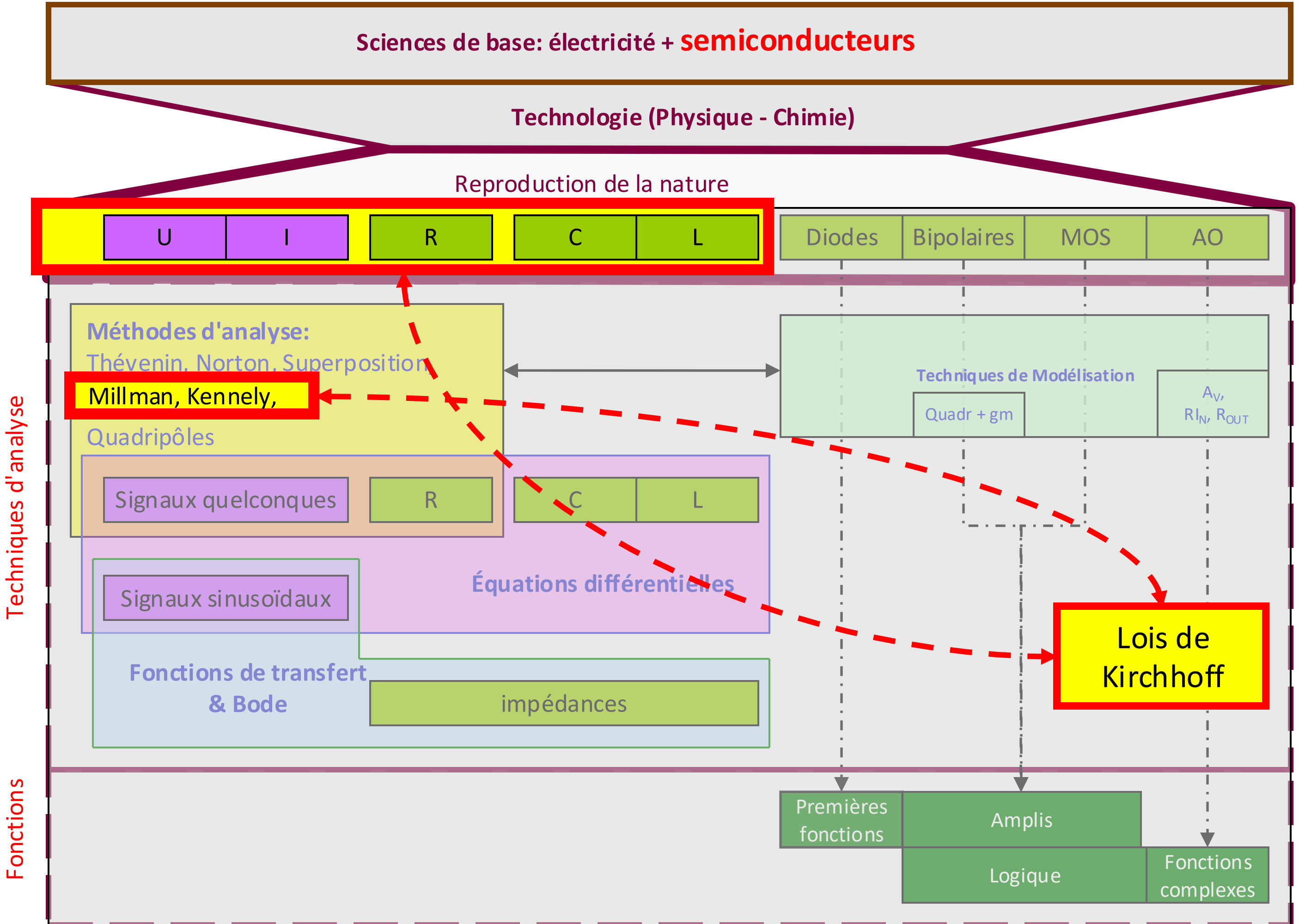
Relations entre les différentes notions



Circuits à composants passifs linéaires R, C, L

Composants : Les lois fondamentales pour **R**, **C** et **L**

Circuits : Énoncé des lois de **Kirchhoff** (loi des **mailles** et loi des **nœuds**)

Exploitation des lois de **Kirchhoff** pour :

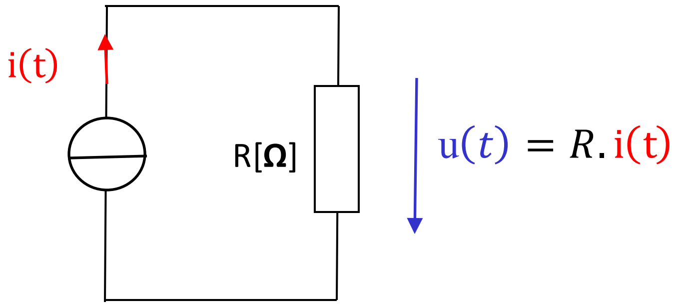
- Démontrer des techniques de **réduction** du nombre de composants (composants équivalents)
- Démontrer des théorèmes complémentaires (**Millman**, **Kennely**)
- Analyser nos premiers circuits

