

Cours 9: Régime permanent sinusoïdal: Superposition, Thévenin, Norton

EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité
Automne 2025

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Rappels



- Grandeur réelle instantanée:

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Phaseur instantané:

$$\underline{x}(t) = \hat{X} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Phaseur crête

$$\underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi}$$

- Phaseur efficace

$$\underline{X} = X e^{j\varphi}$$

$Re\{\cdot\}$


$\times e^{j\omega t}$

$\times \sqrt{2}$

- La loi d'Ohm se généralise pour les condensateurs et inductances en régime sinusoïdal permanent

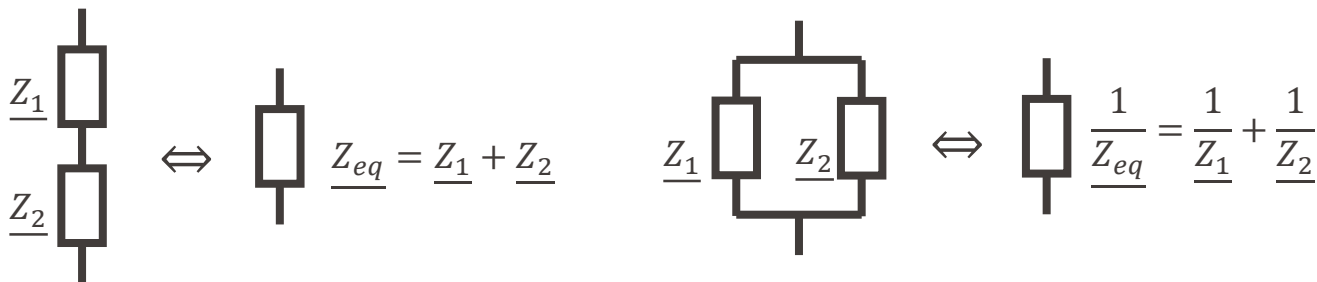
- $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$

- L'impédance est complexe

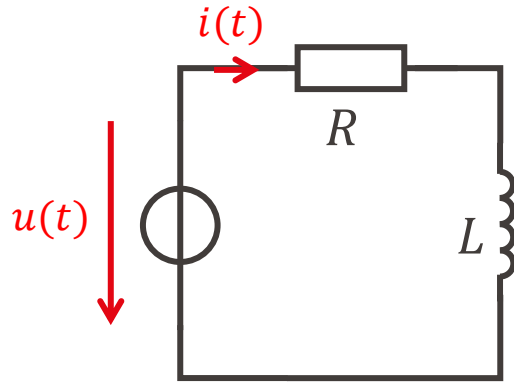


$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha - \beta)}$$

- Elle suit les mêmes règles d'agencement que les résistances en régime statique

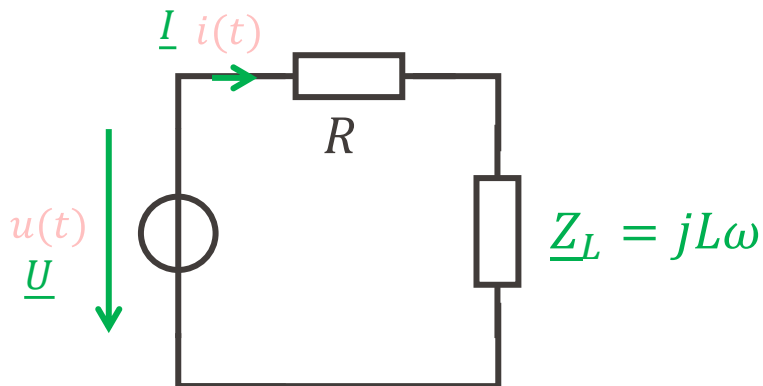


Exemple



$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$$



$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$$

$$\underline{U} = U e^{j\alpha}$$

$$\underline{I} = I e^{j\beta}$$

Mise en équation avec les phaseurs:

$$\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I}$$

$$\Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega}$$

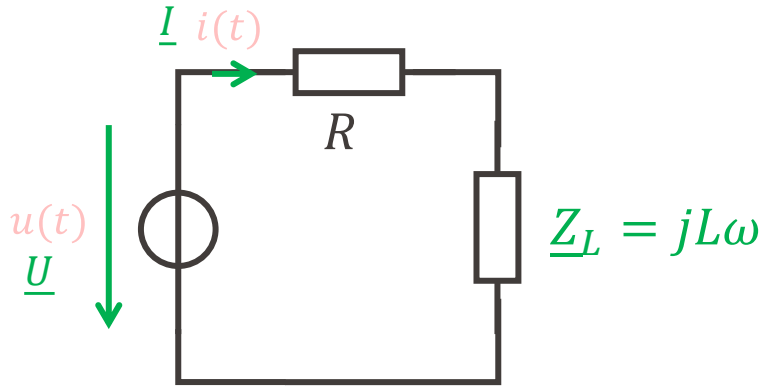
On en déduit le module et l'argument du courant efficace:

$$I = |\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{U}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\beta = \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{U}) - \arg(R + jL\omega)$$

$$\beta = \alpha - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$



$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$$

$$\underline{U} = U e^{j\alpha}$$

$$\underline{I} = I e^{j\beta}$$

$$\underline{u}(t) = \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \alpha)}$$

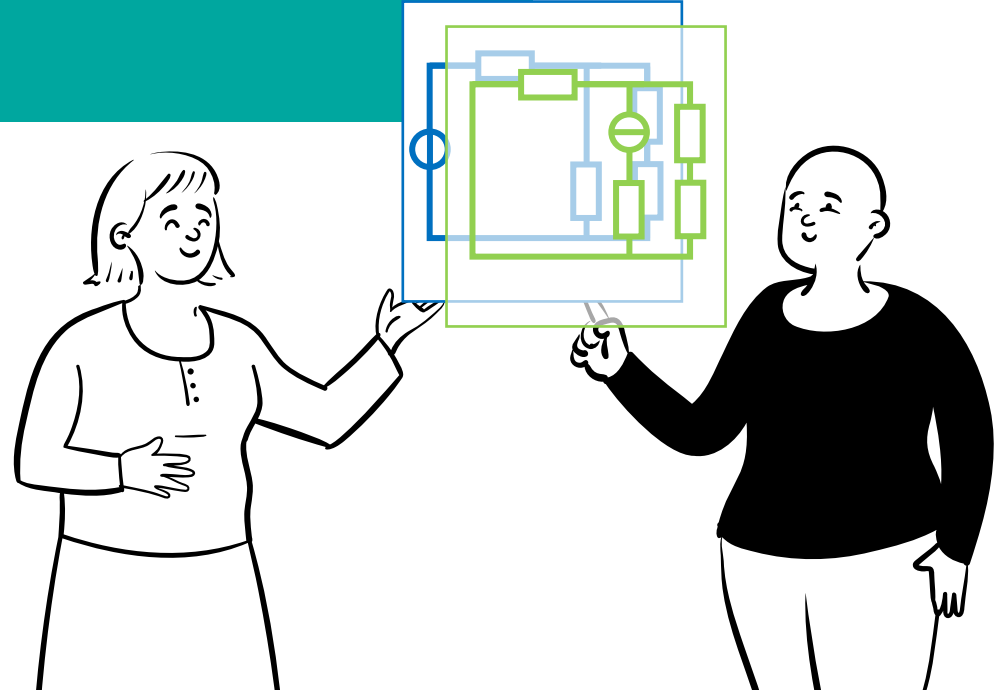
$$\underline{i}(t) = \sqrt{2} I e^{j(\omega t + \beta)}$$

On retrouve le courant par la partie réelle du phasor instantané:

$$i(t) = \text{Re}\{\underline{i}(t)\}$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2} U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left(\omega t + \alpha - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right)$$

Principe de superposition



Principe de superposition

- En présence de plusieurs sources, on ne peut pas toujours simplifier le circuit
- On peut séparer le problème en plusieurs problèmes plus simples
 - On ne traite qu'une seule source à la fois, en éteignant les autres sources
 - On répète cela pour chaque source
 - On additionne les résultats

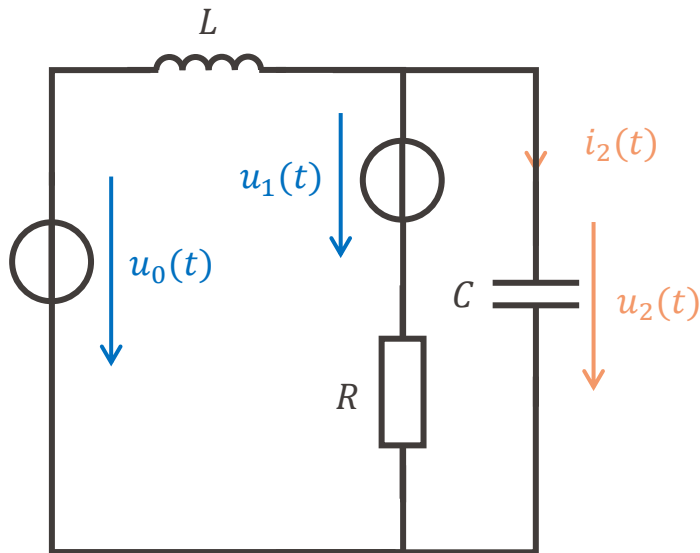
Principe de superposition: le résultat total est la somme des solutions correspondant à chaque source individuelle.

