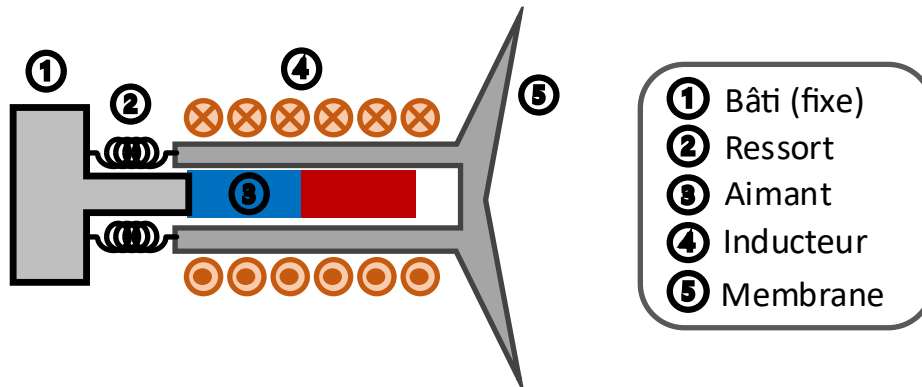


Exercice bonus :

On souhaite étudier le fonctionnement d'un haut-parleur. Celui-ci est constitué d'un circuit électrique avec un inducteur magnétique (inductance L et résistance R) monté sur une pièce mécanique mobile de masse m tenue par un ressort de raideur k et d'un aimant, (voire figure ci-dessous). La pièce mobile peut bouger linéairement sur un axe x .

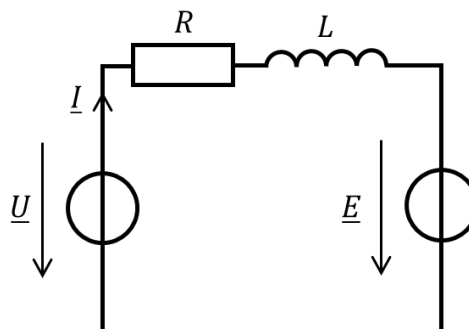


Le principe de fonctionnement est le suivant : une tension correspondant au son que l'on souhaite produire est appliquée aux bornes de l'inductance. Cette tension est modélisée par un signal en régime sinusoïdal permanent à une pulsation ω . Par effet magnétique de l'aimant, l'inducteur se met à bouger à la même fréquence que la tension et le courant, produisant alors une vibration de la membrane du haut-parleur.

Nous modélisons cela en deux parties.

Partie I : circuit électrique

Le circuit est constitué d'une source de tension idéale \underline{U}_0 , d'une inductance L en série avec sa résistance interne et d'une deuxième source de tension \underline{E} qui représente l'effet de l'aimant sur le circuit.



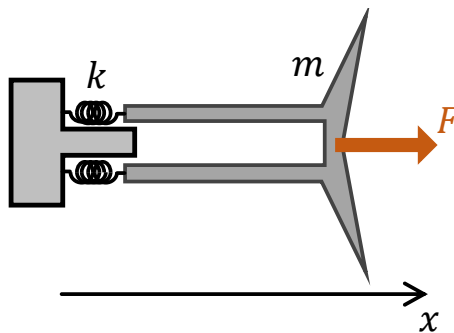
En appliquant la loi des mailles, exprimer \underline{U} en fonction de \underline{I} , R , L et \underline{E} .

La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent :

$$\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I} + \underline{E}$$

Partie II : mouvement mécanique

On s'intéresse au mouvement de la partie mobile du haut-parleur, liée à la membrane. On appelle x la position du centre de gravité et v sa vitesse. Une force F est appliquée sur la partie mobile orientée sur l'axe x .