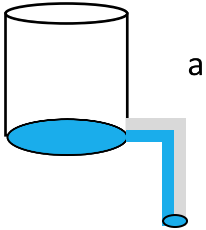
Rappel : Composants de base (La résistance)

Montages caractéristiques de base

Si la source de courant est continue
(valeur constante)

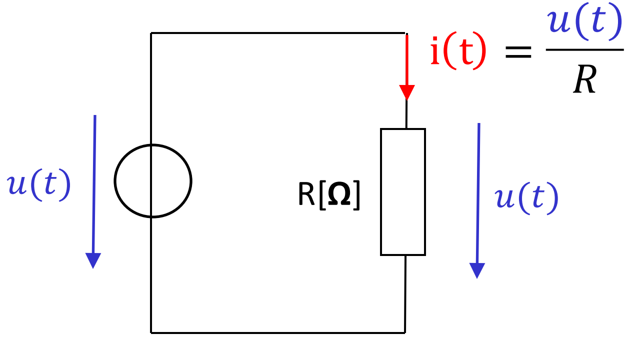
$$\boldsymbol{U = R.I}$$





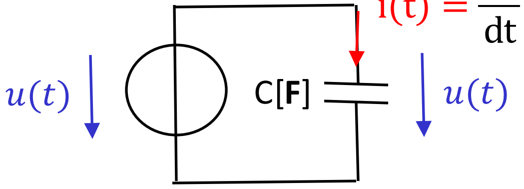
Si la source de tension est continue
(valeur constante)

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{\frac{U}{R}}$$



Rappel : Composants de base (Le condensateur)

Le condensateur (appelé abusivement Capacité)

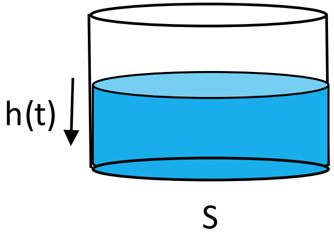


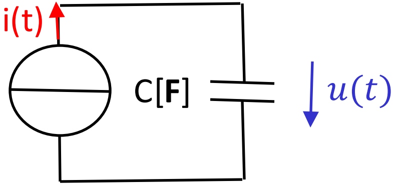
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{C.du}{dt}$$

$q(t) = C.u(t)$

analogie avec masse d'eau

$M(t) = S.h(t)$





$$\frac{i(t).dt}{C} = du$$

supposons $i(t) = I = constante$

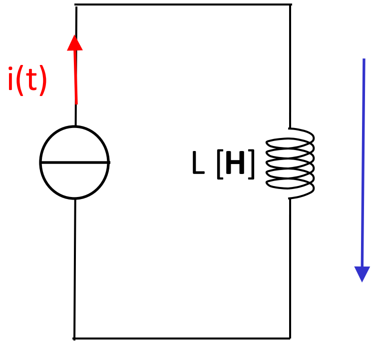
$$\int \frac{I.dt}{C} = \int du = \frac{I.t}{C} + k = u(t)$$

Allure: équation d'une droite

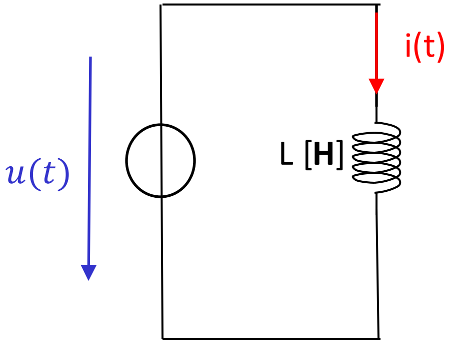
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{I.dt}{C} = \int_{u(t_0)}^{u(t_1)} du = \frac{I.(t_1 - t_0)}{C} = u(t_1) - u(t_0)$$

Parcours

Rappel : Composants de base (L'inductance)



$$u(t) = \frac{L\,di}{dt}$$



$$\frac{u(t).\,dt}{L} = di$$

supposons $u(t) = U = constante$

$$\boxed{\int \frac{U.\,dt}{L} = \int di = \frac{U.\,t}{L} + k = i(t)}$$

Allure: équation d'une droite

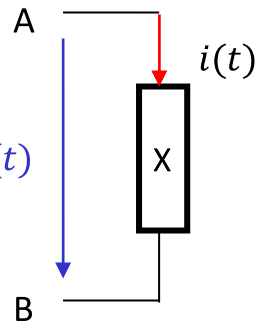
$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} \frac{U.\,dt}{L} = \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} di = \frac{U.\,(t_1 - t_0)}{L} = i(t_1) - i(t_0)}$$