Objectif: Calculer la tension aux bornes de C et le courant correspondant

Données:

$$u_0(t) = U_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u_1(t) = -U_1 \sin(\omega t)$$



Inconnues:

$$u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

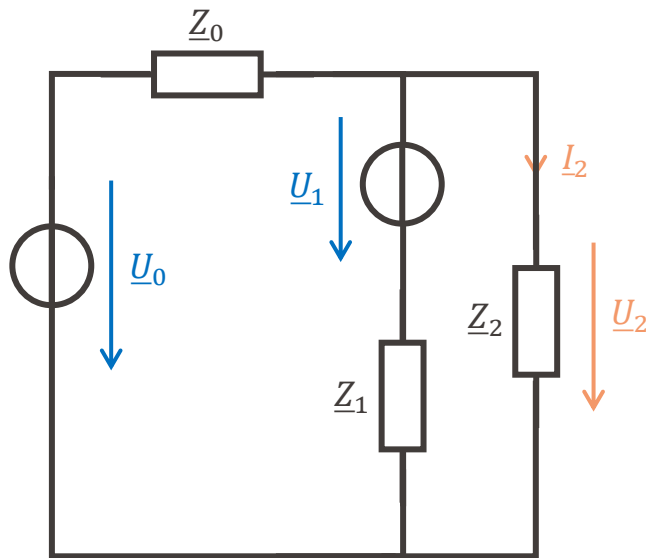
$$i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \beta_2)$$

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant

Données:

$$\underline{U}_0 = U_0 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\underline{U}_2 = U_2 e^{j\frac{\pi}{2}}$$



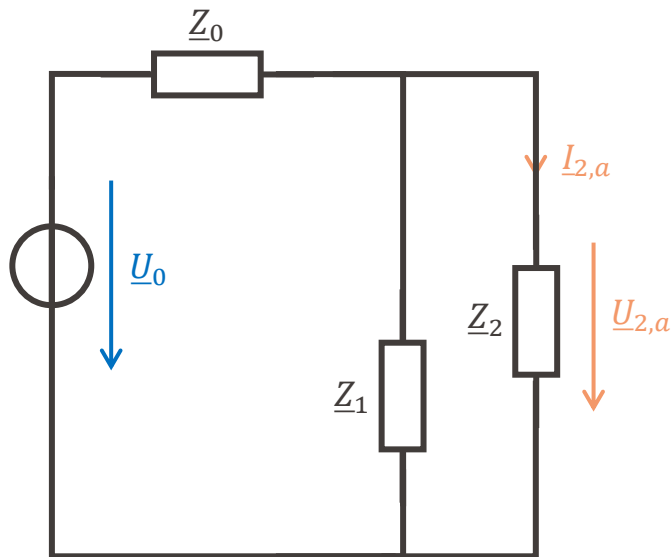
Inconnues:

$$\underline{U}_2 = U_2 e^{j\alpha_2}$$

$$\underline{I}_2 = I_2 e^{j\beta_2}$$

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant

1. On éteint la source \underline{U}_1

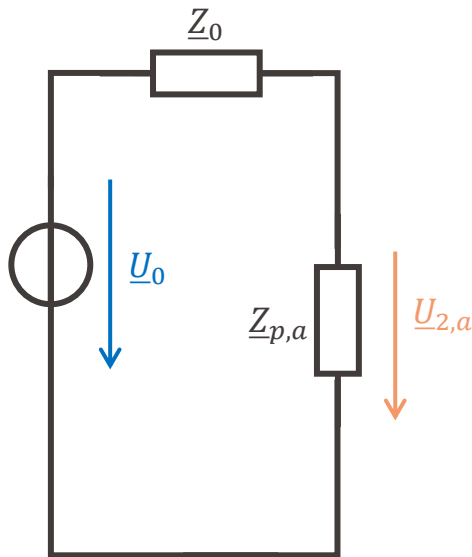


Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant



1. On éteint la source \underline{U}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées



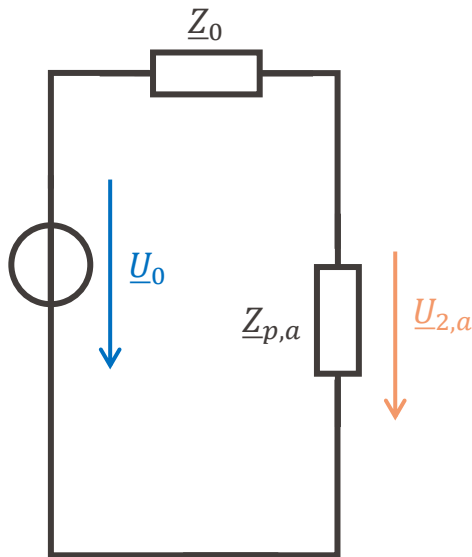
$$\underline{Z}_{p,a} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant



1. On éteint la source \underline{U}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées

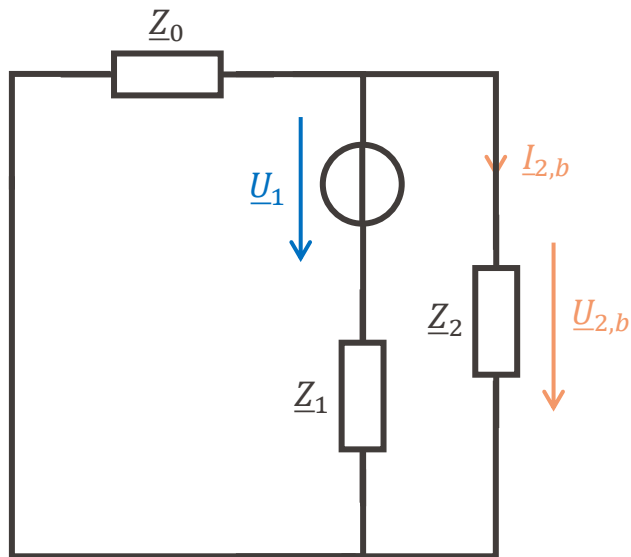


$$\underline{Z}_{p,a} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant

1. On éteint la source \underline{U}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. **On éteint la source \underline{U}_0 et on allume \underline{U}_1**

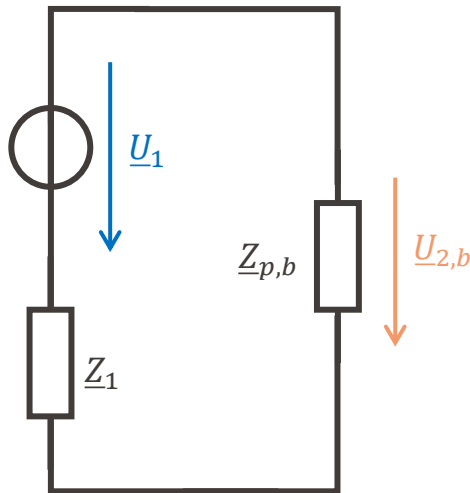


Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant



1. On éteint la source \underline{U}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source \underline{U}_0 et on allume \underline{U}_1

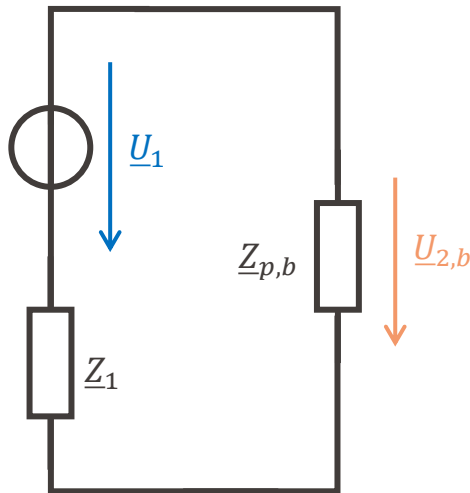


$$\underline{Z}_{p,b} = \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2}$$

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant



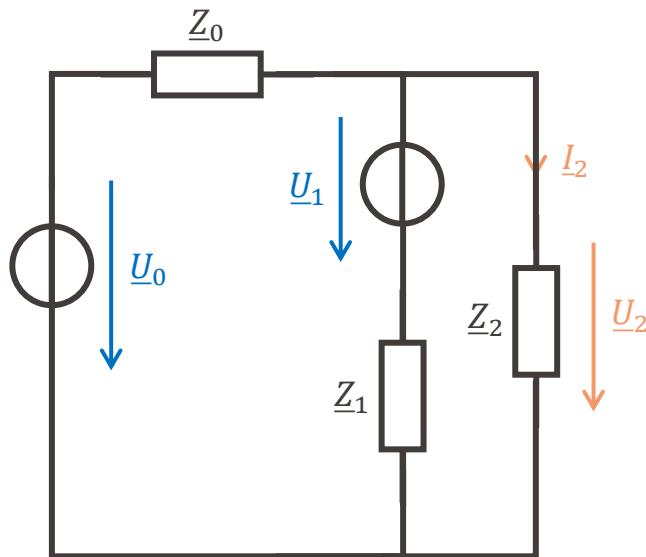
1. On éteint la source \underline{U}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source \underline{U}_0 et on allume \underline{U}_1
4. **On détermine les grandeurs souhaitées**



$$\underline{Z}_{p,b} = \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2}$$

Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant

1. On éteint la source \underline{U}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source \underline{U}_0 et on allume \underline{U}_1
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. **On additionne les résultats**



Inconnues:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2,a} + \underline{U}_{2,b}$$

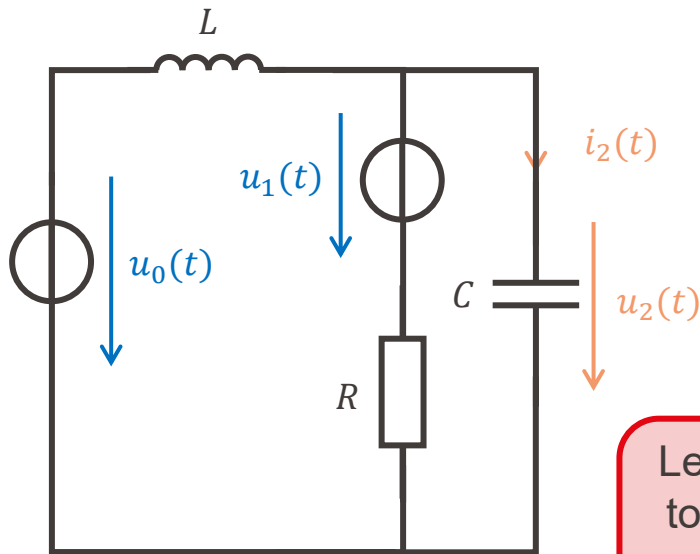
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2,a} + \underline{I}_{2,b}$$

Objectif: Calculer la tension aux bornes de C et le courant correspondant

Données:

$$u_0(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u_1(t) = -U_1 \sin(\omega_1 t)$$



Inconnues:

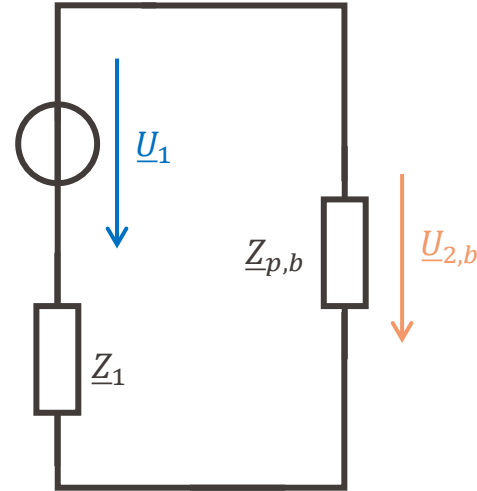
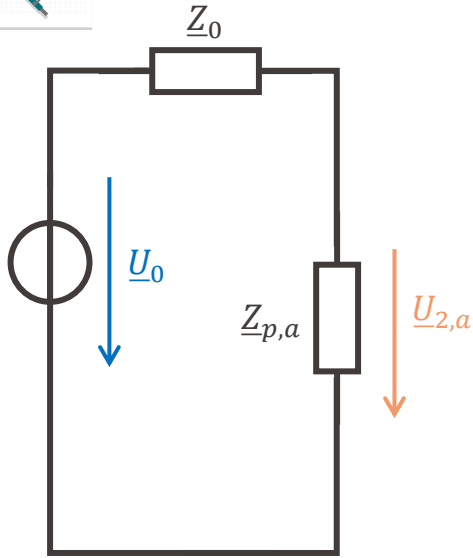
$$u_2(t)$$

$$i_2(t)$$

Le principe de superposition est toujours valable, mais on fait la somme sur les grandeurs temporelles

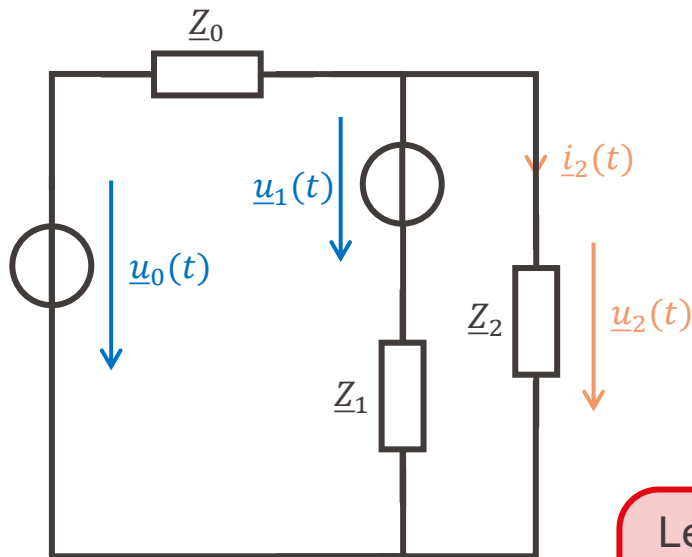
Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la tension aux bornes de C et le courant correspondant



Objectif: Calculer la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et le courant correspondant

1. On éteint la source \underline{u}_1
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source \underline{u}_0 et on allume \underline{u}_1
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. **On additionne les résultats**



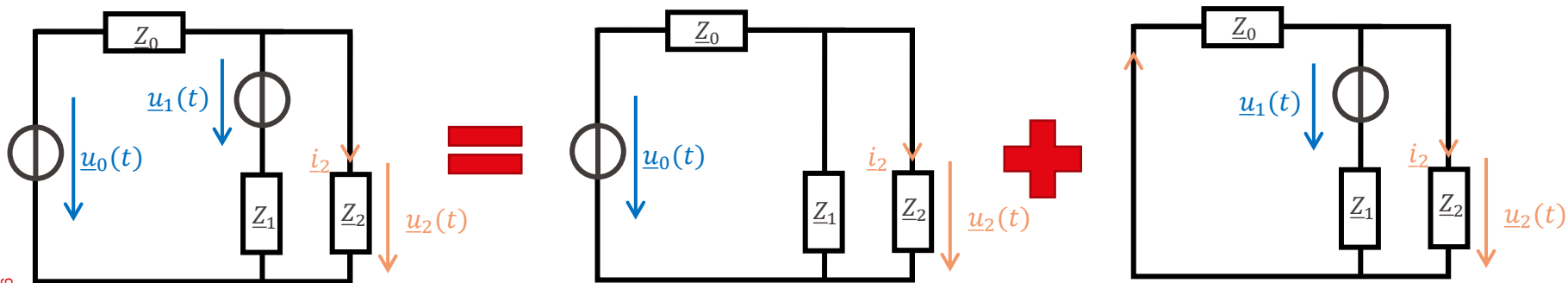
Inconnues:

$$\underline{u}_2(t) = \underline{u}_{2,a}(t) + \underline{u}_{2,b}(t)$$

$$\underline{i}_2(t) = \underline{i}_{2,a}(t) + \underline{i}_{2,b}(t)$$

Le principe de superposition est toujours valable, mais on fait la **somme sur les grandeurs temporelles**

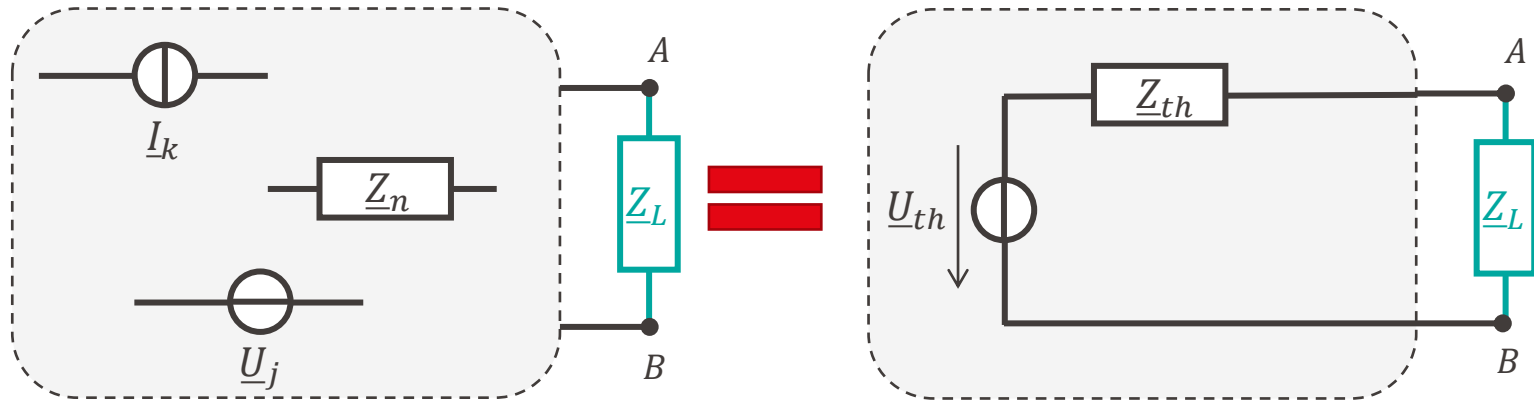
- Le principe de superposition permet de séparer un problème à N sources en N problèmes à une source
 - Particulièrement utile pour résoudre les systèmes à plusieurs sources
- Une source de tension éteinte est un « court-circuit »
- Une source de courant éteinte est un « circuit ouvert »



