EPFL

Cours 8: Régime permanent sinusoïdal, impédance

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2025

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rappels

Signal sinusoïdal

- En grandeur réelle:

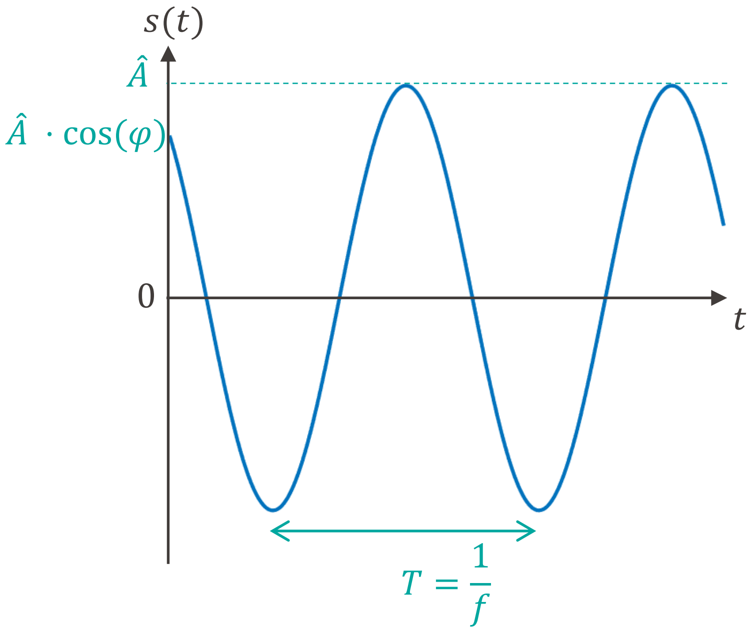
  Pulsation ($= 2\pi f$)

  - $s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

  Amplitude (crête)

  Phase

- En grandeur complexe:
  - $\underline{s}(t) = \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)}$



Rappels sur les nombres complexes

- Forme algébrique

$$\underline{z} = x + jy$$

- Forme trigonométrique

$$\underline{z} = \rho\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right)$$

- Forme exponentielle

$$\underline{z} = \rho e^{j\theta}$$

Voire fiche de rappel sur Moodle

- $\mathrm{Re}\left(\underline{z}\right) = x = \rho \cdot \cos(\theta) \quad ; \quad \mathrm{Im}\left(\underline{z}\right) = y = \rho \cdot \sin(\theta)$

  $\left|\underline{z}\right| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \arg\left(\underline{z}\right) = \theta$

- $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \quad ; \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Rappels sur les nombres complexes

C. Lafforgue

- $\mathrm{Re}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \mathrm{Re}(\underline{z}_1) + \mathrm{Re}(\underline{z}_2)$
- $\mathrm{Im}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \mathrm{Im}(\underline{z}_1) + \mathrm{Im}(\underline{z}_2)$
- $|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|$
- $(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* \cdot \underline{z}_2^*$
- $\arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$
- $\left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$
- $\arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$
- $|\underline{z}^n| = |\underline{z}|^n$
- $\arg(\underline{z}^n) = n \cdot \arg(\underline{z})$

Voire fiche de rappel sur Moodle

Nombres complexes – Exemples

Nombres complexes – Exemples

- Rappels - Quel est le module de $\underline{x}$?

$$\underline{x} = 1 + j\sqrt{3}$$

Rank	Responses
1	

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels - Quel est l'argument de $\underline{x}$ (en degrés)?