Parcours

Analogie plus subtile entre énergie magnétique $\frac{1}{2}\boldsymbol{L}.\,I^2$ et énergie cinétique $\frac{1}{2}\boldsymbol{m}.\,v^2$

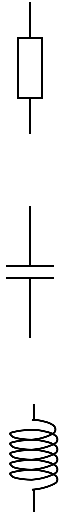
Les composants passifs
Lois fondamentales

Composant passif quelconque



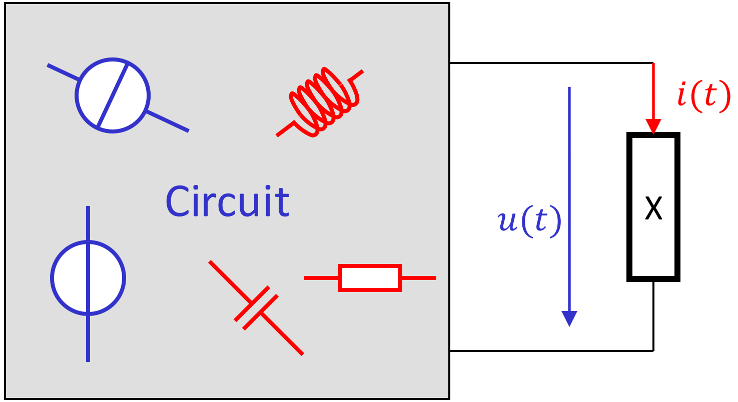
$$u(t) = u_A(t) - u_B(t)$$

Composants R, L, C



	$u(t) = f_1(i(t))$	$i(t) = f_2(u(t))$
R	$R.i(t)$	$\dfrac{u(t)}{R}$
C	$\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t).dt + k$	$C\dfrac{du}{dt}$
L	$L\dfrac{di}{dt}$	$\dfrac{1}{L}\displaystyle\int u(t).dt + k$

Assemblage de composants
Analyse de circuits



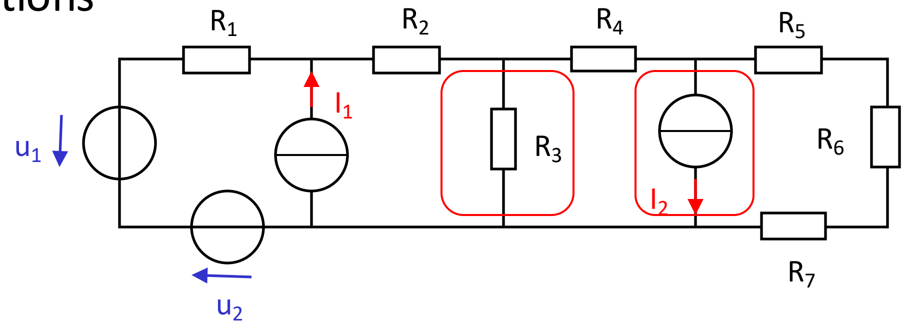
$$i(t) = F_2(X, composant_1, \dots \dots composant_n, source_1, \dots source_m)$$

$$u(t) = F_1(X, composant_1, \dots \dots composant_n, source_1, \dots source_m)$$

Première série de méthodes: les lois de Kirchhoff

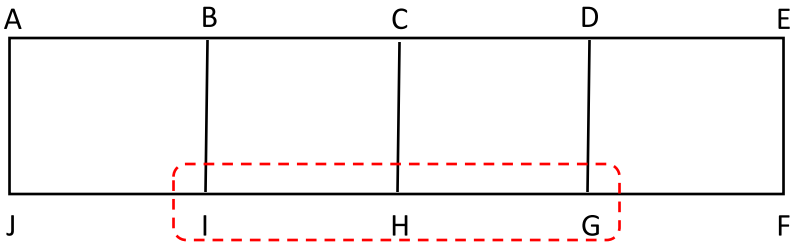
Lois de Kirchhoff

Définitions



Un circuit est composé de segments :

- Ils portent des composants
- Se connectent entre eux



On nomme les extrémités des segments :

- Les nœuds.

On observe un réseau où l'on identifie :

Des nœuds : Connexion entre deux segments au moins. Exemple : A (2 segments) et B (3 segments)

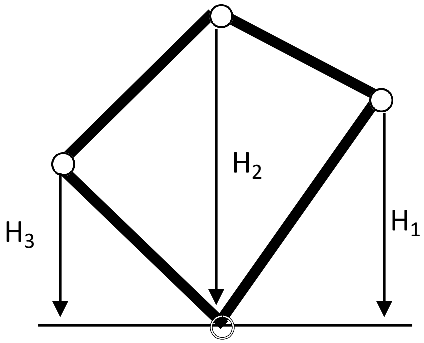
Des branches : Succession de segments connectés deux par deux. Exemple : ABCD