Théorème de Thévenin / théorème de Norton



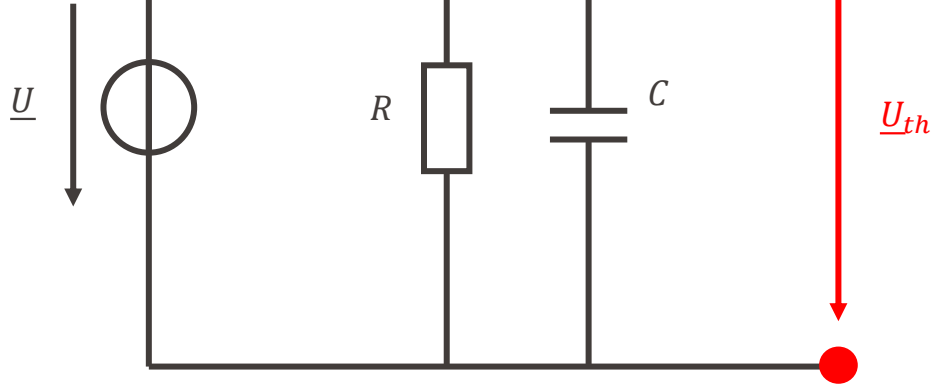
- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de tension et une impédance en série



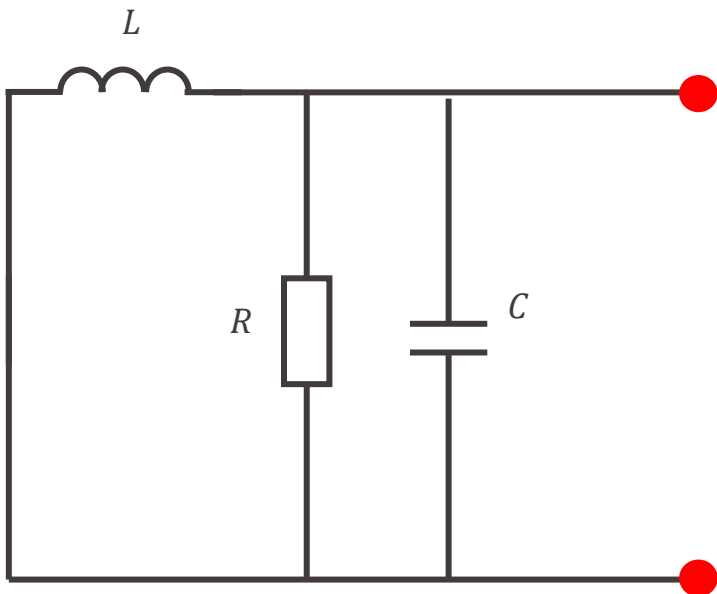
- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de tension et une impédance en série

- **Procédure:**
 - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
 - Calculer ou mesurer la **tension à vide** (tensions entre A et B **sans charge**)
 - Calculer ou mesurer l'impédance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

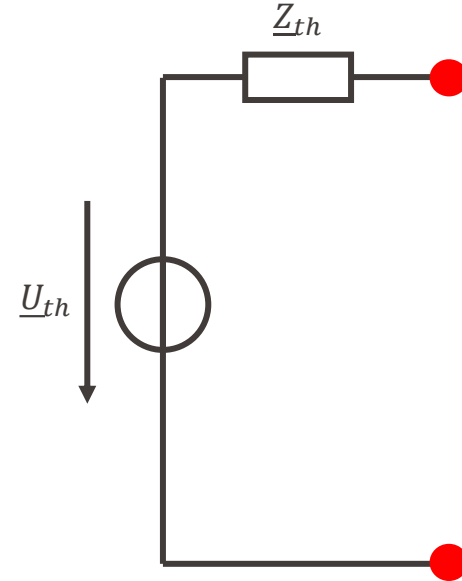
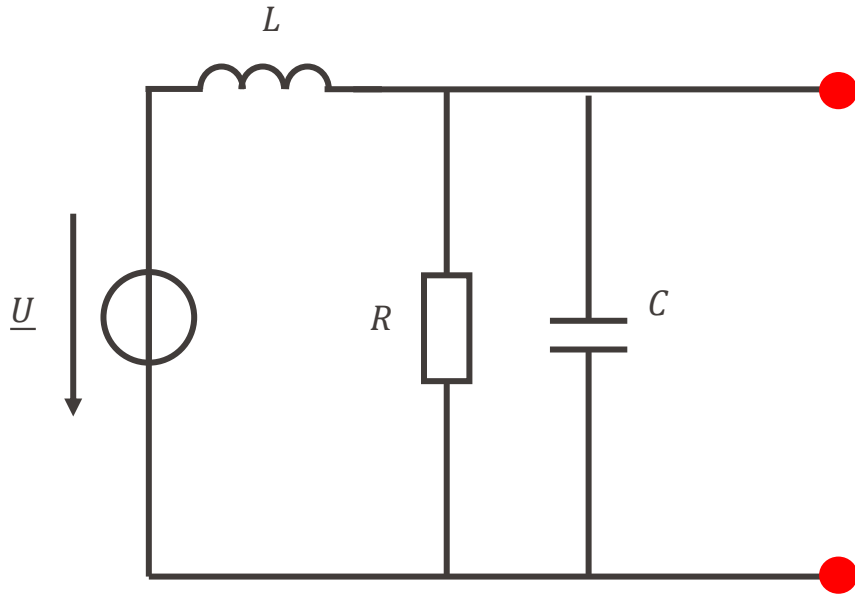
Théorème de Thévenin - Exemple



Théorème de Thévenin - Exemple



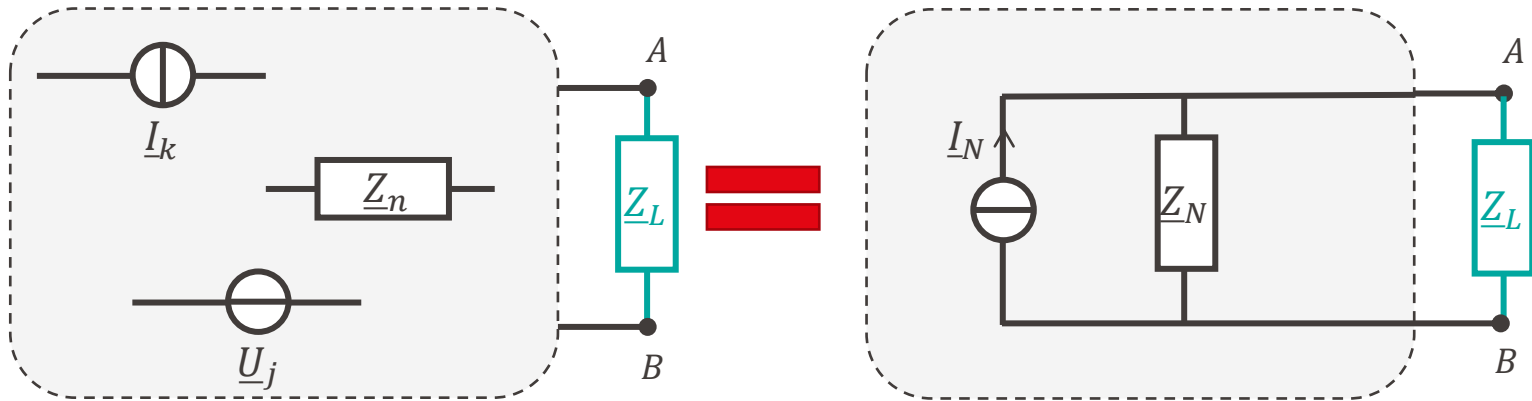
Théorème de Thévenin - Exemple



$$\underline{U}_{th} = \frac{R}{R + jL\omega - RLC\omega^2} \underline{U}$$

$$\underline{Z}_{th} = \frac{jLR\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

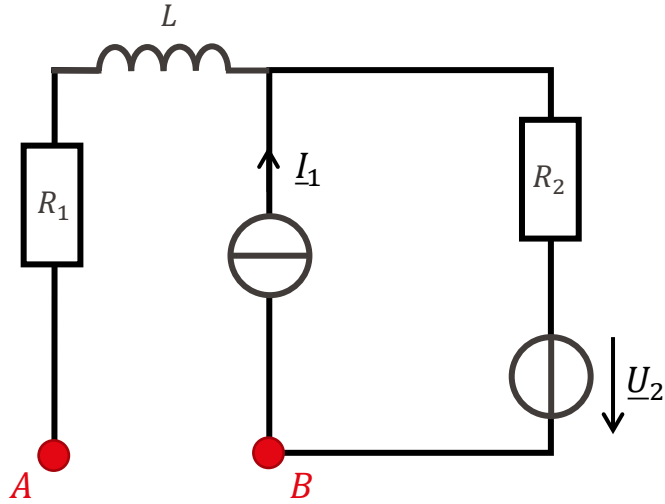
- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de courant et une impédance en parallèle



