure dite "pompe de charge" ("Charge Pump"), permet de réaliser une fonction de transfert comportant une intégrale avec un filtre ne comportant que des éléments passifs, selon le schéma suivant:



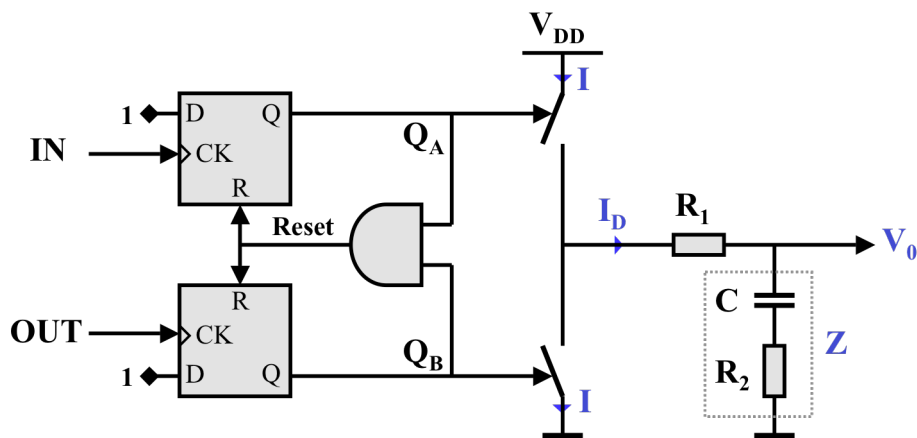
Le courant moyen de sortie est donné par:

$$I_{D,\text{moy}} = \frac{1}{2\pi} \cdot I \cdot \phi_E$$

La fonction de transfert détecteur + filtre est alors:

$$K_D \cdot F(p) = \frac{V_0(p)}{\phi_E(p)} = \frac{I_D(p)}{\phi_E(p)} \cdot Z(p) = \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot \left( R_2 + \frac{1}{p \cdot C} \right) = \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1 + p \cdot C \cdot R_2}{p \cdot C}$$

On rencontre souvent une version simplifiée de la structure "pompe de charge", ne comportant pas de sources de courant, qui, associée à un filtre passif, permet de réaliser une fonction de transfert comportant une pseudo-intégrale. Le schéma est le suivant:



Tant que la tension aux bornes de la capacité est voisine de  $V_{DD}/2$ , le courant moyen de sortie est donné approximativement par:

$$I_{D,\text{moy}} \cong \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V_{DD}}{2} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot \phi_E$$

On a bien un circuit qui ressemble à un intégrateur, dans le sens que  $V_0$  reste constant lorsque les deux switches sont ouverts. La fonction de transfert détecteur + filtre est alors:

$$K_D \cdot F(p) = \frac{V_0(p)}{\phi_E(p)} = \frac{I_D(p)}{\phi_E(p)} \cdot Z(p) = \frac{V_{DD}}{4 \cdot \pi \cdot R_1} \cdot \left( R_2 + \frac{1}{p \cdot C} \right) = \frac{V_{DD}}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1 + p \cdot C \cdot R_2}{p \cdot C \cdot (R_1 + R_2)}$$

Par contre, lorsque le point de fonctionnement s'écarte de  $V_{DD}/2$ , le courant  $I_{D,moy}$  diminue, ce qui est équivalent à une diminution de  $K_D$ .

## 2.2 LES VCOS

L'étude des principaux circuits permettant de réaliser cette fonction fait l'objet d'un chapitre à part, intitulé:

### **Oscillateurs et oscillateurs contrôlés en tension Voltage-Controlled Oscillators (VCOs)**