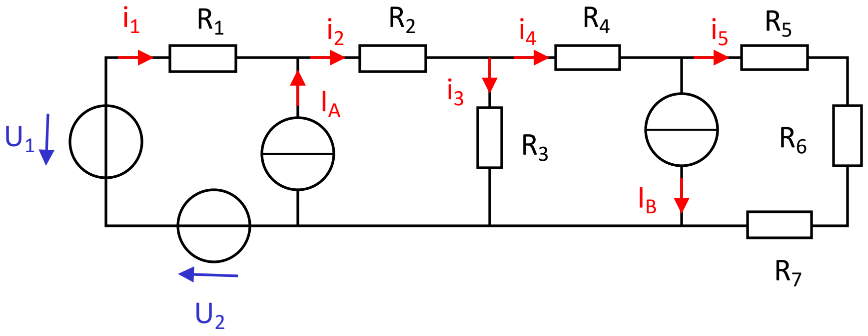
Des mailles : Parcours fermé, constitué de branches, ne passant qu'une seule fois par un nœud donné

Lois de Kirchhoff : Loi des mailles

Loi des mailles

Dans un cycle $\sum U_i = 0$





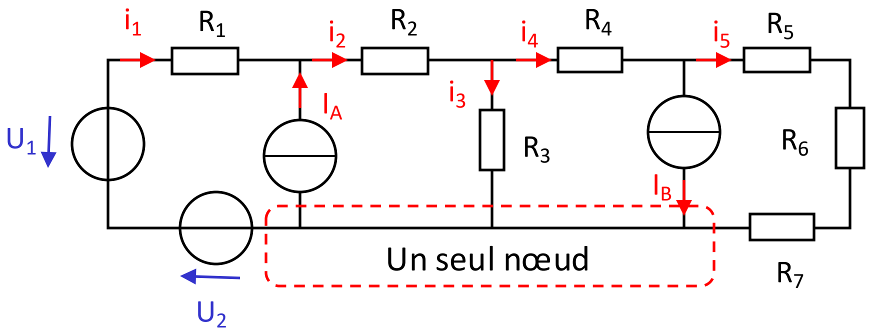
Objectif : on veut calculer toutes les tensions ou tous les courants du circuit
Attention: Pour être calculable, une maille ne doit pas inclure de sources de courant
Conséquence: Trois mailles possibles, mais uniquement deux mailles indépendantes

Description des mailles (se rappeler des conventions)

- ✓ $R_1.i_1 + R_2.i_2 + R_3.i_3 + U_2 - U_1 = 0$
- ✓ $R_4.i_4 + R_5.i_5 + R_6.i_5 + R_7.i_5 - R_3.i_3 = 0$
- ✓ $R_1.i_1 + R_2.i_2 + R_4.i_4 + R_5.i_5 + R_6.i_5 + R_7.i_5 + U_2 - U_1 = 0$ (pas indépendante)

Lois de Kirchhoff : Loi des nœuds

Lois des nœuds



Dans un nœud:

$\Sigma\, I_{sortants} - \Sigma\, I_{entrants} = 0$

ou encore $\Sigma\, I_{sortants} = \Sigma\, I_{entrants}$

Rien ne se perd, rien ne se crée

Attention: Pour être calculable, un nœud ne doit pas être relié à une source de tension

Un nœud intéressant doit regrouper au minimum trois courants

Exemples:

- ✓ $i_1 + I_A - i_2 = 0$
- ✓ $i_2 - i_3 - i_4 = 0$
- ✓ $i_4 - I_B - i_5 = 0$
- ✓ $i_5 + I_B + i_3 - I_A - i_1 = 0$ (pas indépendante)

Poser l'ensemble des équations indépendantes satisfaisant la loi des mailles et la loi des nœuds: Calcul matriciel

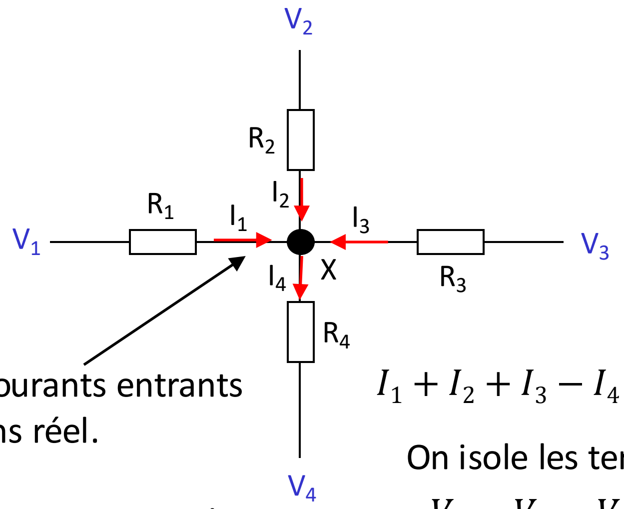
CONSTAT:

- Avec un ordinateur: calcul rapide
- A la main: rapidement très long
- Au moins on comprend à quoi cela sert

Techniques de simplification

Théorème de Millman [1]

Théorème de Millman est issu des lois de Kirchhoff. Il permet de calculer une tension d'un nœud quelconque en fonction de son voisinage



$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Arbitrairement, on dessine des courants entrants et sortants sans se soucier du sens réel.