1) A partir du principe fondamental de la dynamique (2^{ème} loi de Newton), montrer que :

$$m \frac{dv}{dt}(t) = F - kx$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$ma = \sum_n F_n$$

En rappelant que l'accélération a est la dérivée de la vitesse v et en remplaçant les forces par la force de rappel du ressort et la force d'excitation, on a :

$$m \frac{dv}{dt}(t) = F - kx$$

On considère le cas où la force appliquée est sinusoïdale de pulsation ω , impliquant un mouvement sinusoïdal. On définit alors des grandeurs mécaniques complexes sous forme de phaseurs : \underline{X} pour la position $x(t)$, \underline{V} pour la vitesse $v(t)$ et \underline{F} pour la force F .

2) Exprimer \underline{V} en fonction de \underline{X} et de ω .

Comme v est la dérivée du déplacement x , on a :

$$\underline{V} = j\omega\underline{X}$$

3) A partir des questions précédentes, montrer que :

$$\underline{F} = \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V}$$

On applique le formalisme des phaseurs complexes à l'équation obtenue en question 1 :

$$jm\omega\underline{V} = \underline{F} - k\underline{X}$$

On remplace \underline{X} grâce à l'expression trouvée en question 2 et on obtient :

$$jm\omega\underline{V} = \underline{F} - \frac{k}{j\omega}\underline{V}$$

D'où le résultat :

$$\underline{F} = \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V}$$

Partie III : système total

La combinaison du système électronique et du système mécanique se manifeste par un couplage tel que :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= K\underline{V} \\ \underline{F} &= K\underline{I} \end{aligned}$$

1) Montrer que :

$$\underline{I} = \frac{1}{K} \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V}$$

A partir de l'équation trouvée dans la question précédente et la relation $\underline{F} = K\underline{I}$, on trouve :

$$K\underline{I} = \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V}$$

Ce qui donne bien :

$$\underline{I} = \frac{1}{K} \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V}$$

2) En déduire que :

$$\underline{U} = \left(\frac{R + jL\omega}{K} \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) + K \right) \underline{V}$$

On utilise maintenant la relation $\underline{E} = K\underline{V}$ ainsi que l'expression de \underline{I} pour les remplacer dans le résultat de la loi des mailles :

$$\underline{U} = \frac{R + jL\omega}{K} \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V} + K\underline{V}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \left[\frac{R + jL\omega}{K} \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) + K \right] \underline{V}$$

3) La puissance acoustique émise par la membrane vibrante du haut-parleur est proportionnelle à V^2 (de façon similaire à la puissance électrique qui est proportionnelle à I^2). On s'intéresse alors à l'évolution de la vitesse en fonction de la pulsation ω . On définit une fonction de transfert électromécanique \underline{H} telle que :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}}{\underline{U}}$$

Montrer que :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{K}{kR} \cdot \frac{j\omega}{1 + j \frac{K^2 + kL}{kR} \omega - \frac{m}{k} \omega^2 - j \frac{mL}{kR} \omega^3}$$

A partir du résultat précédent, on a :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{\frac{R + jL\omega}{K} \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) + K}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{K}{(R + jL\omega) \left(jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) + K^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{K}{\frac{(R + jL\omega)(k - m\omega^2) + j\omega K^2}{j\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{j\omega K}{(R + jL\omega)(k - m\omega^2) + j\omega K^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{j\omega K}{kR + j(K^2 + kL)\omega - mR\omega^2 - jmL\omega^3}$$

