



R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 8: Régime permanent sinusoïdal, impédance

EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité
Automne 2025



Rappels



- En grandeur réelle:

Pulsation (= $2\pi f$)

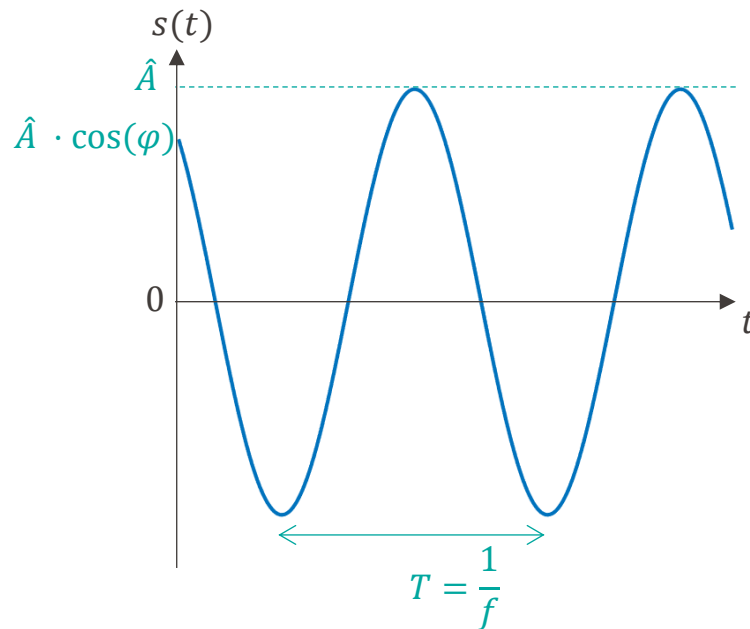
$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude (crête) Phase

$$A = \hat{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (efficace)}$$

- En grandeur complexe:

$$\underline{s}(t) = \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)}$$



- Forme algébrique

$$\underline{z} = x + jy$$

- Forme trigonométrique

$$\underline{z} = \rho(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$$

- Forme exponentielle

$$\underline{z} = \rho e^{j\theta}$$

Voire fiche de
rappel sur Moodle

- $\text{Re}(\underline{z}) = x = \rho \cdot \cos(\theta)$; $\text{Im}(\underline{z}) = y = \rho \cdot \sin(\theta)$

$$|\underline{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \arg(\underline{z}) = \theta$$

- $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$; $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$; $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

$$\square \operatorname{Re}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \operatorname{Re}(\underline{z}_1) + \operatorname{Re}(\underline{z}_2)$$

$$\square \operatorname{Im}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \operatorname{Im}(\underline{z}_1) + \operatorname{Im}(\underline{z}_2)$$

$$\square |\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|$$

$$\square (\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* \cdot \underline{z}_2^*$$

$$\square \arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$$

$$\square \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

Voire fiche de
rappel sur Moodle

$$\square \arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$$

$$\square |\underline{z}^n| = |\underline{z}|^n$$

$$\square \arg(\underline{z}^n) = n \cdot \arg(\underline{z})$$

Nombres complexes – Exemples

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

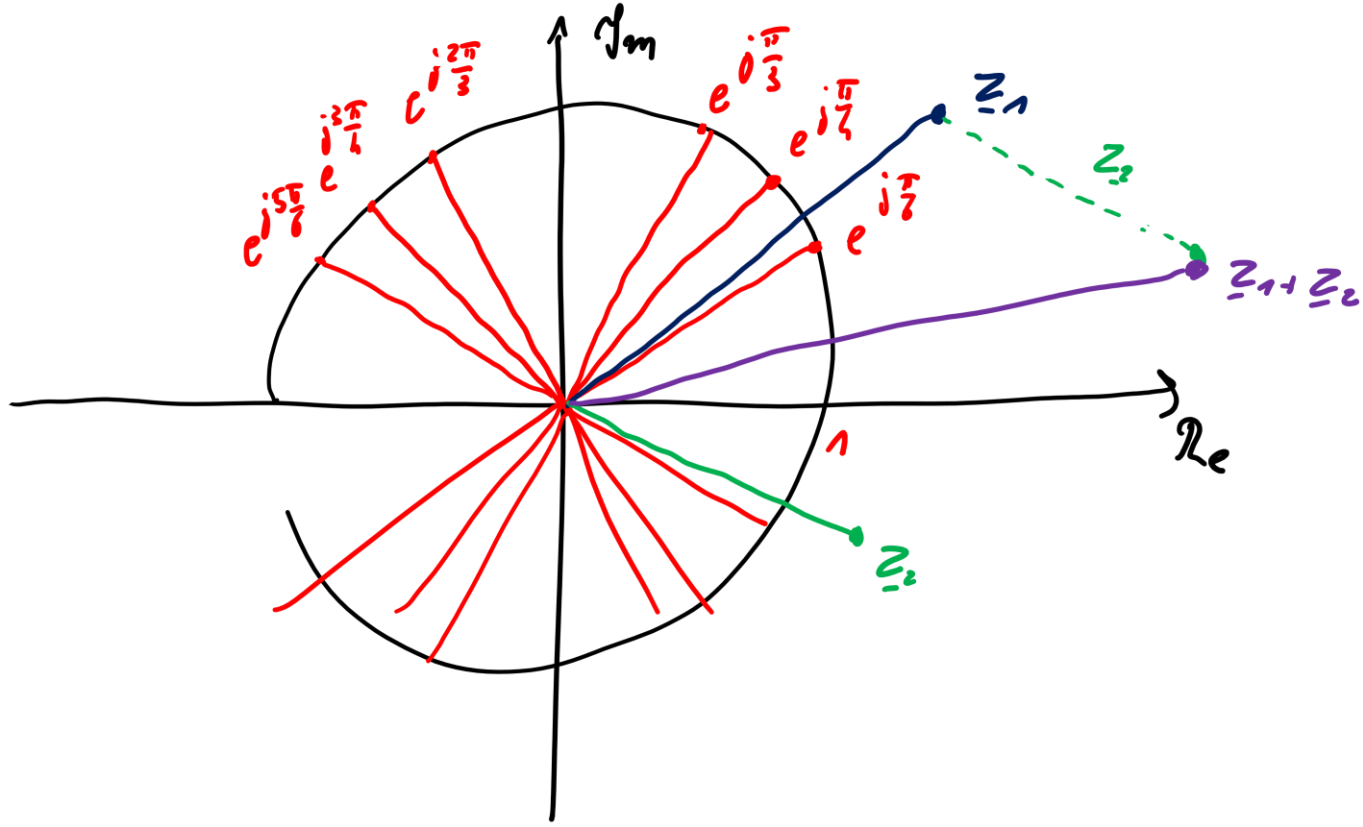
$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Nombres complexes – Exemples



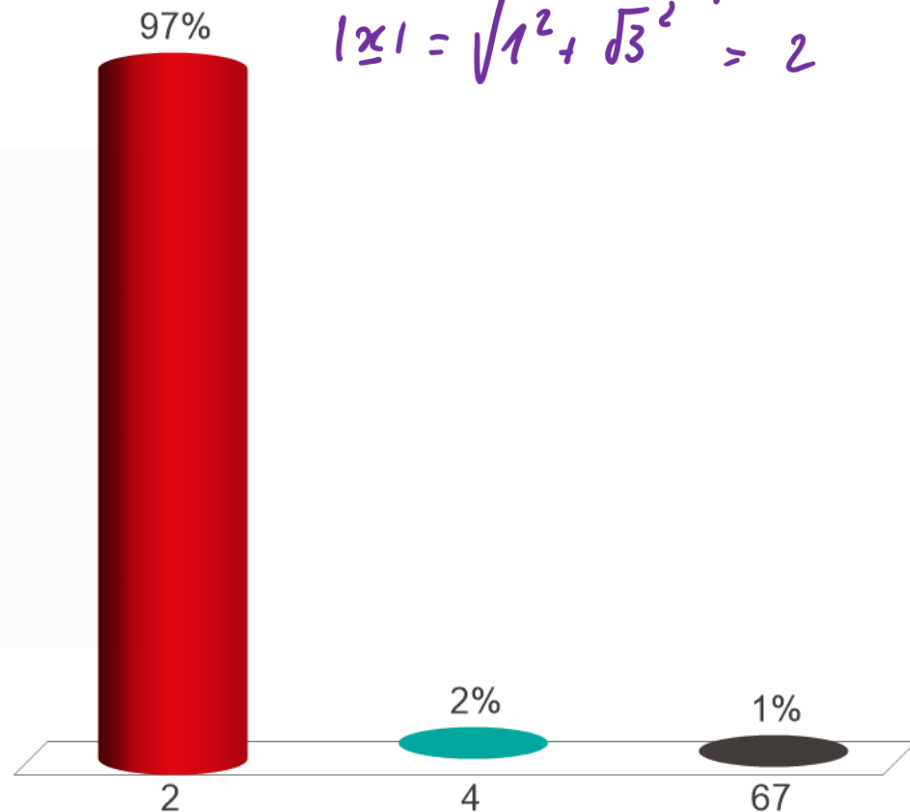


- Rappels - Quel est le module de x ?