$$\underline{x} = 1 + j\sqrt{3}$$

Rank	Responses
1	

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

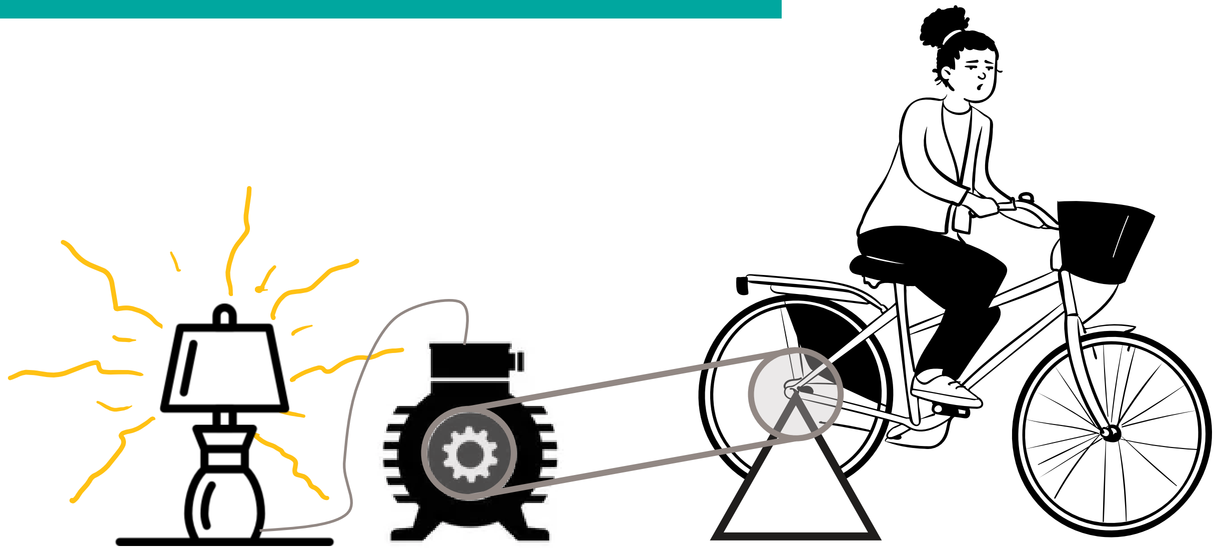
- Rappels - Quel est l'argument de $\underline{x}$ (en degrés)?

$$\underline{x} = \frac{1}{1 + j\sqrt{3}}$$

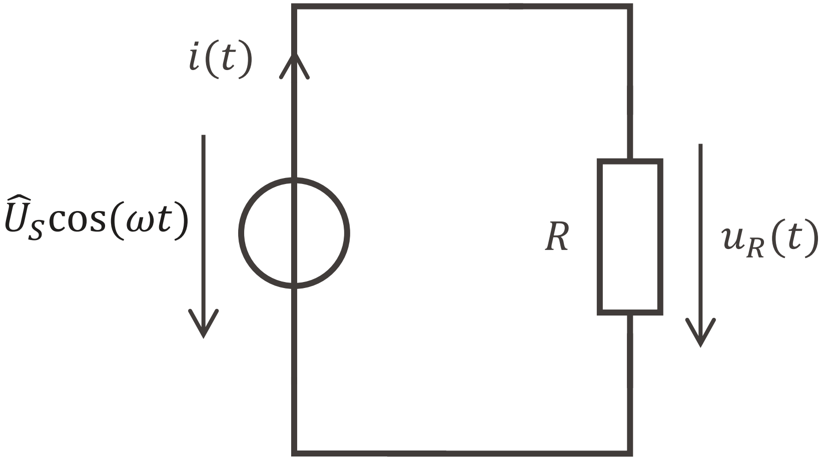
Rank	Responses
1	

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Régime sinusoïdal permanent



Signaux alternatifs – la résistance



Loi des mailles:

$$u_r(t) = \hat{U}_s\cos(\omega t)$$

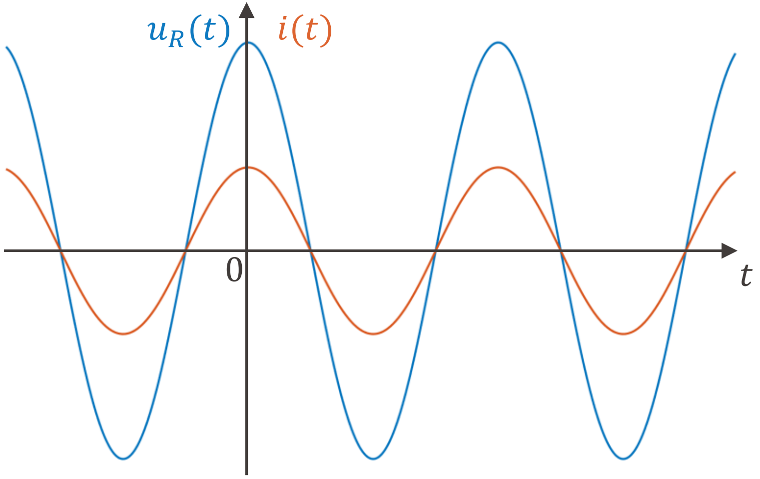
Loi d'Ohm:

$$u_R(t) = Ri(t)$$

Donc:

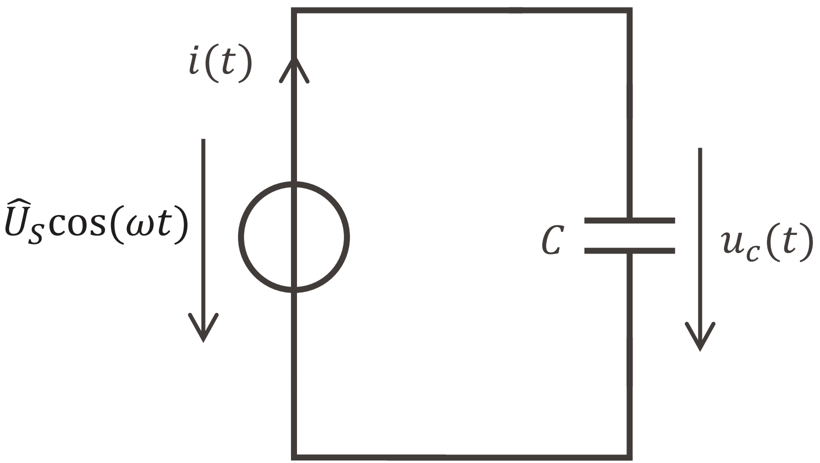
$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{R}\cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$ rad: courant et tension sont **en phase**



Signaux alternatifs – le condensateur

C. Lafforgue



Loi des mailles:

$$u_c(t) = \hat{U}_s\cos(\omega t)$$

Condensateur:

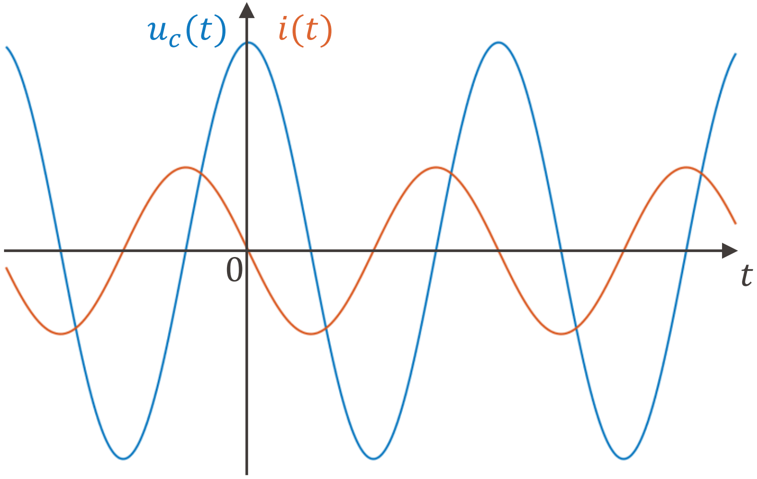
$$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

Donc:

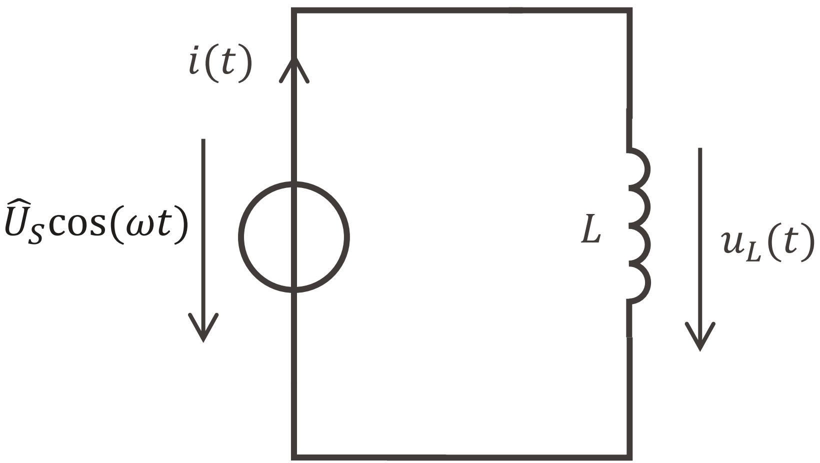
$$i(t) = -C\omega\hat{U}_s\sin(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega\hat{U}_s\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **avance de phase** sur la tension



Signaux alternatifs – l'inductance



Loi des mailles:

$$u_L(t) = \hat{U}_S\cos(\omega t)$$

Inductance:

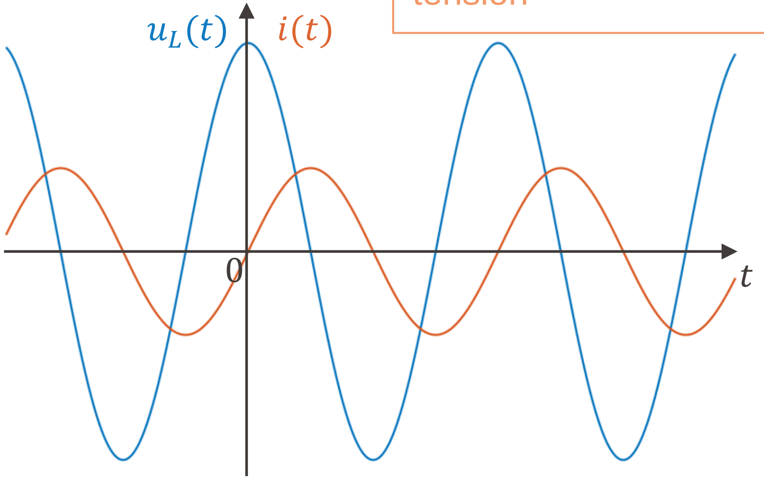
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

Donc:

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{L\omega}\sin(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\hat{U}_s}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **retard de phase** sur la tension



Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- Exemple:
  - $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi)$
  - On définit une tension complexe assosciée:

$$\underline{u}(t) = \hat{U}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

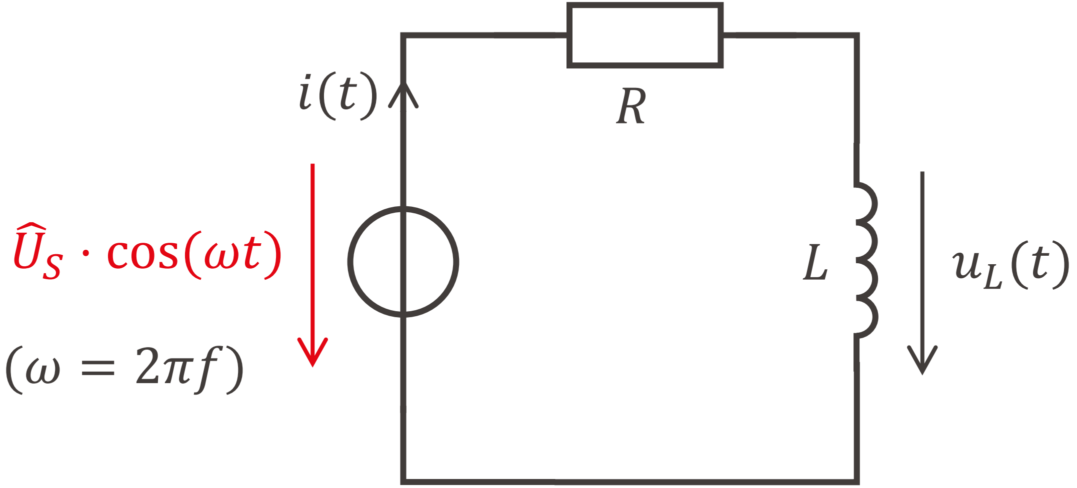
  - On a alors:

$$u(t) = Re\left[\underline{u}(t)\right]$$

  - On peut alors étudier les circuits avec les grandeurs sous forme complexe, et on prend la partie réelle du résultat.

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



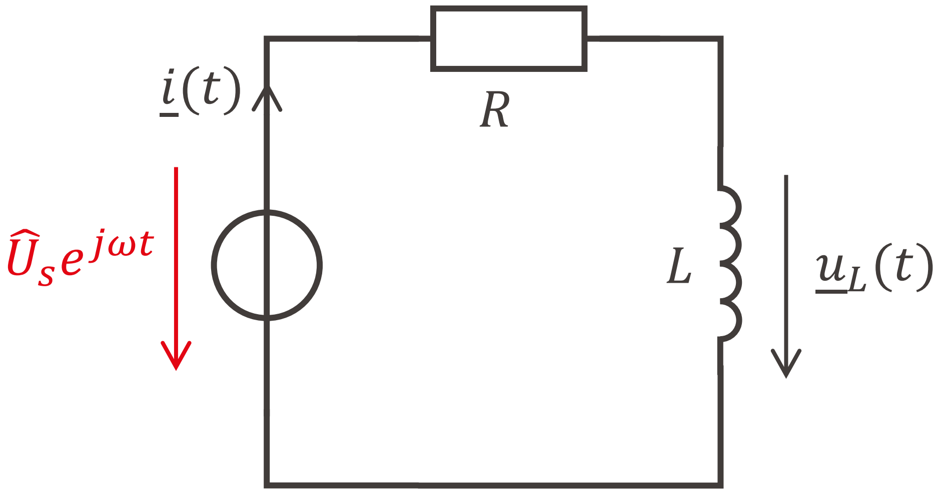
La résolution peut être compliquée.

La solution dépend de la fréquence.

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} \hat{U}_S \cdot \cos(\omega t)}$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:

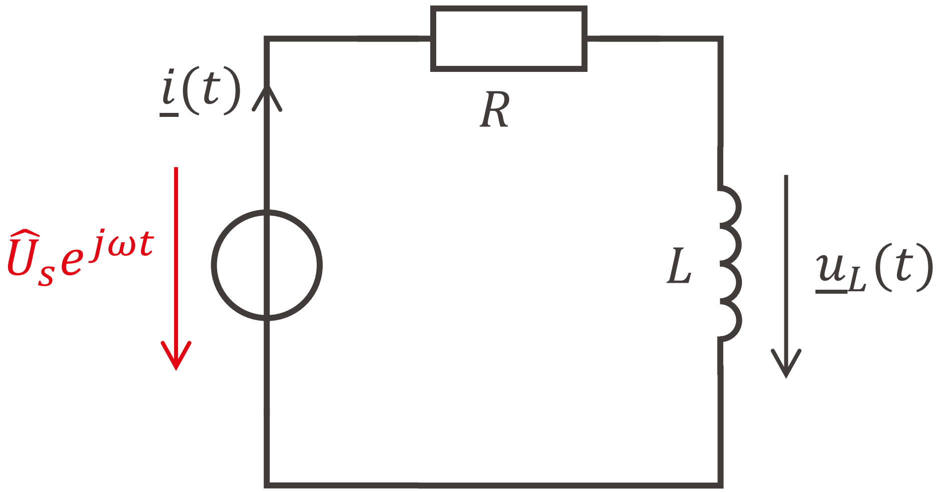


$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Circuit RL – Formalisme complexe