Physiquement cela semble être une erreur, mais algébriquement des courants peuvent être négatifs ou positifs. S'ils sont négatifs c'est qu'en réalité ils allaient dans l'autre sens

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 = \frac{V_1 - V_X}{R_1} + \frac{V_2 - V_X}{R_2} + \frac{V_3 - V_X}{R_3} - \frac{V_X - V_4}{R_4}$$

On isole les termes en V_X

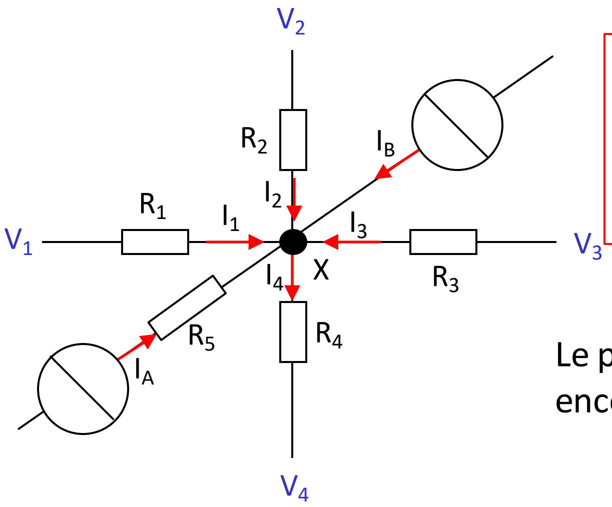
$$\frac{V_X}{R_1} + \frac{V_X}{R_2} + \frac{V_X}{R_3} + \frac{V_X}{R_4} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}$$

Il ne reste plus qu'à factoriser et isoler V_X pour retrouver la formule proposée

Techniques de simplification

Théorème de Millman [2]

Le théorème de Millman est exploitable aussi avec la présence de sources de courants.



$$\boxed{V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4} + I_A + I_B}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}}$$

Le principe pour poser l'équation, repose encore sur la loi des nœuds de Kirchhoff.

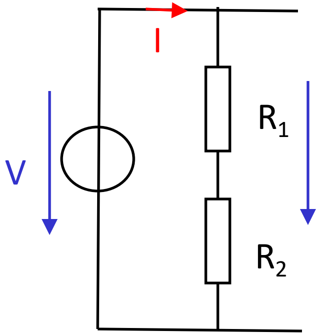
$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_A + I_B = 0 = \frac{V_1 - V_X}{R_1} + \frac{V_2 - V_X}{R_2} + \frac{V_3 - V_X}{R_3} - \frac{V_X - V_4}{R_4} + I_A + I_B$$

Suite identique à la diapositive précédente

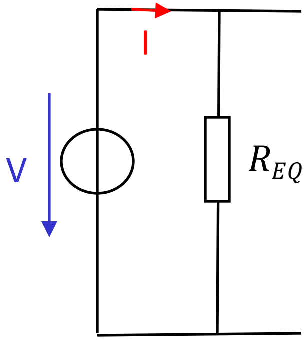
Remarque : Si une tension $V_i = 0$? Il faut tenir compte de $1/R_i$ au dénominateur

Simplifications intermédiaires (Résistances)

Les résistances en série



$V = R_1.I + R_2.I$

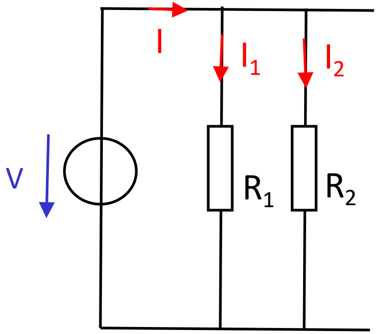


R_{EQ} $V = R_{EQ}.I$

$V = R_1.I + R_2.I = R_{EQ}.I \Rightarrow R_{EQ} = R_1 + R_2$

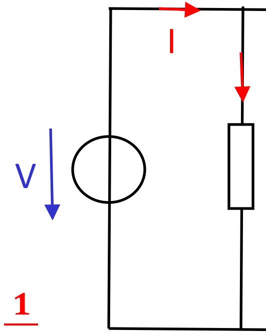
Les résistances en parallèle

$I = I_1 + I_2$



$I_1 = \frac{V}{R_1}$ et $I_2 = \frac{V}{R_2}$

$I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$



$I = \frac{V}{R_{EQ}}$

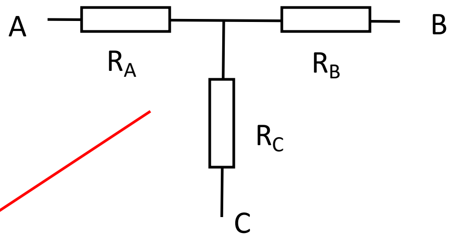
R_{EQ}

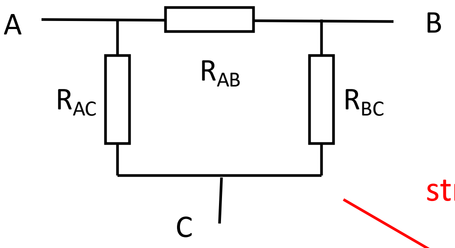
$$I = \frac{V}{R_{EQ}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Simplifications intermédiaires (Résistances)