$$\underline{x} = 1 + j\sqrt{3}$$

$$|\underline{x}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

Rank	Responses
1	2
2	4
3	67

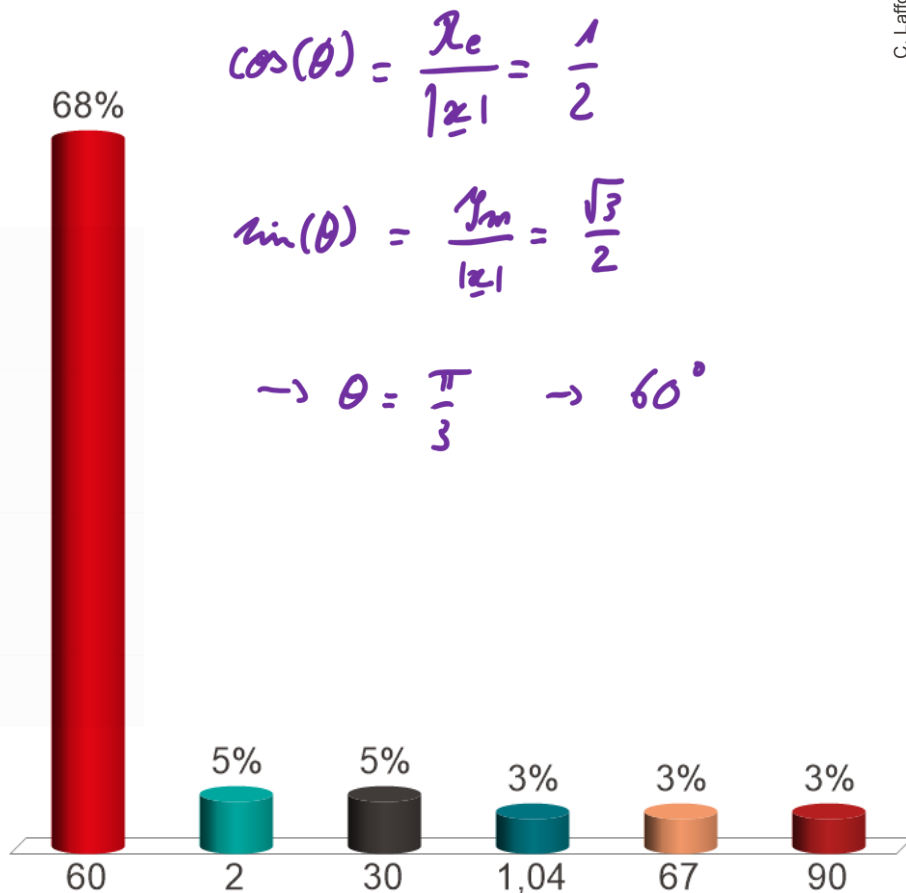




- Rappels - Quel est l'argument de \underline{x} (en degrés)?

$$\underline{x} = 1 + j\sqrt{3}$$

Rank	Responses
1	60
2	2
3	30
4	1,04
5	67
6	90



$$\cos(\theta) = \frac{x_c}{|x|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{x_m}{|x|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow 60^\circ$$



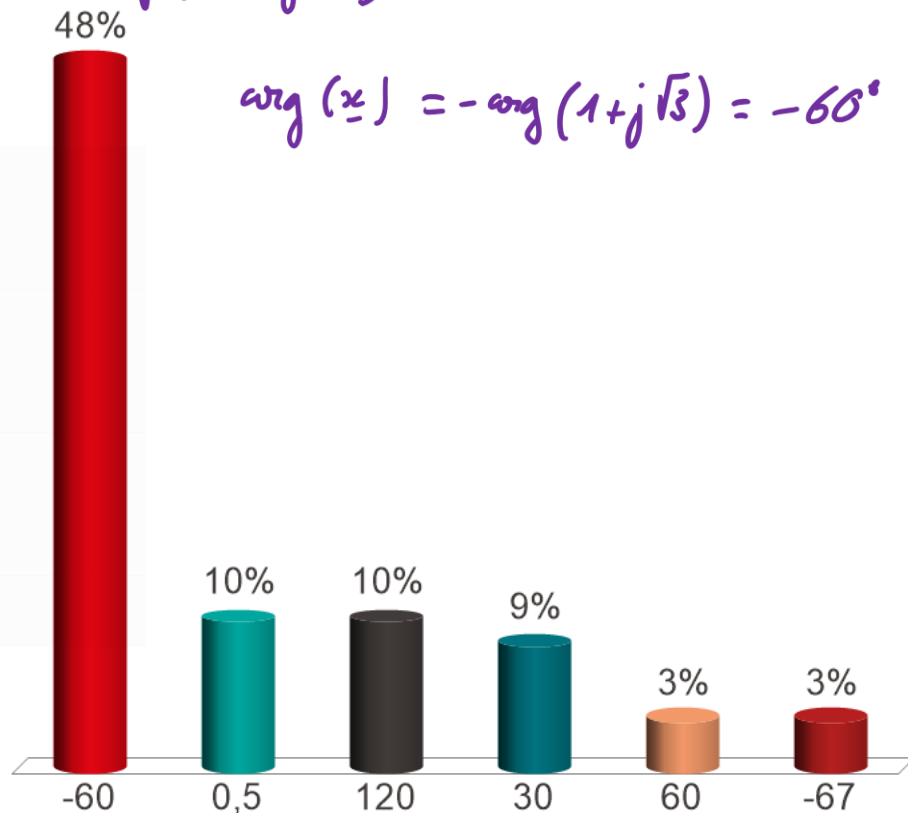
- Rappels - Quel est l'argument de \underline{x} (en degrés)?

$$\underline{x} = \frac{1}{1 + j\sqrt{3}}$$

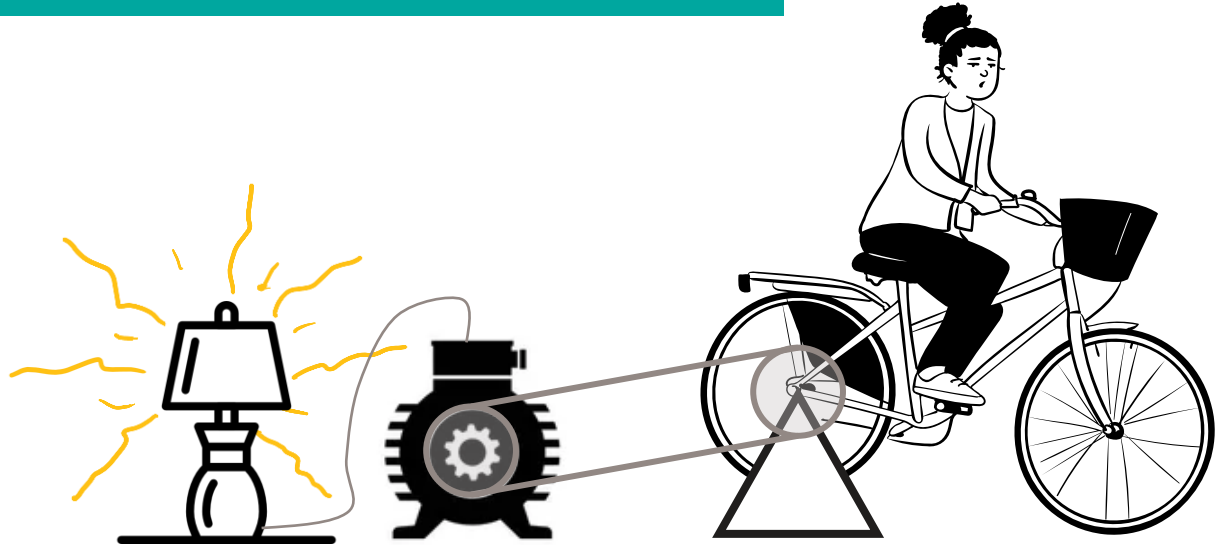
$$\arg(1 + j\sqrt{3}) = 60^\circ$$

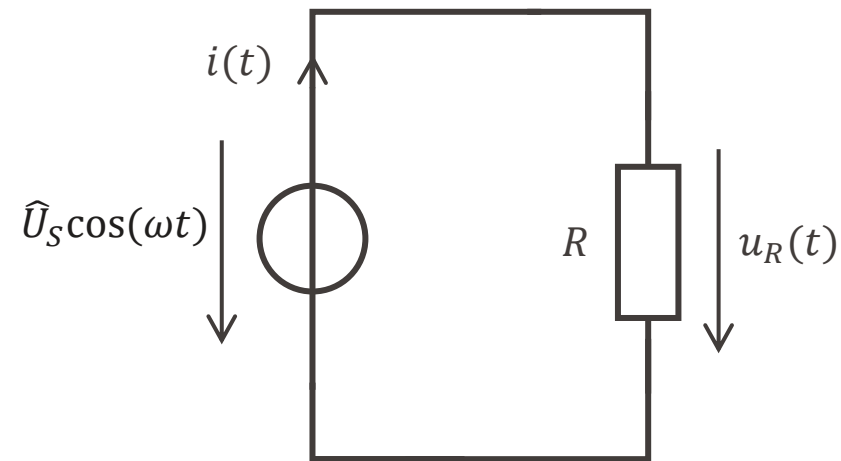
$$\arg(\underline{x}) = -\arg(1 + j\sqrt{3}) = -60^\circ$$

Rank	Responses
1	-60
2	0,5
3	120
4	30
5	60
6	-67



Régime sinusoïdal permanent





Loi des mailles:

$$u_r(t) = \hat{U}_s \cos(\omega t)$$

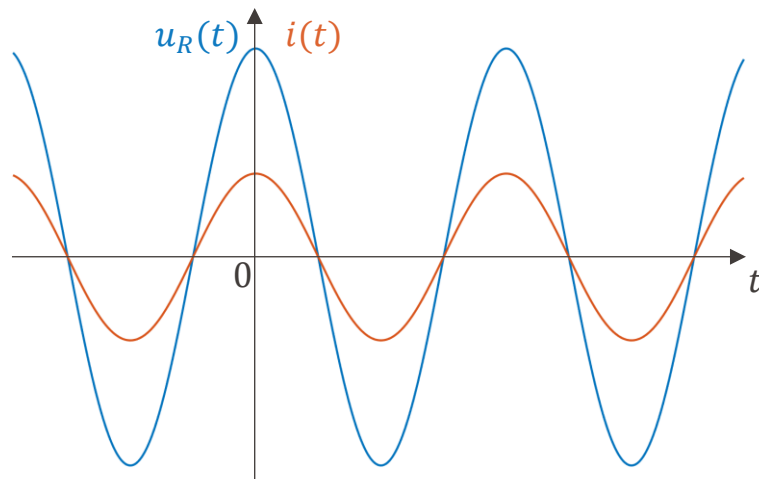
Loi d'Ohm:

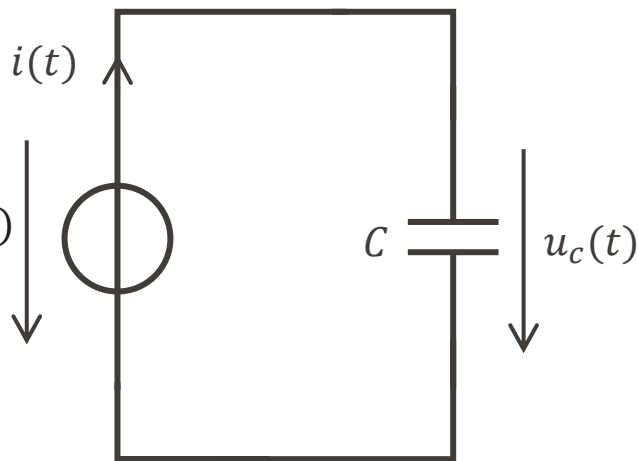
$$u_R(t) = Ri(t)$$

Donc:

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{R} \cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$ rad: courant et tension sont **en phase**





$$\begin{aligned}
 -\sin(\omega t) &= \sin(-\omega t) \\
 &= \cos\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

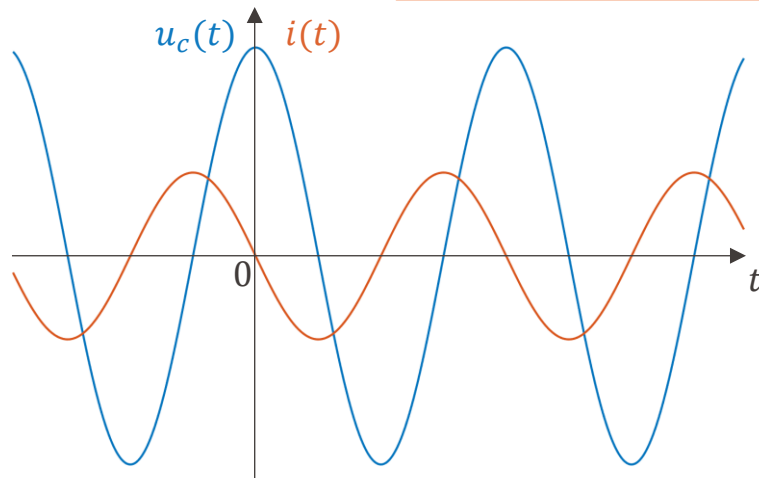
Loi des mailles:
 $u_c(t) = \hat{U}_S \cos(\omega t)$

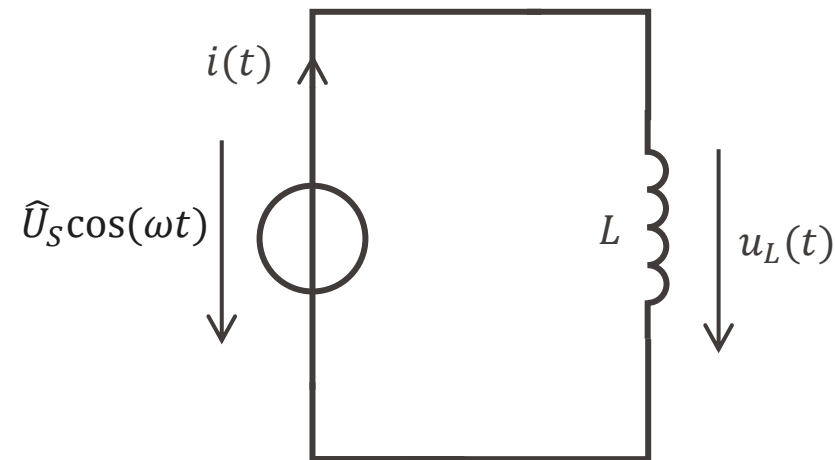
Condensateur:
 $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$

Donc:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= -C\omega \hat{U}_S \sin(\omega t) \\
 i(t) &= C\omega \hat{U}_S \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **avance de phase** sur la tension





Loi des mailles:

$$u_L(t) = \hat{U}_s \cos(\omega t)$$

Inductance:

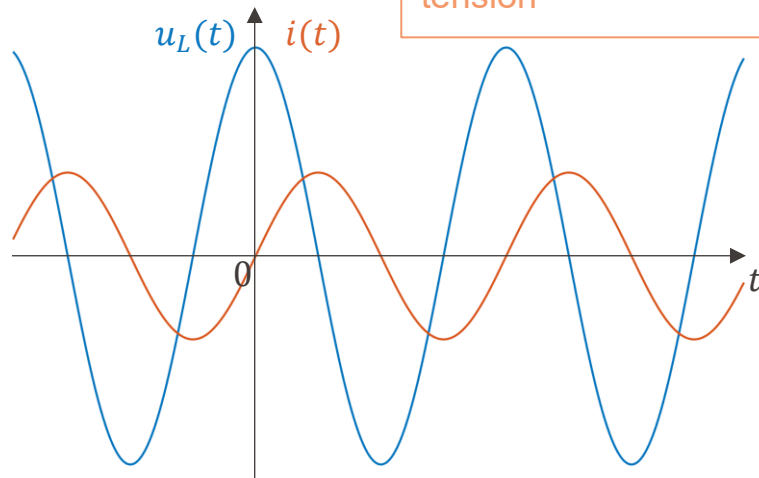
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

Donc:

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{L\omega} \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **retard de phase** sur la tension



- Exemple:

- $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$

- On définit une tension complexe associée:

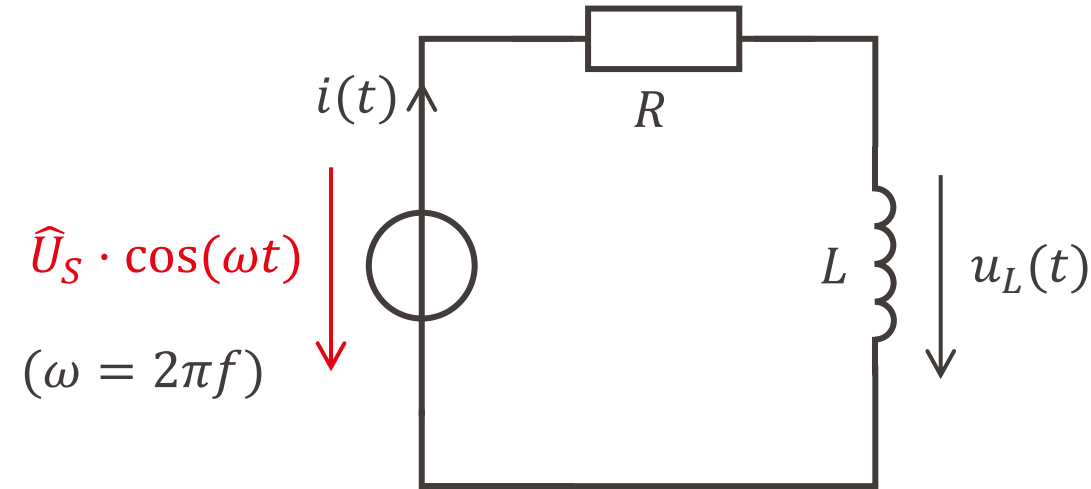
$$\underline{u}(t) = \hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{U} (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$$

- On a alors:

$$u(t) = \text{Re}[\underline{u}(t)]$$

- On peut alors étudier les circuits avec les grandeurs sous forme complexe, et on prend la partie réelle du résultat.

- On modélise un circuit dépendant du temps t :

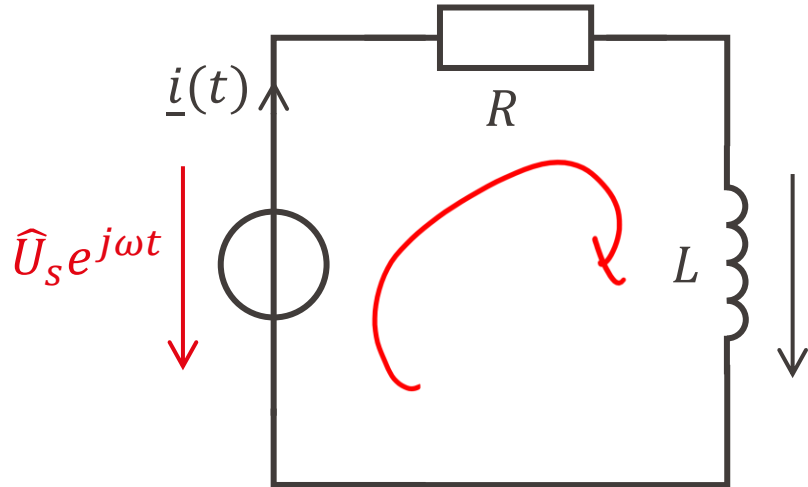


La résolution peut être compliquée.

La solution dépend de la fréquence.

$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}\hat{U}_S \cdot \cos(\omega t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

loi des mailles :

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R \underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

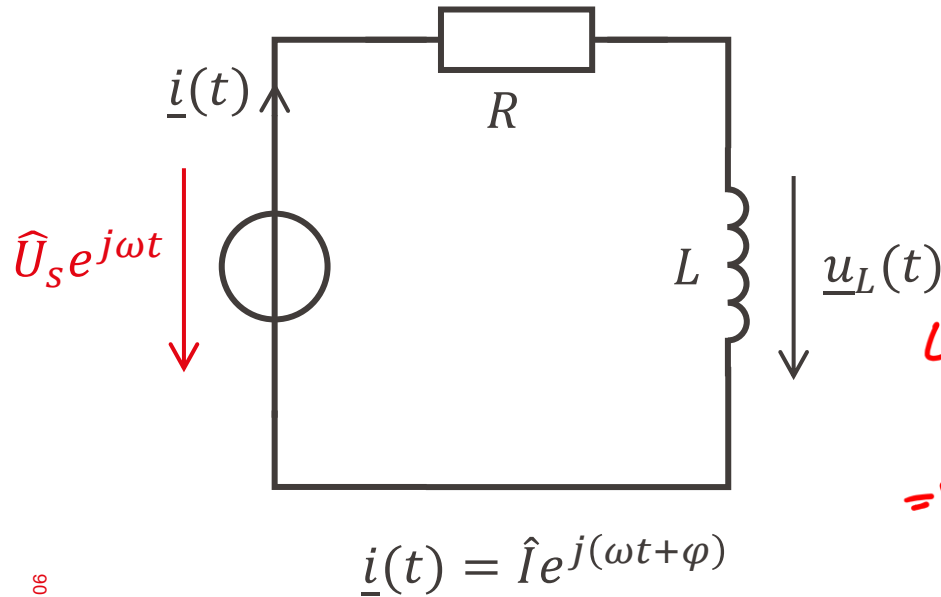
$$\underline{u}_L(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = \hat{I} j\omega e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$" = j\omega \underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = jL\omega \underline{i}(t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R i(t) + jL\omega i(t)$$