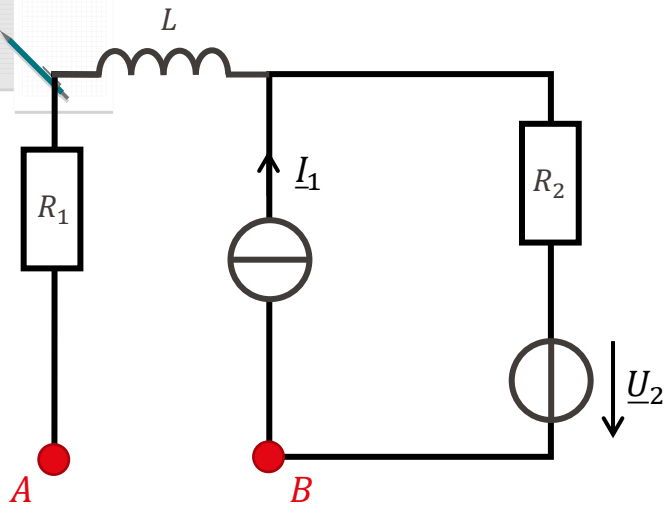
- **Objectif:** Remplacer un circuit (à une fréquence donnée) par une source de courant et une impédance en parallèle

- **Procédure:**
 - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
 - Calculer ou mesurer le **courant de court-circuit** (courant dans la branche AB pour une **charge nulle**)
 - Calculer ou mesurer l'impédance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

Théorème de Norton – Exemple



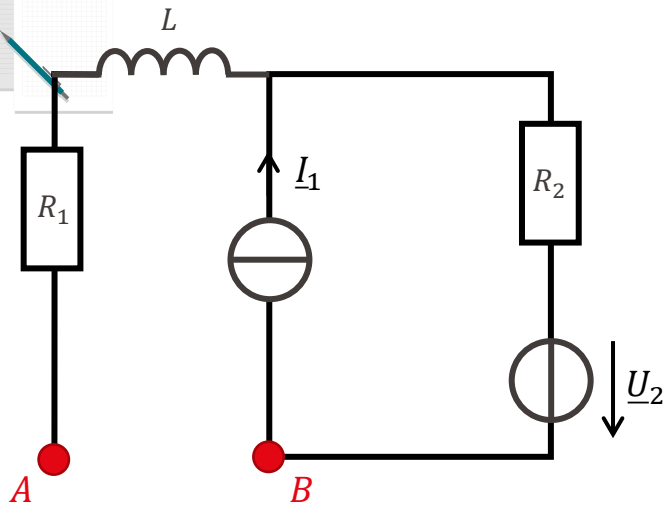
Théorème de Norton – Exemple



Théorème de Norton – Exemple



Théorème de Norton – Exemple



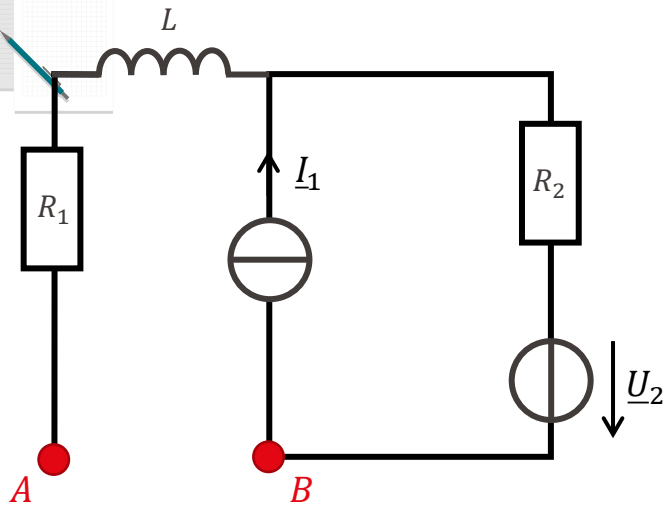
Théorème de Norton – Exemple



Théorème de Norton – Exemple

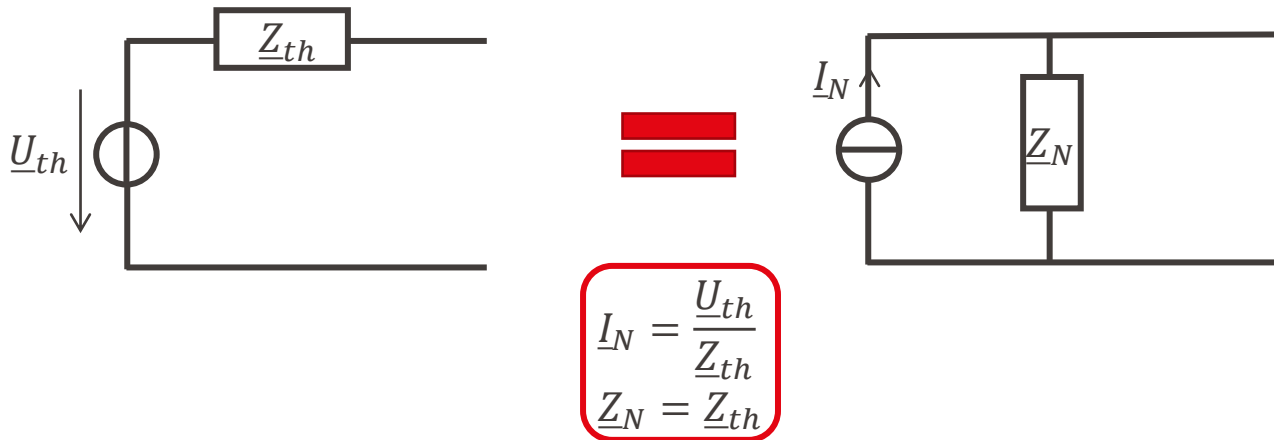


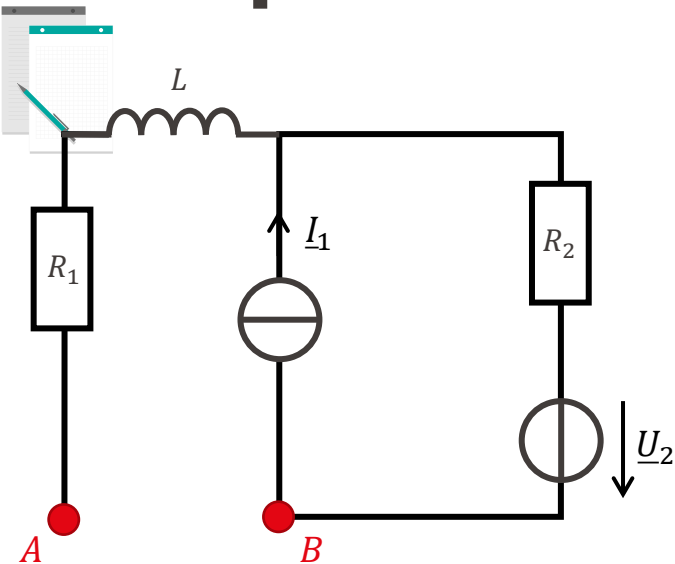
Théorème de Norton – Exemple



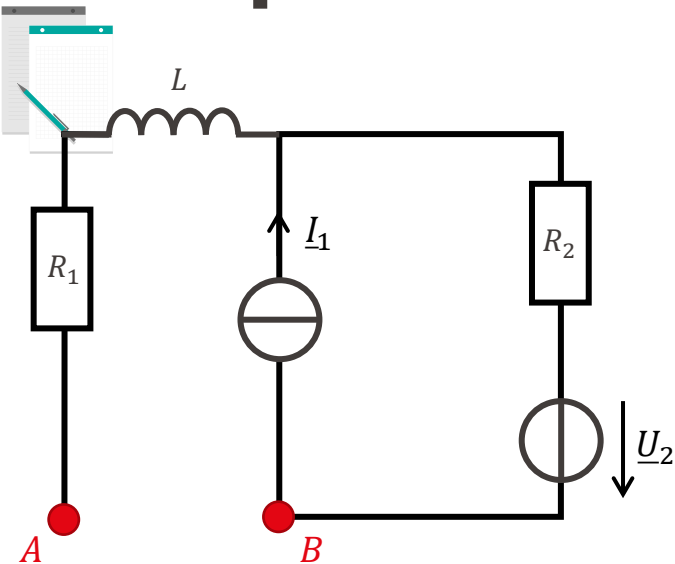
Equivalence de sources

- Il est possible de modéliser une source de tension réelle par une source de courant réelle équivalente et vice-versa
 - Utile pour modifier un schéma en fonction de ce que l'on cherche
- Conséquence: les circuits équivalents de Thévenin et de Norton sont interchangeables!