C. Lafforgue

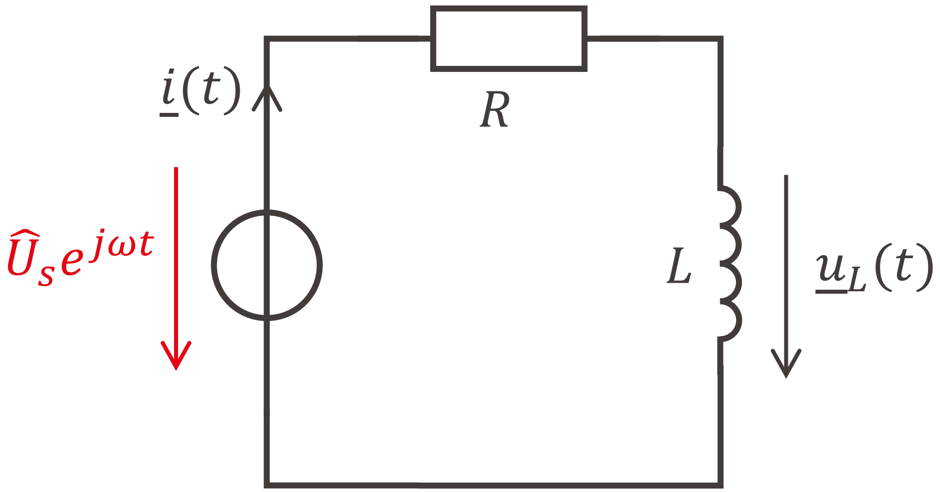
- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Loi de mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

Inductance:

$$\underline{u}_L(t) = L\frac{d\underline{i}}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = L\left(j\omega\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = jL\omega\underline{i}(t)$$

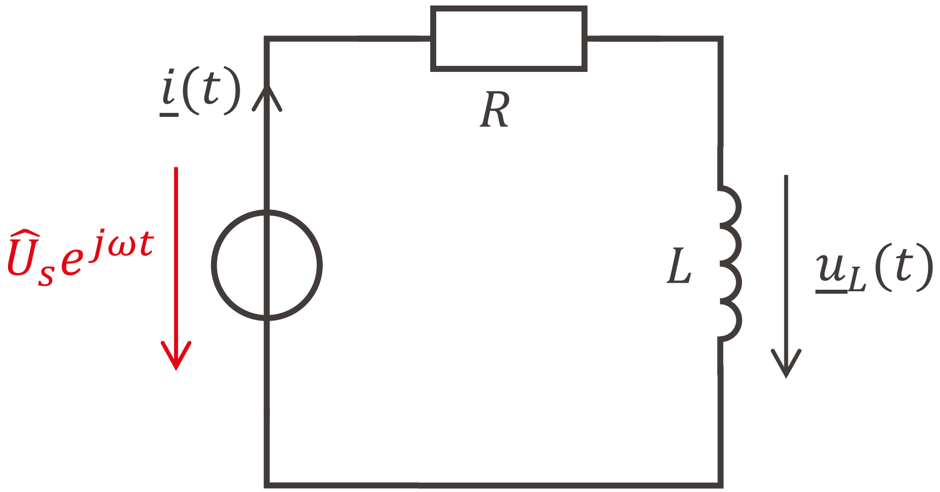
On a alors:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + jL\omega\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega)\underline{i}(t)$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t+\varphi)}$$

On a alors:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + jL\omega\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega)\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