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega) i(t)$$

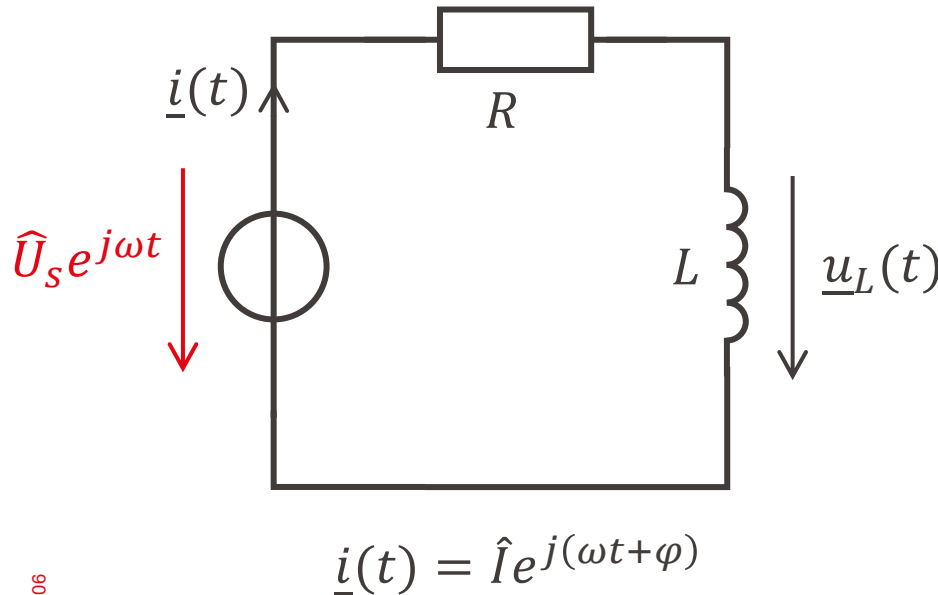
$$i(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$L \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega) \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s = (R + jL\omega) \hat{I} e^{j\varphi}$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



Loi de mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R \underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

Inductance:

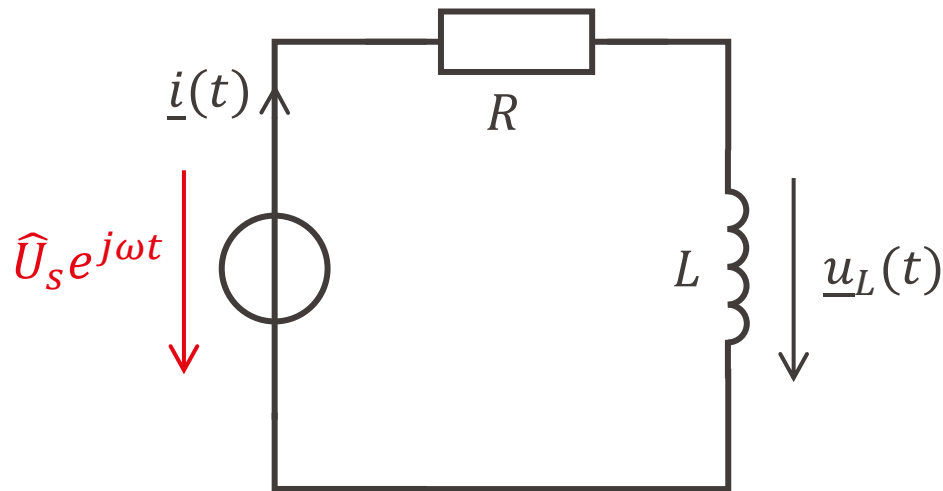
$$\underline{u}_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{u}_L(t) &= L(j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}) \\ \Rightarrow \underline{u}_L(t) &= jL\omega \underline{i}(t) \end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \hat{U}_s e^{j\omega t} &= R \underline{i}(t) + jL\omega \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} &= (R + jL\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \hat{U}_s e^{j\omega t} &= R \underline{i}(t) + jL\omega \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} &= (R + jL\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

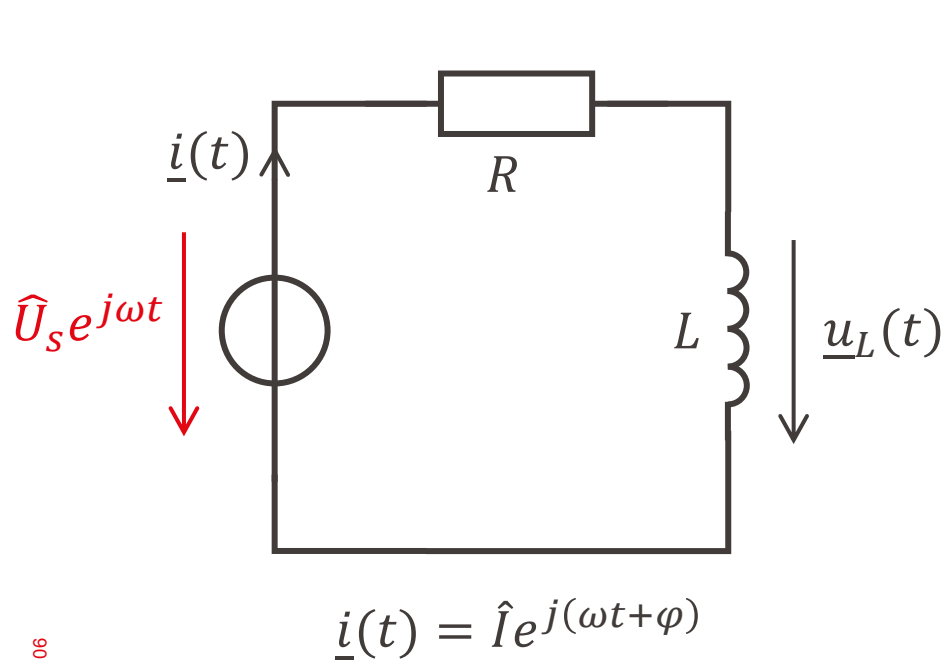
$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

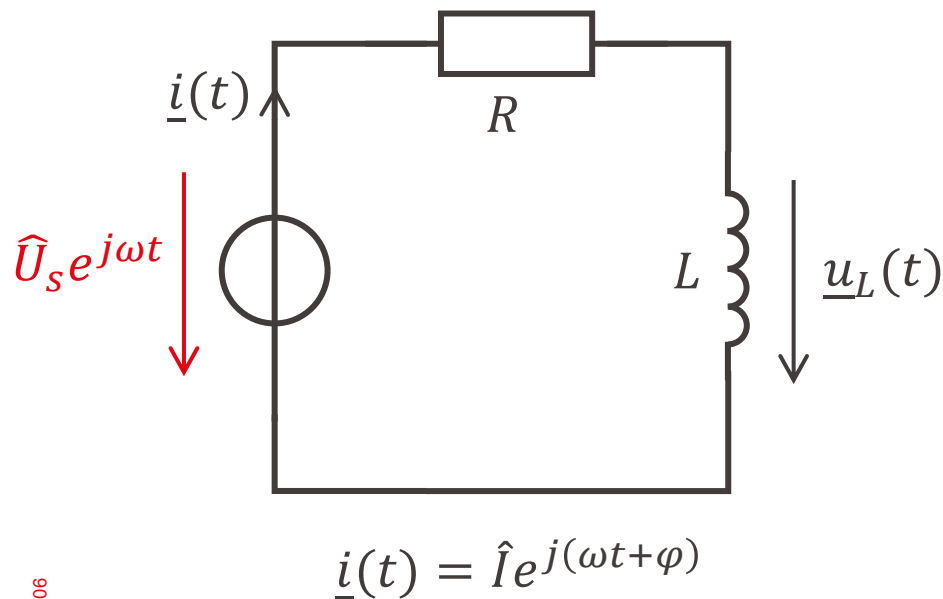
$$\hat{I} = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:

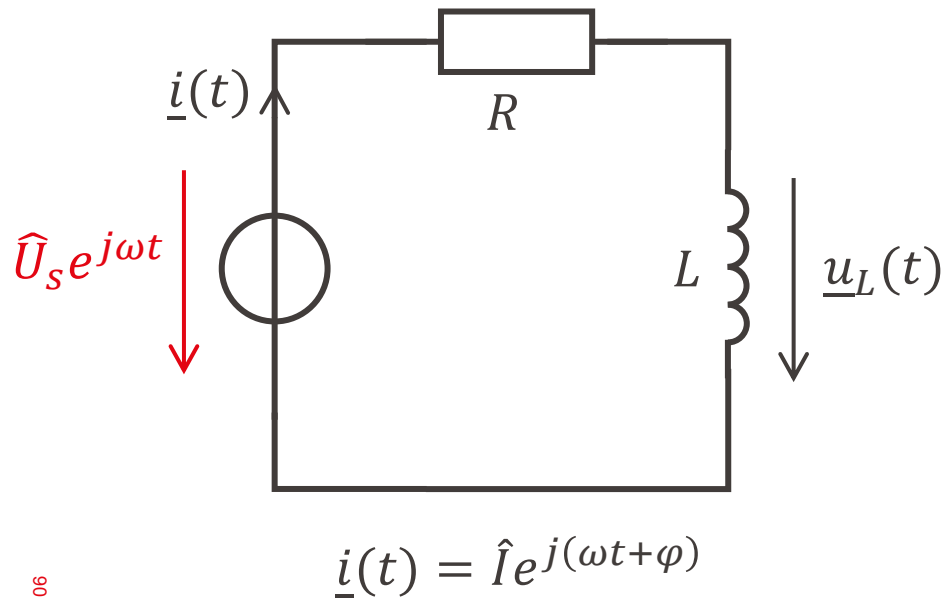


$$\Rightarrow i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R} \omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



On peut trouver la solution sans résoudre d'équation différentielle!