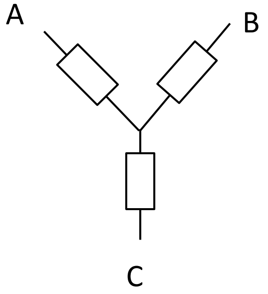
Théorème de Kennely

Théorème de Kennely utile pour des transformations de structures en étoile vers triangle et réciproquement





structure en étoile



$$R_A = \frac{R_{AB}.R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

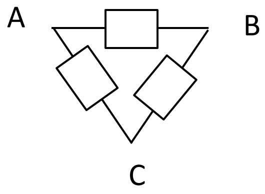
$$R_C = \frac{R_{AC}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_A}$$

$$R_{AB} = \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_B}$$

structure en triangle

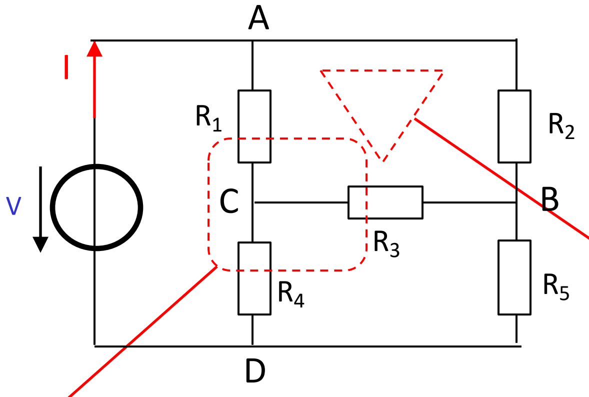


Méthode de démonstration :

1. Déconnecter une borne
2. Regarder la résistance entre les deux autres bornes

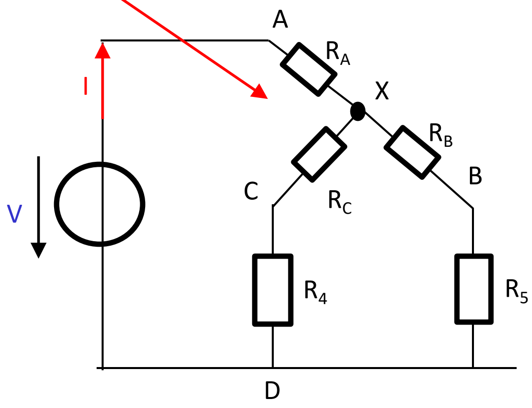
Justification avec un exemple, de la transformation étoile – triangle ou triangle - étoile

Imaginons qu'on veuille calculer le courant I

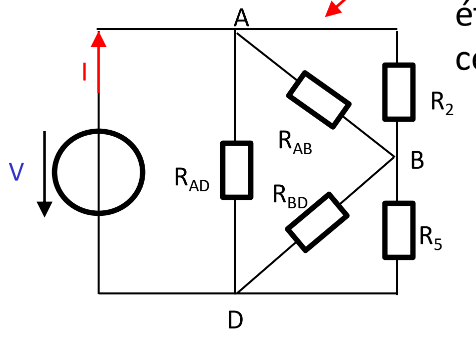


Dans ce circuit, il n'y a ni résistances en série, ni résistances en parallèle. Sans réduction, il faudrait poser les équations à partir des lois de Kirchhoff

Transformation triangle ABC en étoile



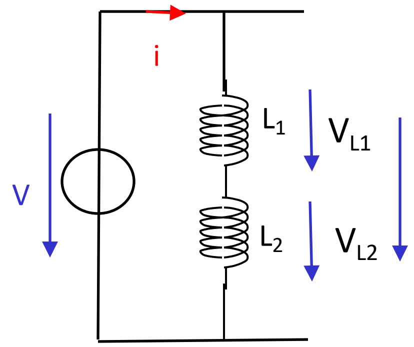
Transformation étoile ABD avec centre C en triangle



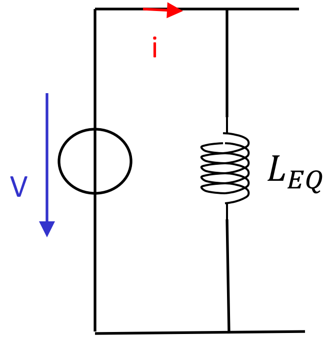
Une fois que l'on obtient par transformation, l'un des deux circuits, on voit que la situation est débloquée car des résistances se retrouvent en série et/ou en parallèle et peuvent donc fusionner