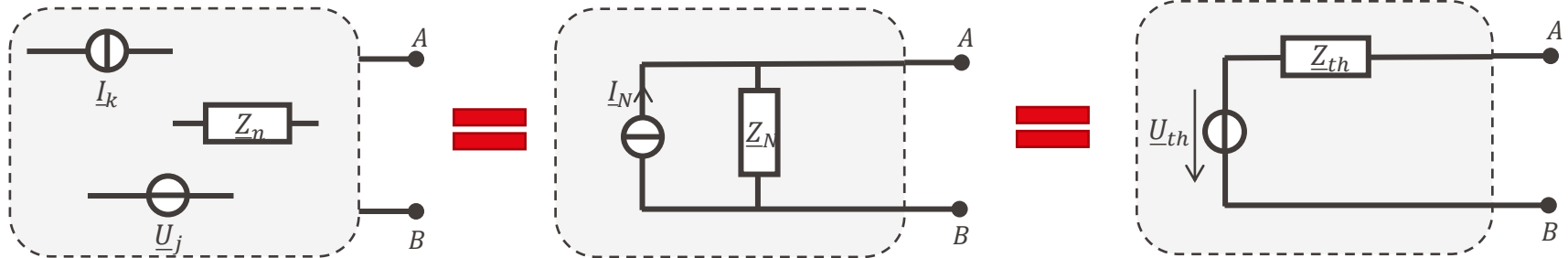


Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:

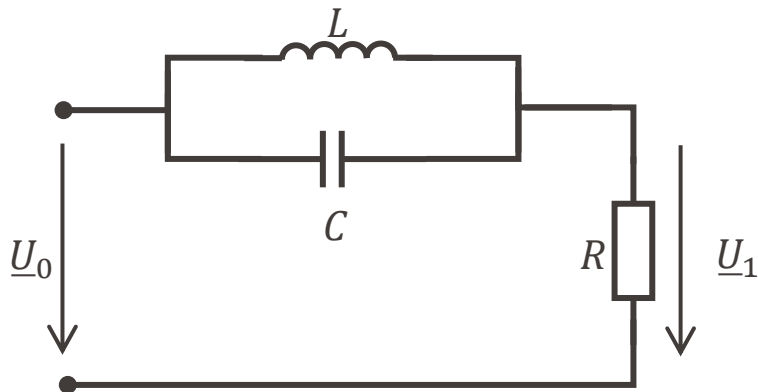


Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:

- Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de transformer des circuits linéaires compliqués en sources équivalentes
 - Le théorème de Thévenin donne une source de tension en série avec une impédance
 - Le théorème de Norton donne une source de courant en parallèle avec une impédance
- Les deux modèles sont interchangeables (équivalence entre les sources de courant et de tension)

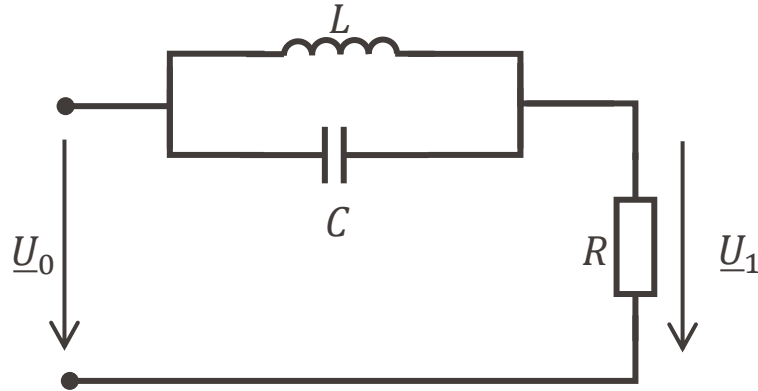


Comportement fréquentiel



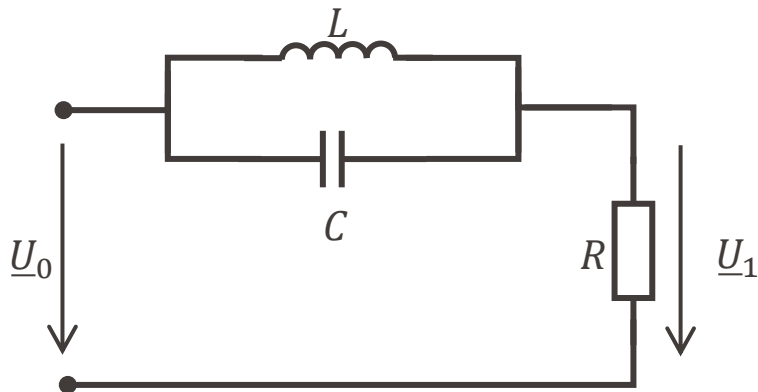
On cherche \underline{U}_1 en fonction
des autres grandeurs du
circuit

Comportement fréquentiel



On cherche \underline{U}_1 en fonction
des autres grandeurs du
circuit

Comportement fréquentiel



On cherche \underline{U}_1 en fonction
des autres grandeurs du
circuit

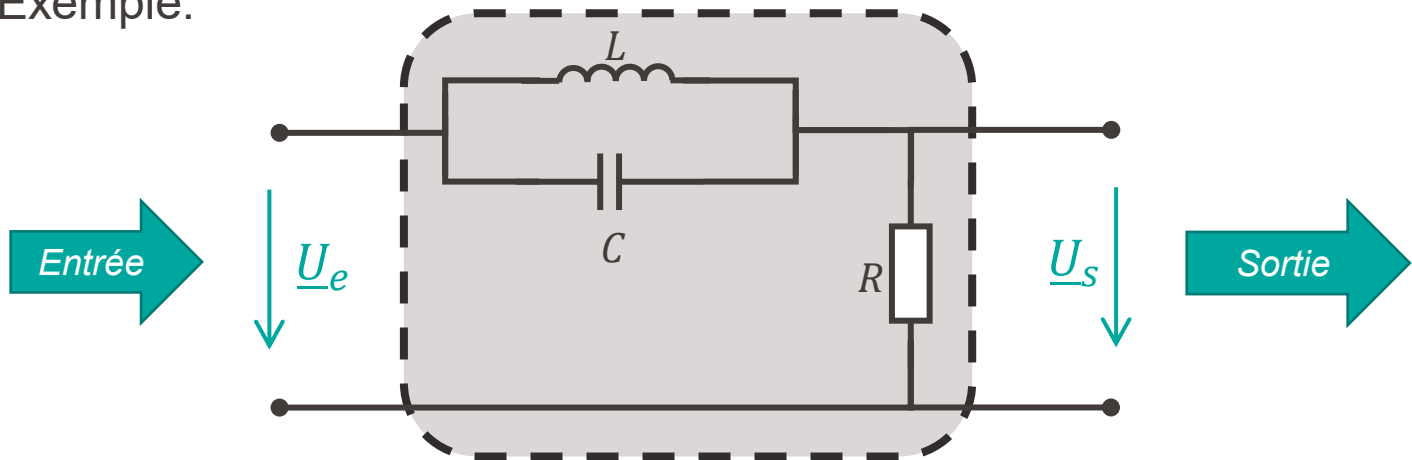
Notion de filtres



- On a étudié avant des dipôles:
 - Résistance
 - Condensateur
 - Inductance
- Les Quadripôles sont des systèmes avec 4 bornes
 - 2 bornes d'entrée
 - 2 bornes de sortie



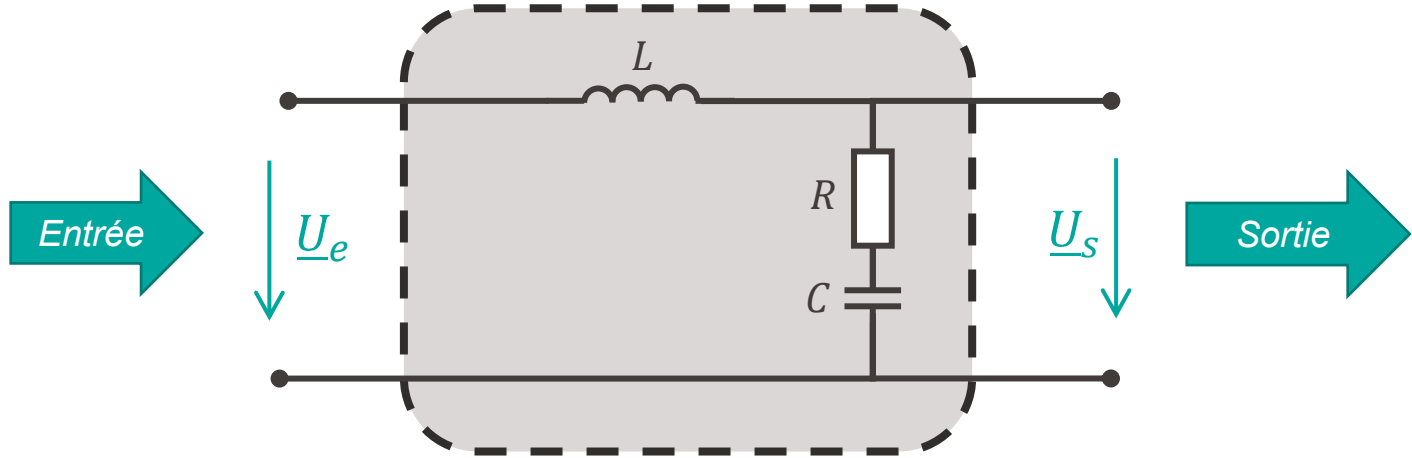
- Exemple:



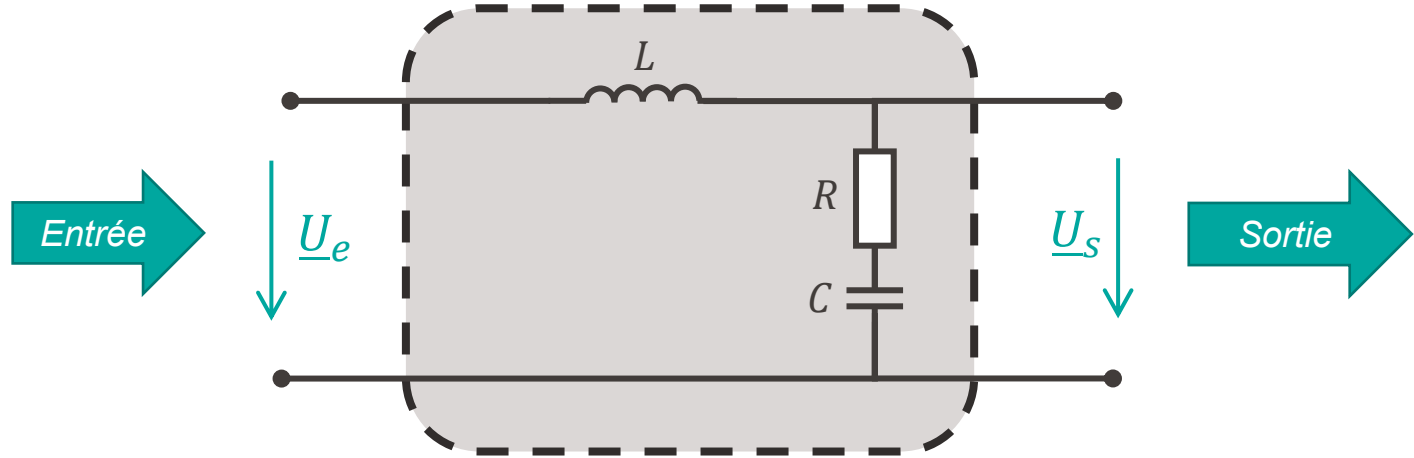
$$\underline{U}_s = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R + jL\omega - RLC\omega^2} \underline{U}_e$$

Quadripôles

- Exemple:



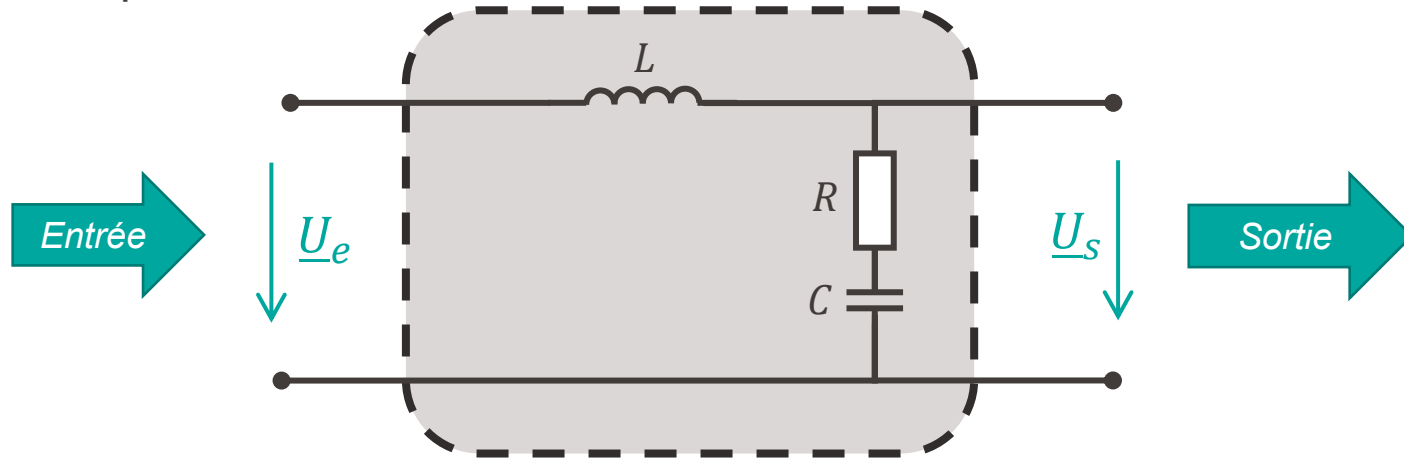
- Exemple:



$$\underline{U}_s = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \underline{U}_e$$

Quadripôles – Fonction de transfert

- Exemple:



$$\underline{U}_s = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \underline{U}_e$$

- La grandeur de sortie est proportionnelle à la grandeur d'entrée
 - Le rapport sortie/entrée est appelé **fonction de transfert**

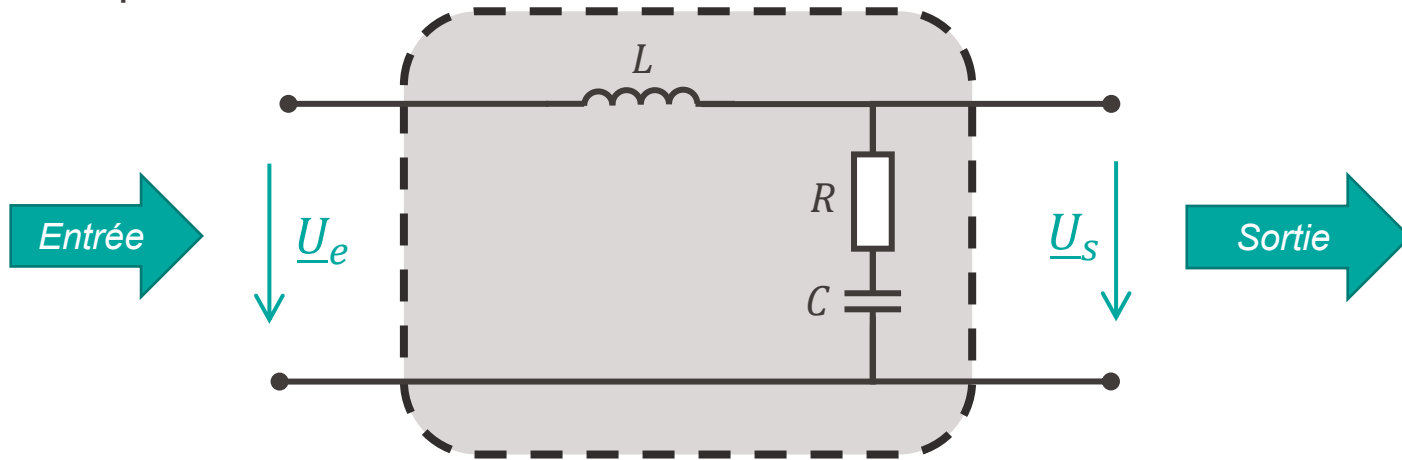
- La grandeur de sortie est proportionnelle à la grandeur d'entrée
 - Le rapport sortie/entrée est appelé **fonction de transfert**
 - Par exemple, pour la tension:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s(\omega)}{\underline{U}_e(\omega)} = |\underline{H}(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

- La fonction de transfert est caractérisée par:
 - Son module, appelé **gain**: $|\underline{H}(\omega)|$
 - Son argument, appelé **phase**: $\phi(\omega)$

Quadripôles – Fonction de transfert

- Exemple:



$$\underline{U}_s = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Quadripôles – Fonction de transfert