- On voit qu'en régime permanent sinusoïdal il y a deux grandeurs à déterminer:
 - L'amplitude \hat{X}
 - La phase φ
- On définit alors les **phaseurs**:

- $\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$ (phaseur crête)

$\underline{x(t)} = \hat{x}e^{i\omega t}$ (phaseur instantané) tel que $x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$

- $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$ (phaseur efficace)

$\underline{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\hat{X}}$

Charles Proteus Steinmetz
1865-1923
Ingénieur et mathématicien
américain



- Les signaux en régime permanent sinusoïdal sont déterminés par:
 - L'amplitude \hat{X} (ou la valeur efficace, $X = \hat{X}/\sqrt{2}$)
 - La fréquence f (ou la pulsation, $\omega = 2\pi f$)
 - La phase φ
- Un signal sinusoïdal peut être représenté sous forme de nombre complexe
 - On utilise les phaseurs

$$x(t) = \Re\{ \underline{x}(t) \}$$

Phaseur instantané:

$$\underline{x}(t) = \hat{X}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$x(t) = \underline{\hat{X}}e^{j\omega t}$$

Phaseur crête:

$$\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$$

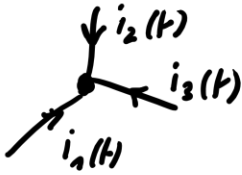
$$\hat{X} = \sqrt{2} X$$

Phaseur efficace:

$$\underline{X} = Xe^{j\varphi}$$



Lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal



$$i_1(t) = \hat{I}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2(t) = \hat{I}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$i_3(t) = \hat{I}_3 \cos(\omega t + \varphi_3)$$

$$\rightarrow i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \varphi) &= \cos(\omega t) \cos(\varphi) \\ &\quad - \sin(\omega t) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\hat{I}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{I}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \hat{I}_3 \cos(\omega t + \varphi_3) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{I}_1 \cos(\varphi_1) \cos(\omega t) + \hat{I}_2 \cos(\varphi_2) \cos(\omega t) + \hat{I}_3 \cos(\varphi_3) \cos(\omega t) \\ - \hat{I}_1 \sin(\varphi_1) \sin(\omega t) - \hat{I}_2 \sin(\varphi_2) \sin(\omega t) - \hat{I}_3 \sin(\varphi_3) \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\omega t) [\hat{I}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{I}_2 \cos(\varphi_2) + \hat{I}_3 \cos(\varphi_3)] \\ - \sin(\omega t) [\hat{I}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{I}_2 \sin(\varphi_2) + \hat{I}_3 \sin(\varphi_3)] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\bullet \omega t = 0$$

$$\hat{I}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{I}_2 \cos(\varphi_2) + \hat{I}_3 \cos(\varphi_3) = 0$$

$$\Re \left\{ \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 \right\} = 0$$

$$\bullet \omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{I}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{I}_2 \sin(\varphi_2) + \hat{I}_3 \sin(\varphi_3) = 0$$

$$\Im \left\{ \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 0$$

- Les lois de Kirchhoff fonctionnent exactement de la même manière en formalisme complexes

- La loi des nœuds exprime mathématiquement la conservation de la matière
 - Ici, conservation de la matière \Leftrightarrow conservation du courant

La somme des courants passants par un nœud est nulle.

N branches

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

Courant dans la
branche k

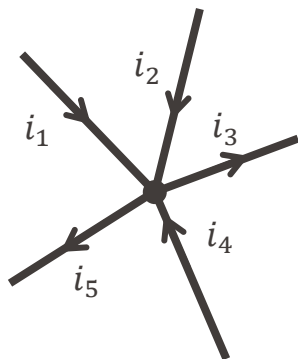
La somme des courants passants par un nœud est nulle.

N branches

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

Courant dans la
branche k

- Attention au signe des courants
 - Courant qui va « vers » le nœud s'ajoute (+)
 - Courant qui va « hors » du nœud se soustrait (-)

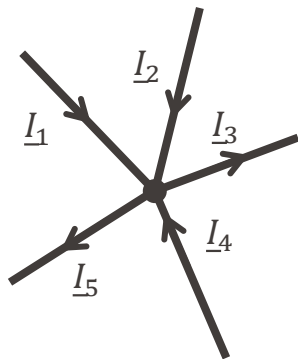


$$i_1 + i_2 + i_4 - i_3 - i_5 = 0$$

« Vers » le nœud « Hors » du nœud

$$i_1 + i_2 + i_4 = i_3 + i_5$$

Courant entrant Courant sortant



$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_4} - \underline{I_3} - \underline{I_5} = 0$$

« Vers » le nœud « Hors » du nœud

$$\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_4} = \underline{I_3} + \underline{I_5}$$

Courant entrant Courant sortant

- La loi des mailles exprime mathématiquement la conservation de l'énergie
 - Ici, conservation de l'énergie \Leftrightarrow Pas de différence de potentiel en un point unique

La somme des tensions le long d'une maille est nulle.

N dipôles dans la maille

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0$$

Tension aux bornes du dipôle k

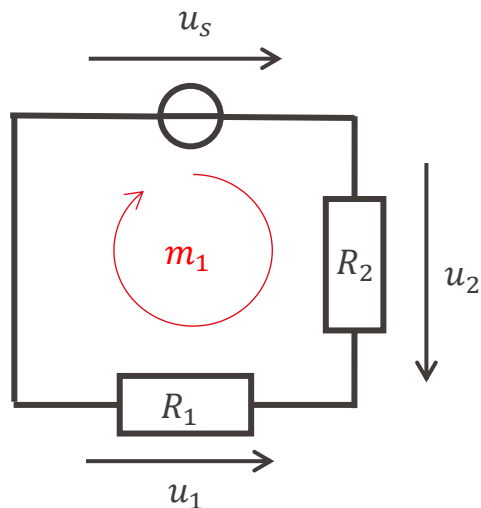
La somme des tensions le long d'une maille est nulle.

N dipôles dans la maille

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0$$

Tension aux bornes du dipôle k

- Attention au signe des tensions
 - Il faut définir un sens de lecture de la maille
 - Tension dans le sens de lecture s'ajoute (+)
 - Tension dans le sens opposé de la lecture se soustrait (-)



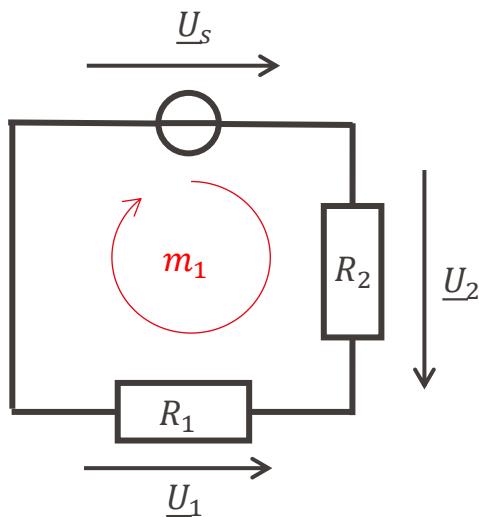
Loi des mailles dans m_1 :

$$u_s + u_2 - u_1 = 0$$

Dans le
sens de m_1

Dans le sens
opposé à m_1

Astuce: fonctionnement similaire à la relation de Chasles. On part d'un point et on suit les « vecteurs » de tensions jusqu'à revenir au point de départ



Loi des mailles dans m_1 :

$$\underline{U}_s + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0$$

Dans le
sens de m_1

Dans le sens
opposé à m_1

Astuce: fonctionnement similaire à la relation de Chasles. On part d'un point et on suit les « vecteurs » de tensions jusqu'à revenir au point de départ

- Les lois de Kirchhoff s'appliquent de la même manière sur les phaseurs complexes
 - Loi des nœuds
 - Loi des mailles

N branches

$$\sum_{k=1}^N \underline{I}_k = 0$$

Courant dans la
branche k

N dipôles dans la
maille

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k = 0$$

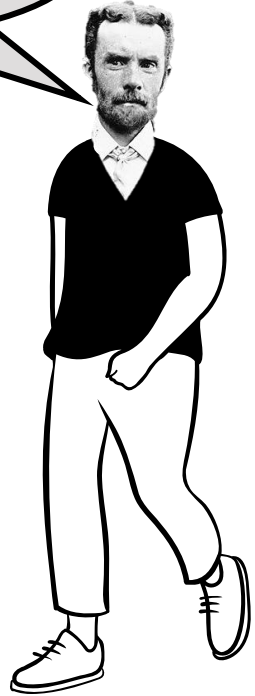
Tension aux bornes
du dipôle k

Loi d'Ohm en régime sinusoïdal: Impédance



A la bonne heure!

Georg, ta formule marche aussi
pour \underline{m} et $\text{---}||\text{---}$!!!



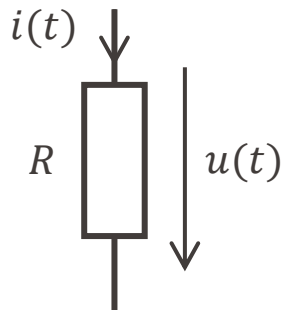
Signaux alternatifs – la résistance



$$u(t) = R i(t) \quad (u(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{u}(t) \})$$

$$\underline{u}(t) = R \underline{i}(t)$$

$$\underline{U} = R \underline{I} \quad (\underline{u}(t) = \sqrt{2} \underline{U} e^{j\omega t})$$



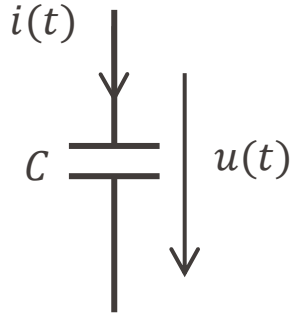
$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R$$

\underline{U} et \underline{I} sont proportionnels



$$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$$

$$\rightarrow \underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}}{dt}(t) \quad \leftarrow \text{équ. dif. } \ddot{\quad}$$



$$\underline{i}(t) = C j\omega \underline{u}(t)$$

$$\underline{i}(t) = jC\omega \underline{u}(t)$$

$$\underline{I} = jC\omega \underline{U}$$

$$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$$

$$\leftarrow \underline{U} \text{ et } \underline{I} \text{ proportionnels } \ddot{\quad}$$



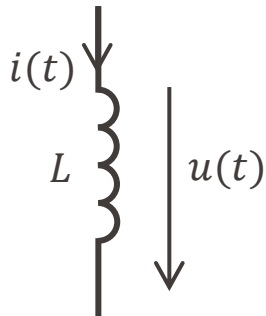
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\underline{u}(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt}$$

$$\underline{u}(t) = jL\omega \underline{i}(t)$$

$$\underline{U} = jL\omega \underline{I}$$

$\leftarrow U$ et \underline{I} proportionnel \ddot{i}



- On remarque que dans tous les cas, tension et courant **sous leur forme de phaseur** sont proportionnels
 - En formalisme complexe, on obtient aussi une forme de loi d'Ohm!
 - Cette loi s'écrit $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$

- \underline{Z} est appelée **impédance**

- Pour une résistance:

$$\underline{Z} = R$$

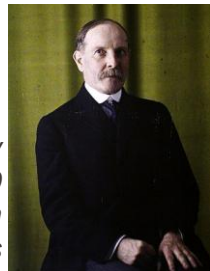
- Pour un condensateur:

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

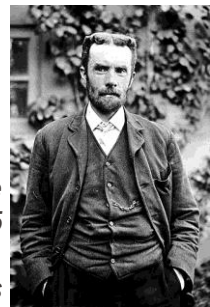
- Pour une inductance:

$$\underline{Z} = jL\omega$$

Arthur Edwin Kennelly
1861-1939
Ingénieur, mathématicien
irlandais



Oliver Heaviside
1850-1925
Ingénieur, physicien,
mathématicien anglais



- Propriétés

- L'impédance \underline{Z} est un nombre complexe
- Elle dépend de la pulsation (et donc de la fréquence)
- Elle est homogène à des ohms (Ω)

- Exemples

- Un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$ à une pulsation $\omega = 250 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j20 \cdot 10^{-6} \cdot 250} = \frac{1}{j} \cdot 200 \Omega = -j200 \Omega$$

$$\left(\frac{1}{j} = \frac{j}{j} \cdot \frac{1}{j} = -j \right)$$

- Une inductance $L = 30 \mu\text{H}$ à une pulsation $\omega = 250 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\underline{Z}_L = jL\omega = j30 \cdot 10^{-6} \cdot 250 = j7,5 \text{ m}\Omega$$

- Grandeurs associées:
 - On peut aussi écrire




$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

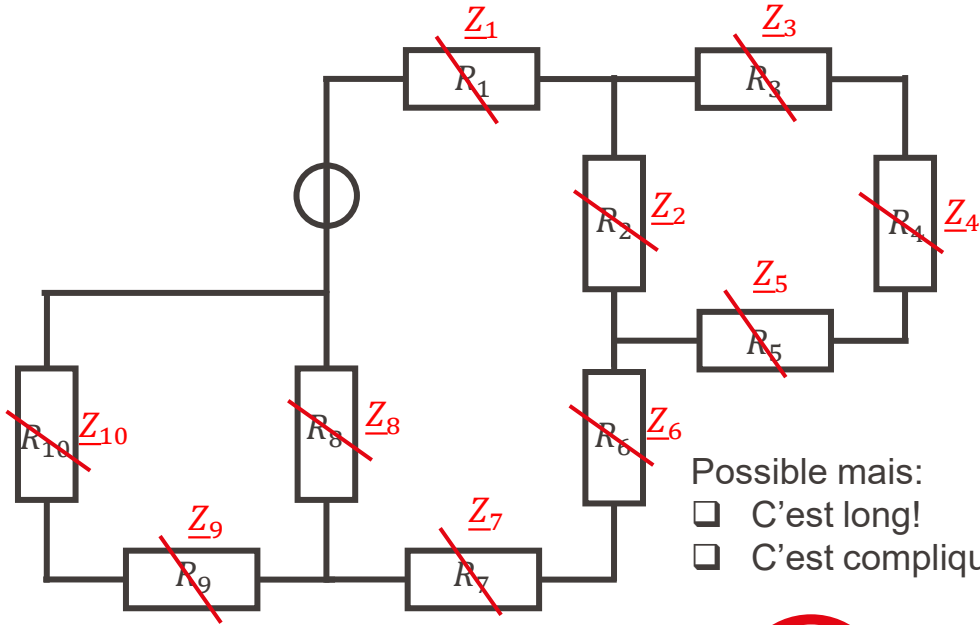
- \underline{Y} est appelée **admittance**
- L'impédance \underline{Z} peut avoir une partie réelle et/ou une partie imaginaire

$$\underline{Z} = R + jX$$

- La partie réelle R est appelée **résistance**
- La partie imaginaire X est appelée **réactance**

Composant	Loi	\underline{Z}	$ \underline{Z} $	$\arg(\underline{Z})$
Résistance  R	$u(t) = Ri(t)$	R	R	0
Condensateur  C	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$	$\frac{1}{jC\omega}$	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
Inductance  L	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$jL\omega$	$L\omega$	$\frac{\pi}{2}$

Agencements de résistances



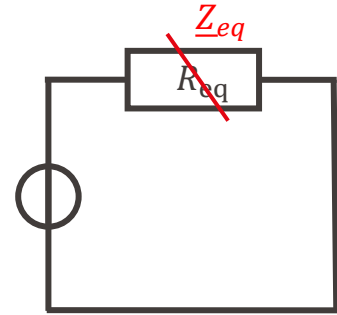
Possible mais:

- C'est long!
- C'est compliqué!



Circuit équivalent:

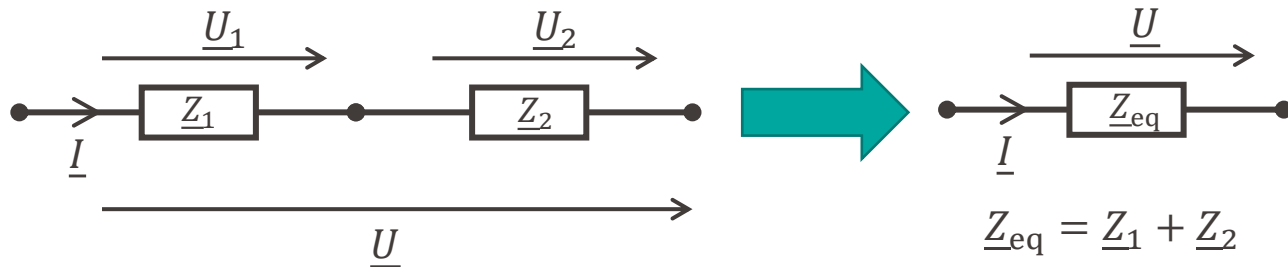
- Beaucoup plus facile!



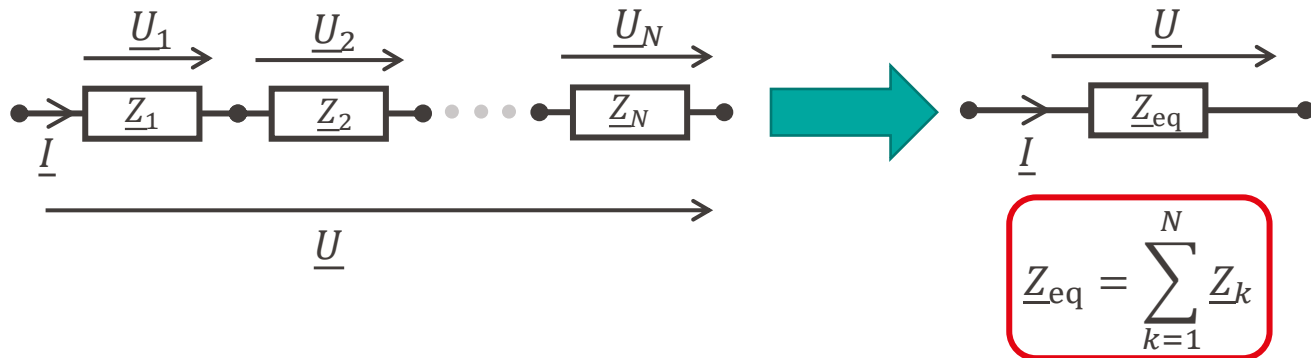
Agencement en série

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ &= \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} \end{aligned}$$

- Deux impédances en série s'additionnent: $\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}$



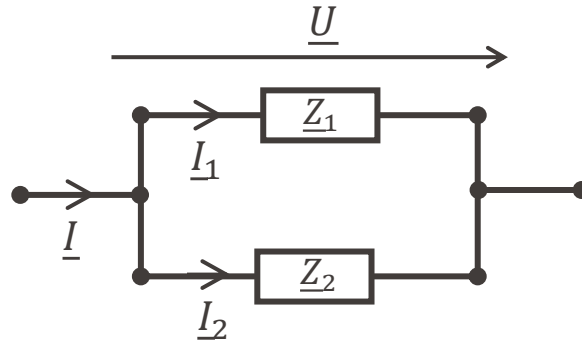
- Plus généralement:



Agencement en parallèle

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ &= \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} \\ \underline{I} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U}\end{aligned}$$

- Deux impédances en parallèle: les admittances s'ajoutent



$$\underline{U} = \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{I}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_{\text{eq}} \underline{U}$$

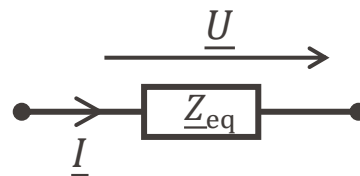
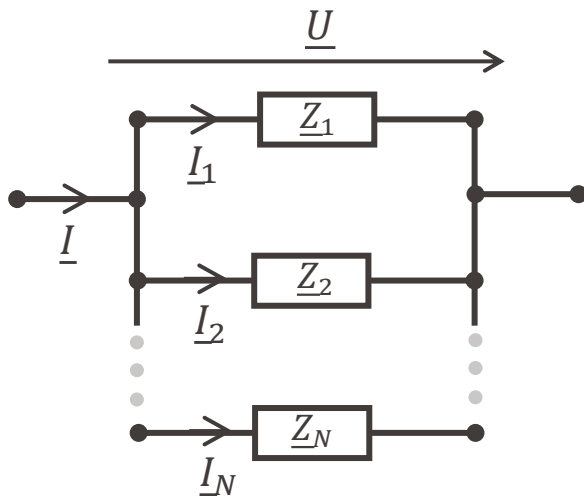
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

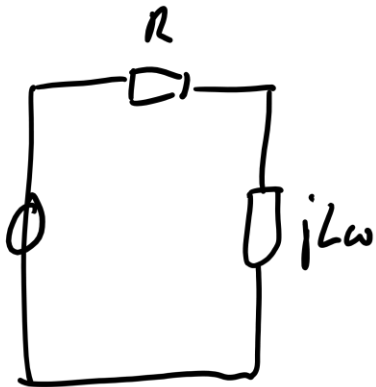
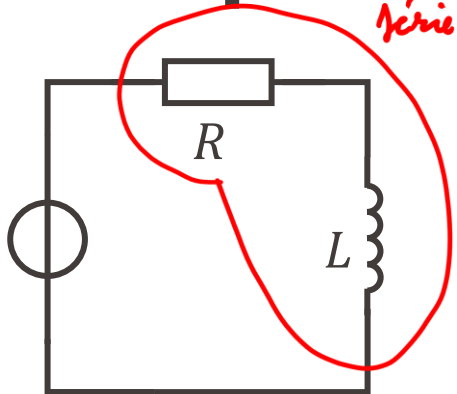
Agencement en parallèle

- Plus généralement:

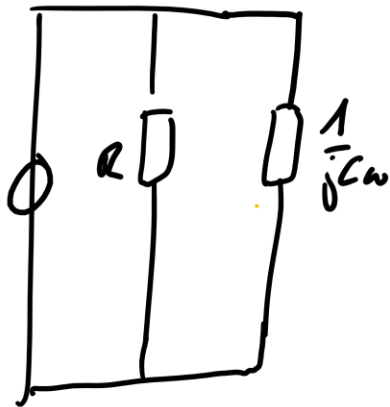
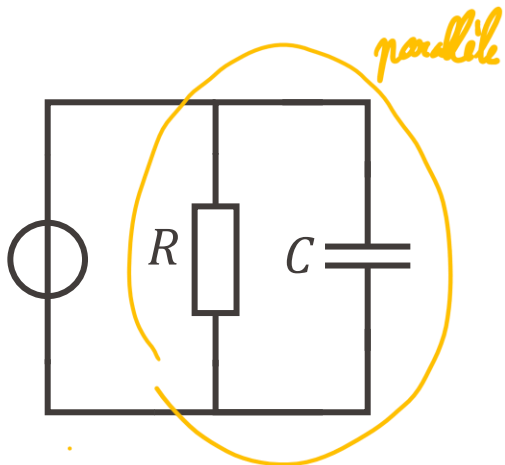


$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k} \quad / \quad \underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$$

Exemples



$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = R + jL\omega$$



$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

- La loi d'Ohm s'applique sur les phaseurs complexes
 - La résistance devient l'impédance
 - L'impédance est un nombre complexe et est une fonction de la fréquence

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$|\underline{Z}| = \frac{U}{I}$$

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$$

- Les agencements d'impédances suivent les mêmes règles que les résistances

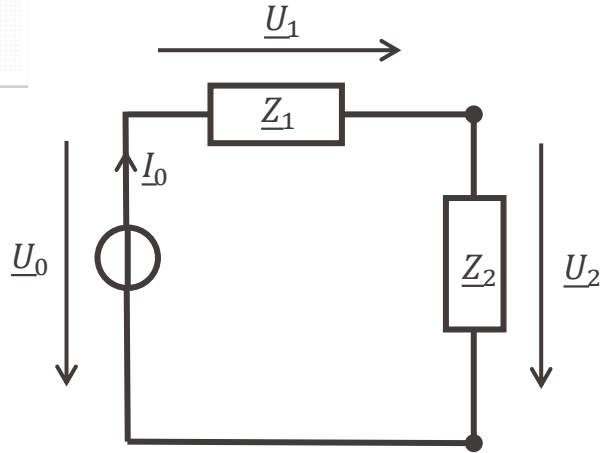
En série:

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

En parallèle:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k} \quad / \quad \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$$

Application



diviseur de tension \longrightarrow

loi des mailles :

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_0 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_0$$

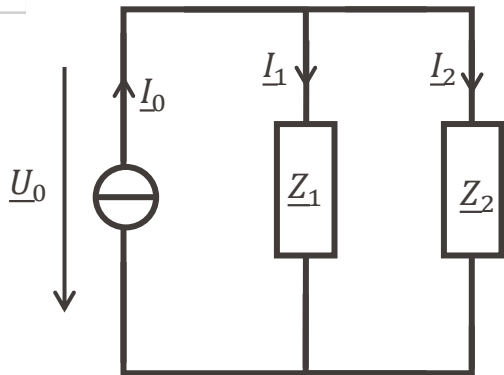
$$\Rightarrow \underline{I}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$$

loi d'Ohm :

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_0$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$$

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow \underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0 \end{array} \right.$$



diviseur de courant \rightarrow

loi des nœuds:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_0 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U}_0$$

$$\Rightarrow \underline{U}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_0 = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$$

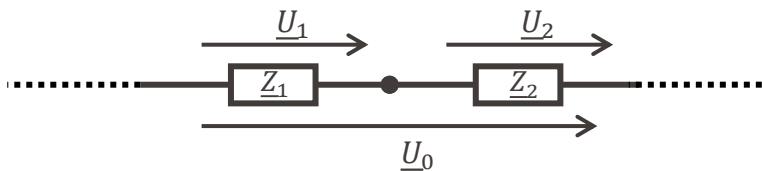
loi d'Ohm:

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

$$\Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{U}_0 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0 \quad \Bigg| \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$$

- Comme les lois de Kirchhoff et d'Ohm marchent avec les phaseurs:
 - La formule du diviseur de tension est valide
 - La formule du diviseur de courant est valide

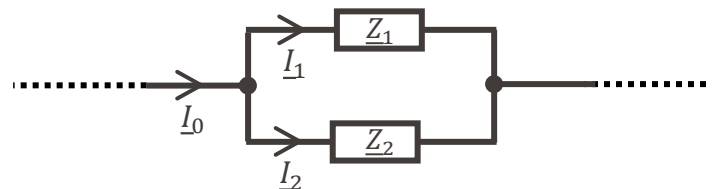
En série:



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$$

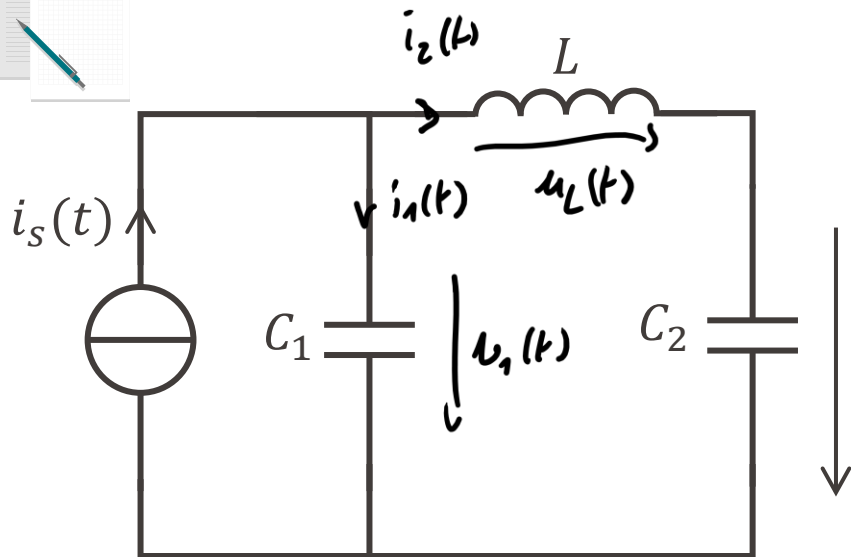
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_0$$

En parallèle:



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_0$$

but : trouver $u_2(t)$ 

$$i_s(t) = I_s \cos(\omega t)$$

$$\bullet i_s(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$i_s(t) = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + C_2 \frac{du_2(t)}{dt}$$

$$\bullet u_1(t) = u_L(t) + u_2(t)$$

$$= L \frac{di_2(t)}{dt} + u_2(t)$$

$$u_1(t) = LC_2 \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + u_2(t)$$

Exemple

$$\Rightarrow i_S(t) = LC_1C_2 \frac{d^3 u_2(t)}{dt^3} + (C_1 + C_2) \frac{du_2(t)}{dt}$$

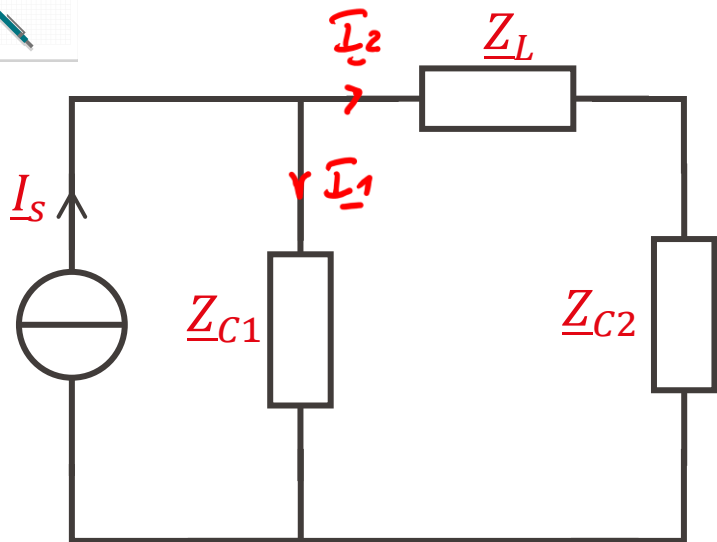
?



Exemple



Exemple



$$\underline{Z}_L = jL\omega \quad ; \quad \underline{Z}_{C1} = \frac{1}{jC_1\omega} \quad ; \quad \underline{Z}_{C2} = \frac{1}{jC_2\omega}$$

• diviseur de courant :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_L} \cdot \underline{I}_S$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} + jL\omega} \underline{I}_S$$

$$\times (jC_1\omega)(jC_2\omega)$$

$$\times (jC_1\omega)(jC_2\omega)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{jC_2\omega}{j(C_1+C_2)\omega - jLC_1C_2\omega^3} \underline{I}_S$$

Exemple

loi d'Ohm : $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{Ce} \underline{I}_2$

$$= \frac{1}{jC_2\omega} \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega - jLC_1C_2\omega^3} \underline{I}_s$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{(C_1 + C_2)\omega - LC_1C_2\omega^3} \underline{I}_s e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{(C_1 + C_2)\omega - LC_1C_2\omega^3} \frac{1}{I_s} \underbrace{\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})}_{= \sin(\omega t)}$$

$$\underline{I}_s = I_s \quad i_s(t) = \hat{I}_s \cos(\omega t)$$

Exemple

$$i_s(t) = LC_1C_2 \frac{d^3u_2}{dt^3}(t) + (C_1+C_2) \frac{du_2}{dt}(t)$$

$$\frac{du_2}{dt}(t) = \frac{\hat{I}_s}{(C_1+C_2)\omega - LC_1C_2\omega^3} \omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^3u_2}{dt^3}(t) = \frac{\hat{I}_s}{(C_1+C_2)\omega - LC_1C_2\omega^3} (-\omega^3) \cos(\omega t)$$

$$LC_1C_2 \frac{d^3u_2}{dt^3}(t) + (C_1+C_2) \frac{du_2}{dt}(t) = \frac{\hat{I}_s}{(C_1+C_2)\omega - LC_1C_2\omega^3} \left(-\omega^3 LC_1C_2 + \omega(C_1+C_2) \right) \cos(\omega t)$$

$$\llcorner = \frac{\hat{I}_s}{(C_1+C_2)\omega - LC_1C_2\omega^3} \omega \cos(\omega t)$$