Simplifications intermédiaires (Les inductances)

Les inductances en série



$$V = V_{L1} + V_{L2} = \frac{L_1.di}{dt} + \frac{L_2.di}{dt}$$

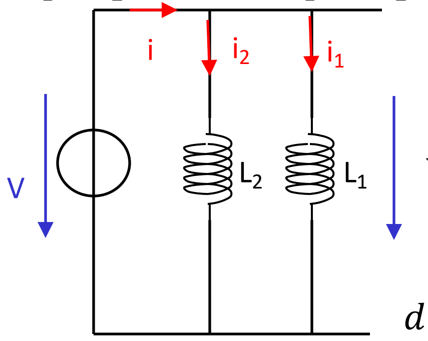


$$V = \frac{L_{EQ}.di}{dt}$$

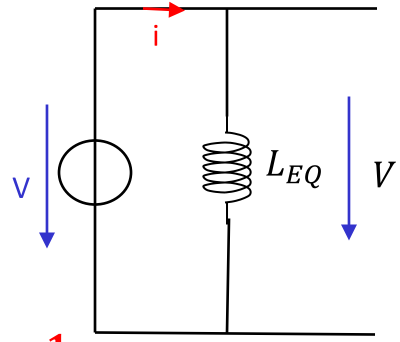
$$\frac{L_{EQ}.di}{dt} = \frac{L_1.di}{dt} + \frac{L_2.di}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{L_{EQ} = L_1 + L_2}$$

Les inductances en parallèle

$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow \; di = di_1 + di_2$$



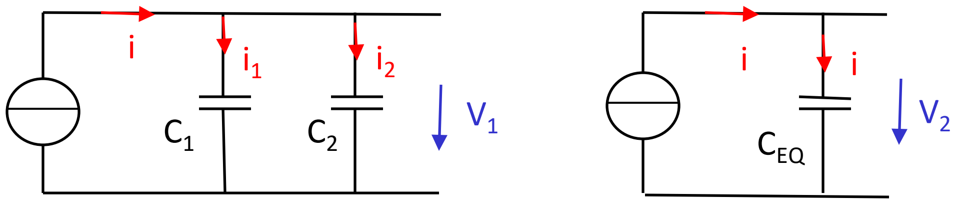
$$V = \frac{L_1.di_1}{dt} = \frac{L_2.di_2}{dt}$$



$$V = \frac{L_{EQ}.di}{dt}$$

$$di_1 + di_2 = \frac{V.dt}{L_1} + \frac{V.dt}{L_2} = di = \frac{V.dt}{L_{EQ}} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Simplifications intermédiaires (Capacités parallèles)



La résolution peut se faire en posant $i = i_1 + i_2$ mais méthode plus simple avec les charges

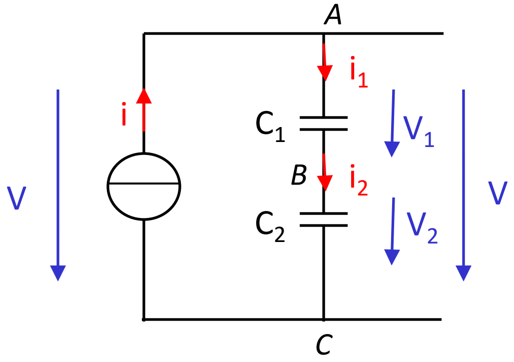
$V_1 = V_2$ car si la source est identique, les équipotentielles le sont aussi

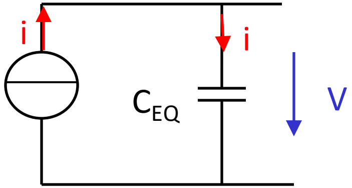
$Q_{EQ} = Q_1 + Q_2$ La charge totale qui sera déplacée, et donc stockée, est la même

$$Q_{EQ} = C_{EQ}.V_2 = Q_1 + Q_2 = C_1.V_1 + C_2.V_1 \Rightarrow C_{EQ}.V_2 = (C_1 + C_2)\,V_1$$

Finalement $\boxed{C_{EQ} = C_1 + C_2}$ Comparer avec l'expression des résistances en parallèle

Simplifications intermédiaires (Capacités séries)