$$\underline{U}_s = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

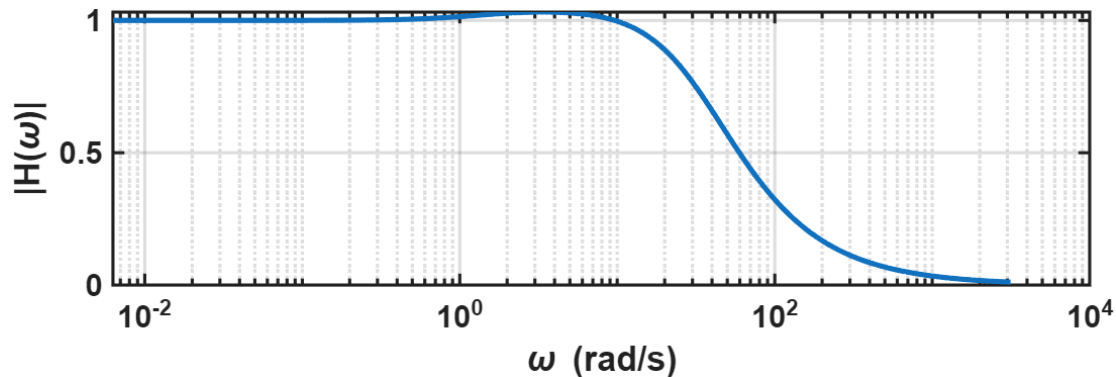
Quadripôles – Fonction de transfert

$$R = 44.16 \Omega$$

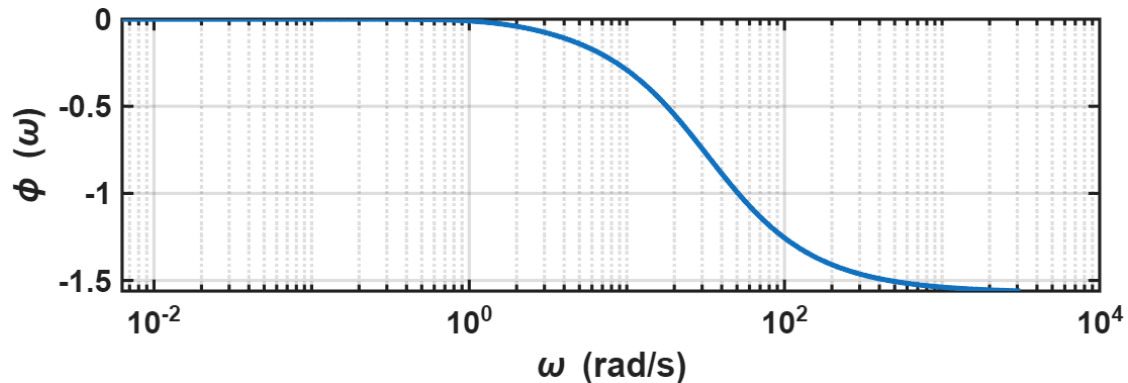
$$C = 16.7 \text{ mF}$$

$$L = 1.3 \text{ H}$$

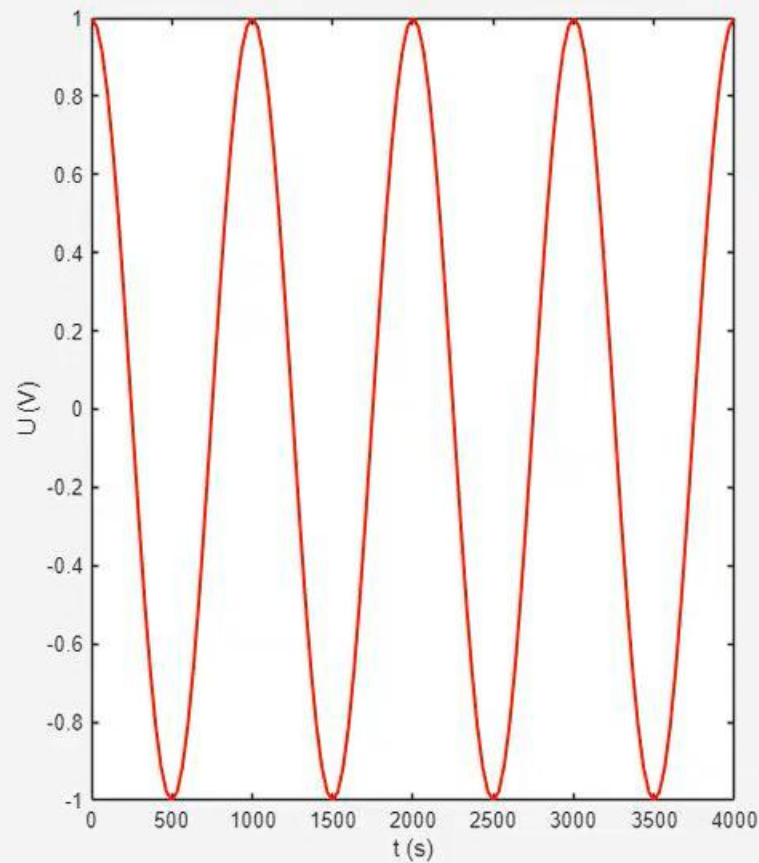
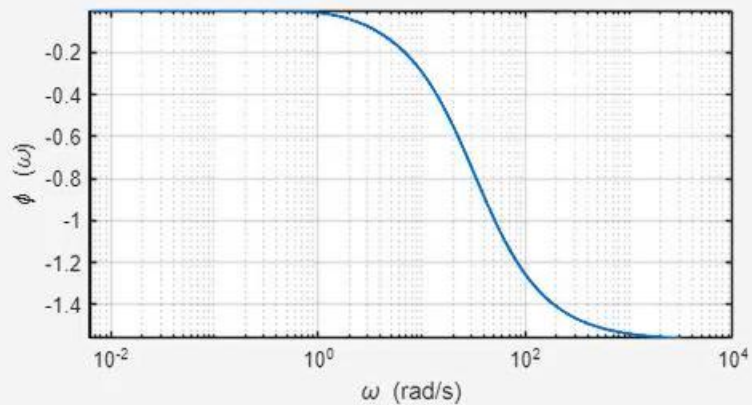
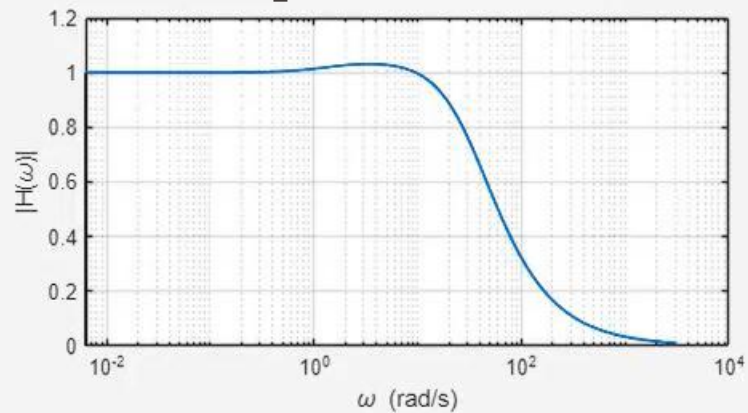
$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$



$$\phi(\omega) = \arctan(RC\omega) - \arg\left(1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega\right)$$



Quadripôles – Fonction de transfert



Quadripôles – Notion de filtres

- La dépendance en fréquence implique une possibilité de sélection par la fréquence
 - Ces systèmes s'appellent des filtres
 - Certains signaux sont transmis en sortie, d'autres sont filtrés

- Les filtres sont présents partout!



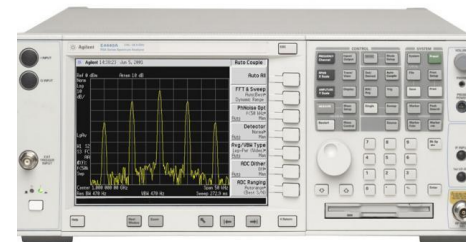
Traitement du son



Radio

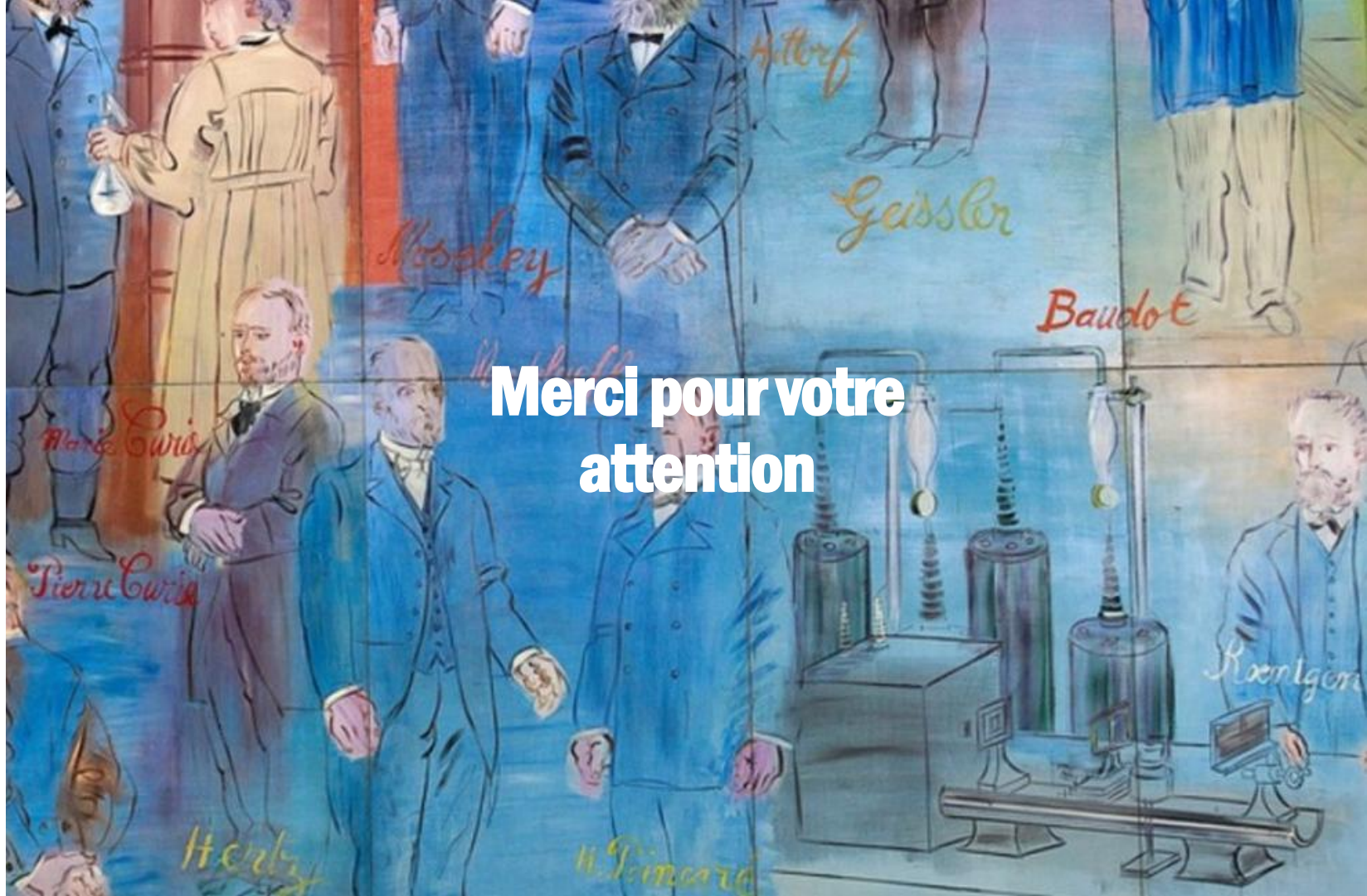


Communications



Mesure

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris



**Merci pour votre
attention**