$$\llcorner = i_s(t)$$

Exemple



Exemple



Pour aller plus loin



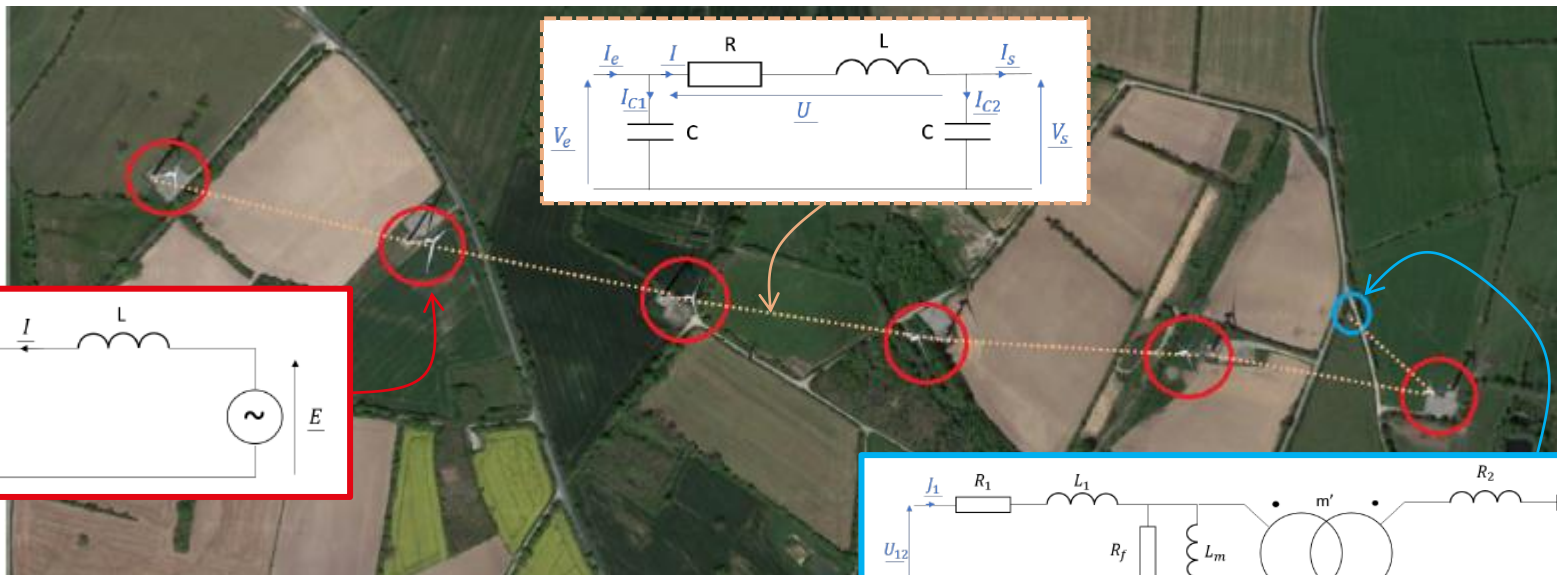
- Le formalisme complexe s'applique à des systèmes réels, même à grande échelle
- Par exemple: systèmes de production d'électricité



Pour aller plus loin



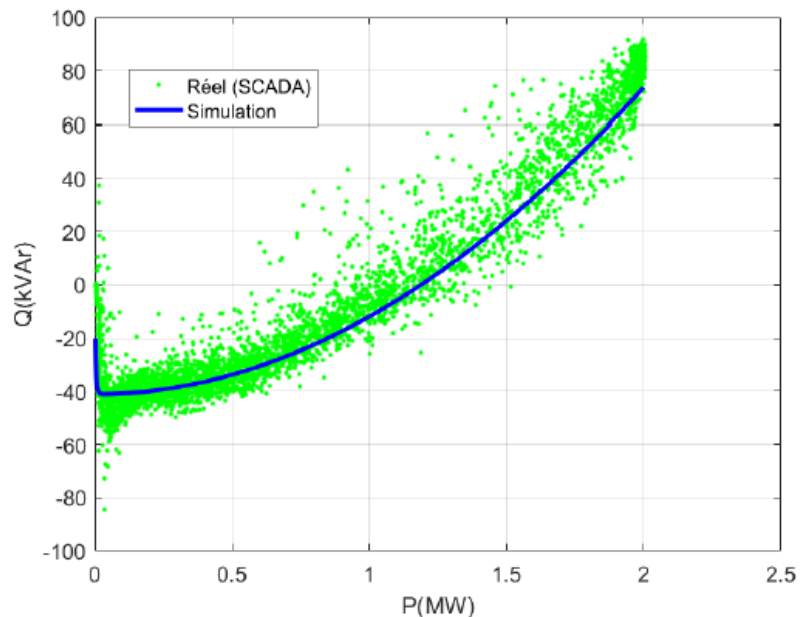
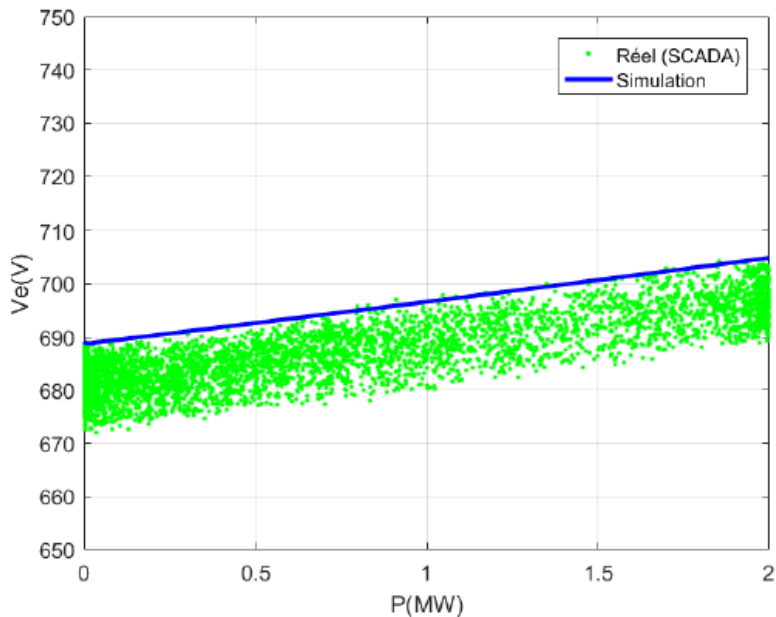
Parc éolien de Chauvé, France



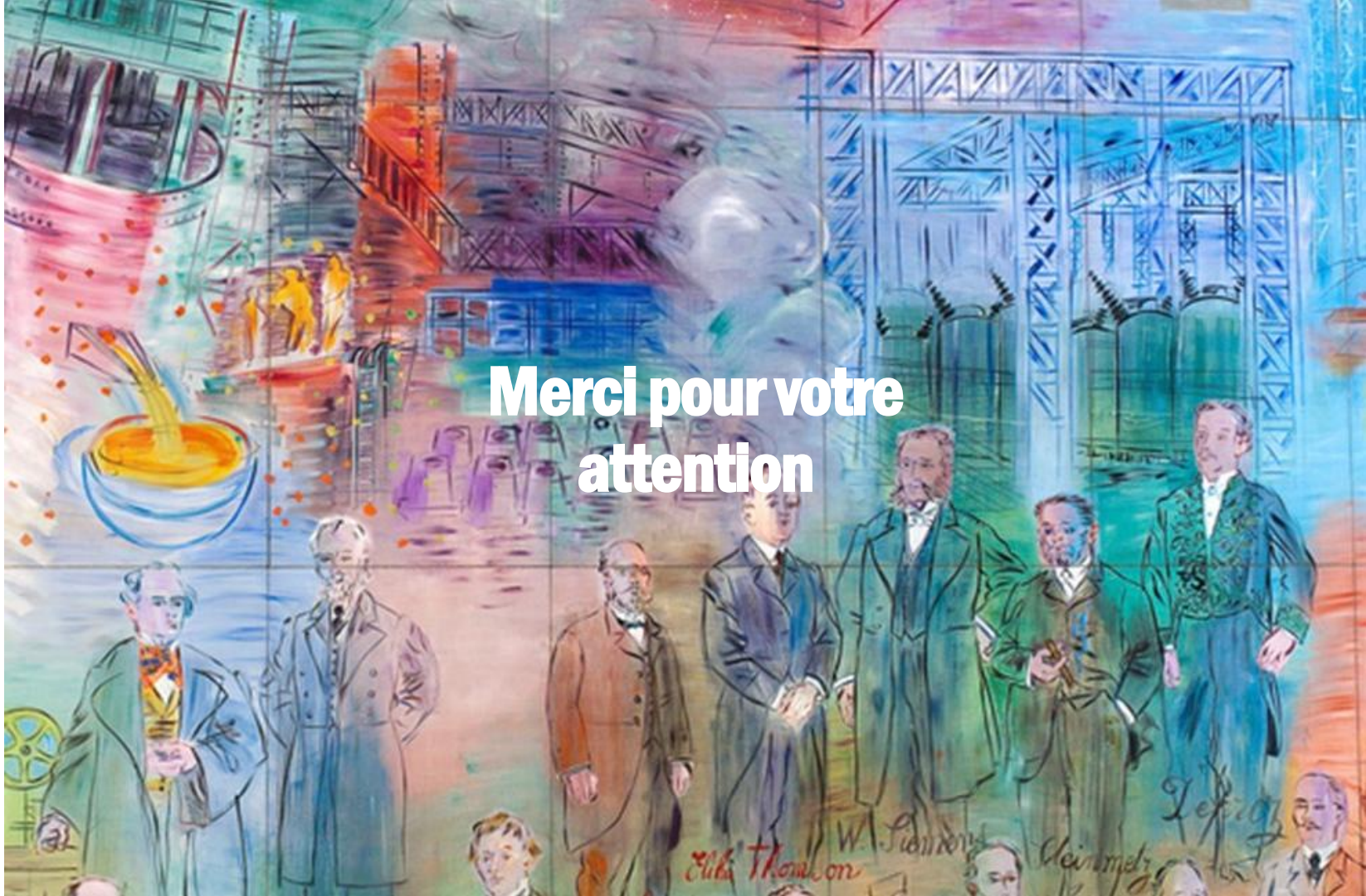
Pour aller plus loin



- Les modèles permettent de prévoir la production du parc
- Ils permettent aussi de détecter des problèmes de fonctionnement
- Ils permettent de concevoir des systèmes complexes



R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris



Merci pour votre
attention

Edis Thomson

W. Siemens

Heinrich

Leprieux

Edis