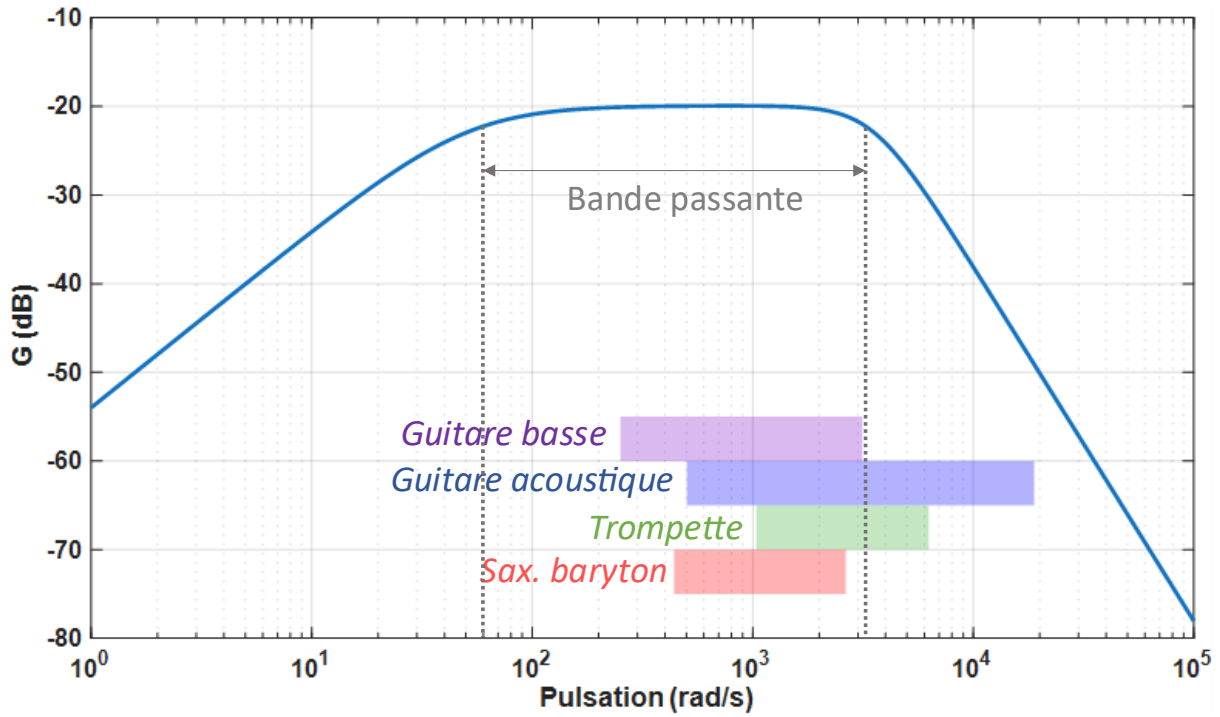
$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{j\omega K}{kR \cdot \left(1 + j \frac{(K^2 + kL)}{kR} \omega - \frac{mR}{kR} \omega^2 - j \frac{mL}{kR} \omega^3 \right)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{K}{kR} \cdot \frac{j\omega}{1 + j \frac{(K^2 + kL)}{kR} \omega - \frac{m}{k} \omega^2 - j \frac{mL}{kR} \omega^3}$$

Partie IV : application

On souhaite utiliser des haut-parleurs pour sonoriser des instruments de musique.

Un modèle de haut-parleur a le diagramme de Bode suivant (correspondant à la fonction de transfert \underline{H} pour des valeurs particulières de composants) :



- 1) De quel type de filtre s'agit-il (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) ?

Les basses fréquences sont atténuées ainsi que les hautes fréquences comparativement à la partie centrale. Il s'agit d'un filtre passe-bande.

- 2) On donne les gammes de fréquences sonores correspondant à plusieurs instruments dans le tableau suivant :

Instrument	Guitare basse	Guitare acoustique	Trompette	Saxophone baryton
Gamme de fréquence (Hz)	40 - 500	80 - 3000	165 - 1000	70 - 420

En considérant qu'en-dessous de 3 dB par rapport à la valeur maximale du gain les signaux sont considérés comme coupés, pour quel(s) instrument(s) le haut-parleur convient-il ?

Il faut comparer les gammes de fréquences des instruments à la bande passante du filtre passe-bande. Les fréquences dans le tableau sont données en Hz, alors que le diagramme de Bode fourni est gradué en pulsation (en rad/s). Il faut alors convertir les fréquences en pulsation en utilisant $\omega = 2\pi f$. La bande passante ainsi que les gammes de pulsation de chaque instrument sont reportées sur le graphe. On voit que seule la guitare basse et le saxophone baryton ont leurs gammes de pulsations entièrement comprises dans la bande passante du haut-parleur. Ce dernier convient alors pour la guitare basse et le saxophone baryton mais pas pour la guitare acoustique ni la trompette.