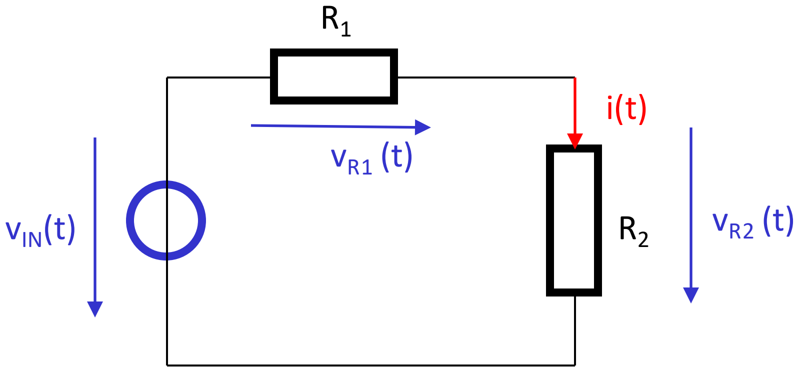


$V = V_1 + V_2$ et $dV = dV_1 + dV_2 \Rightarrow \frac{i.dt}{C_{EQ}} = \frac{i_1\,dt}{C_1} + \frac{i_2\,dt}{C_2} = \frac{i.dt}{C_1} + \frac{i.dt}{C_2}$

Or $i = i_1 = i_2$, on peut factoriser par $i.dt$ et on a directement $\boxed{\frac{1}{C_{EQ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Exploitation des lois de Kirchhoff cas particulier: Le diviseur résistif

$$v_{R1}(t) = R_1.i(t)$$
$$v_{R2}(t) = R_2.i(t)$$

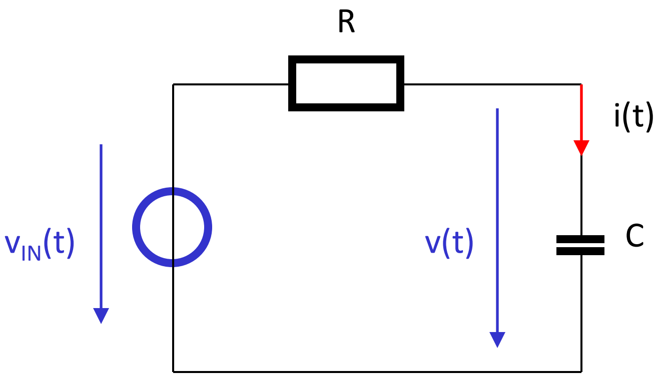


$$v_{IN}(t) = v_{R1}(t) + v_{R2}(t)$$
$$v_{IN}(t) = R_1.i(t) + R_2.i(t) \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{v_{IN}(t)}{R_1 + R_2}}$$

$$v_{R2}(t) = R_2.i(t) = R_2.\frac{v_{IN}(t)}{R_1 + R_2} \Rightarrow \boxed{v_{R2}(t) = v_{IN}(t).\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Exploitation des lois de Kirchhoff
cas particulier: Circuit RC

équation différentielle du premier ordre



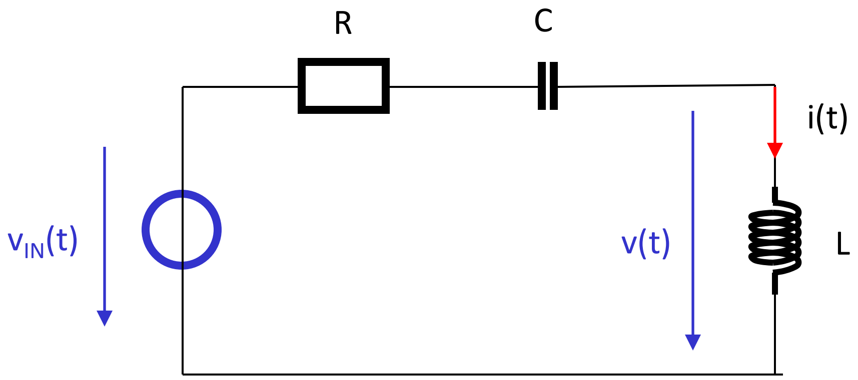
$$méthode\ 1 : \ R.i(t) + \frac{1}{C}\int i(t).dt - v_{IN}(t) = 0 \Rightarrow i(t) + RC.\frac{di}{dt} = C.\frac{dv_{IN}}{dt}$$

$$méthode\ 2 : i(t) = \frac{v_{IN}(t) - v(t)}{R} = C.\frac{dv}{dt}$$

Ou encore $\boxed{v_{IN}(t) = v(t) + RC.\frac{dv}{dt}}$

Exploitation des lois de Kirchhoff
cas particulier: Circuit RLC

équation différentielle du second ordre



$$v_{IN}(t) = R.i(t) + \frac{1}{C}\int i(t).dt + L.\frac{di}{dt}$$

$$C.\frac{dv_{IN}}{dt} = RC\frac{di}{dt} + i(t) + LC\frac{d^2i}{dt^2} = i(t) + RC.\frac{di}{dt} + LC.\frac{d^2i}{dt^2}$$

Cas particulier si V_{IN} = cte $\Rightarrow$ $0 = i(t) + RC.\frac{di}{dt} + LC.\frac{d^2i}{dt^2}$