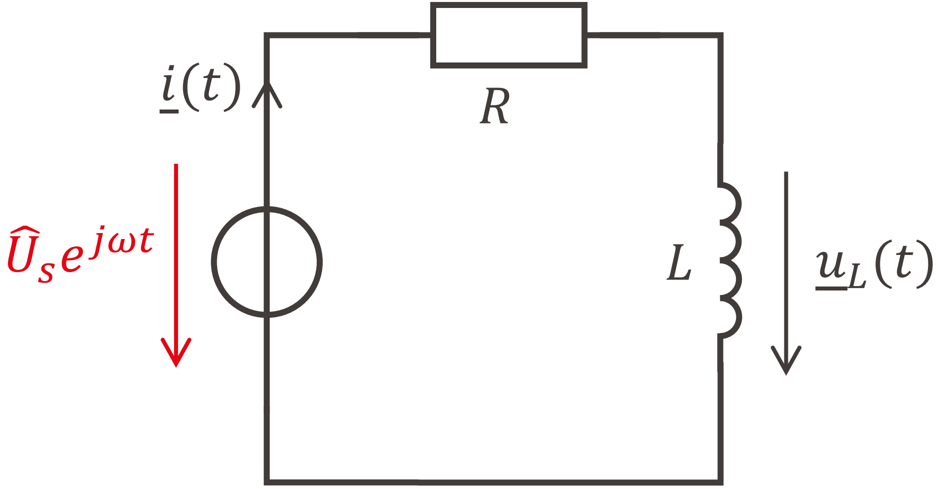
$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

C. Lafforgue

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

$$\hat{I} = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

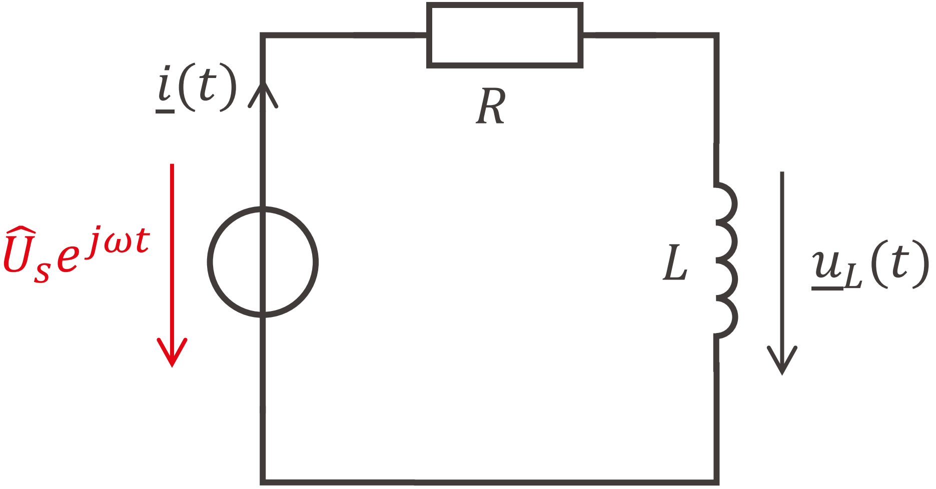
$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$$

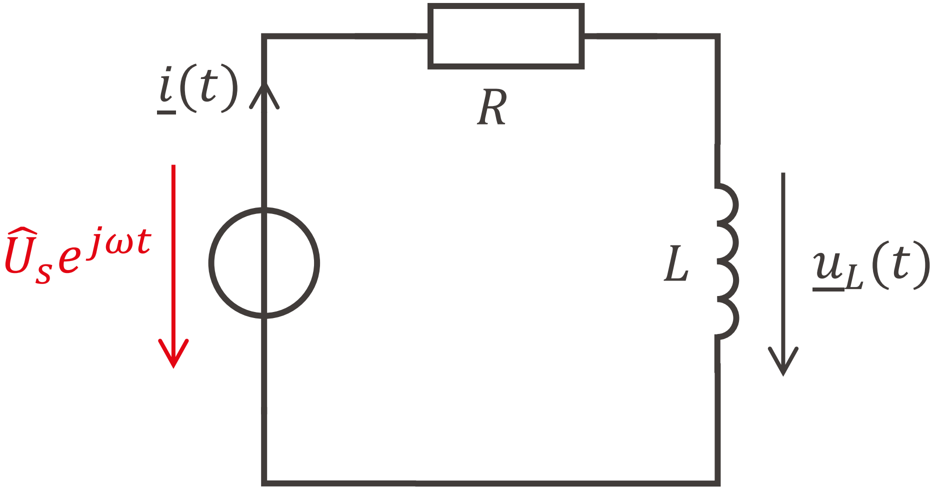
$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

C. Lafforgue

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On peut trouver la solution sans résoudre d'équation différentielle!

Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- On voit qu'en régime permanent sinusoïdal il y a deux grandeurs à déterminer:
  - L'amplitude $\hat{X}$
  - La phase φ

- On définit alors les **phaseurs:**
  - $\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$ (phaseur crête)
  - $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$ (phaseur efficace)

Charles Proteus Steinmetz
1865-1923
Ingénieur et mathématicien américain

Points clés

- Les signaux en régime permanent sinusoïdal sont déterminés par:
  - L'amplitude $\hat{X}$ (ou la valeur efficace, $X = \hat{X}/\sqrt{2}$)
  - La fréquence f (ou la pulsation, $\omega = 2\pi f$)
  - La phase φ

- Un signal sinusoïdal peut être représenté sous forme de nombre complexe
  - On utilise les phaseurs

Phaseur instantané:

$$\underline{x}(t) = \hat{X} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Phaseur crête:

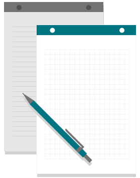
$$\underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi}$$

Phaseur efficace:

$$\underline{X} = X e^{j\varphi}$$

Lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal

Lois de Kirchhoff



- **Les lois de Kirchhoff fonctionnent exactement de la même manière en formalisme complexes**

Lois de Kirchhoff – Loi des nœuds

- La loi des nœuds exprime mathématiquement la conservation de la matière
  - Ici, conservation de la matière ⇔ conservation du courant

<u>La somme des courants passants par un nœud est nulle.</u>

N branches

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{I}_k = 0}$$

Courant dans la branche k

Lois de Kirchhoff – Loi des nœuds

La somme des courants passants par un nœud est nulle.

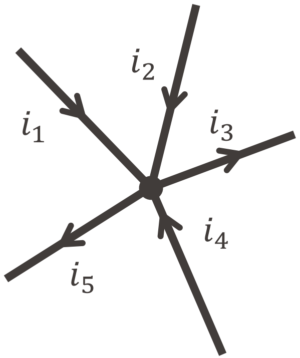
N branches

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{I}_k = 0}$$

Courant dans la branche k

- Attention au signe des courants
  - Courant qui va « vers » le nœud s'ajoute (+)
  - Courant qui va « hors » du nœud se soustrait (-)

Loi de Kirchhoff – Loi des nœuds

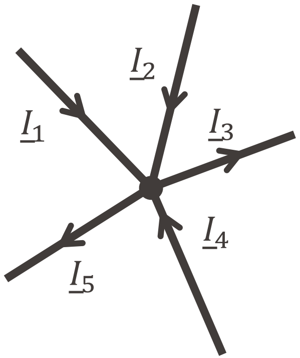


$$\underbrace{i_1 + i_2 + i_4}_{\text{« Vers » le nœud}} \underbrace{- i_3 - i_5}_{\text{« Hors » du nœud}} = 0$$

$$\underbrace{i_1 + i_2 + i_4}_{\text{Courant entrant}} = \underbrace{i_3 + i_5}_{\text{Courant sortant}}$$

Loi de Kirchhoff – Loi des nœuds

C. Lafforgue



$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_4 - \underline{I}_3 - \underline{I}_5 = 0$$

« Vers » le nœud « Hors » du nœud

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_4 = \underline{I}_3 + \underline{I}_5$$

Courant entrant Courant sortant

C. Lafforgue

Lois de Kirchhoff – Loi des mailles

- La loi des mailles exprime mathématiquement la conservation de l'énergie
  - Ici, conservation de l'énergie ⇔ Pas de différence de potentiel en un point unique

La somme des tensions le long d'une maille est nulle.

N dipôles dans la maille

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{U_k} = 0}$$

Tension aux bornes du dipôle k

C. Lafforgue

Lois de Kirchhoff – Loi des mailles

La somme des tensions le long d'une maille est nulle.

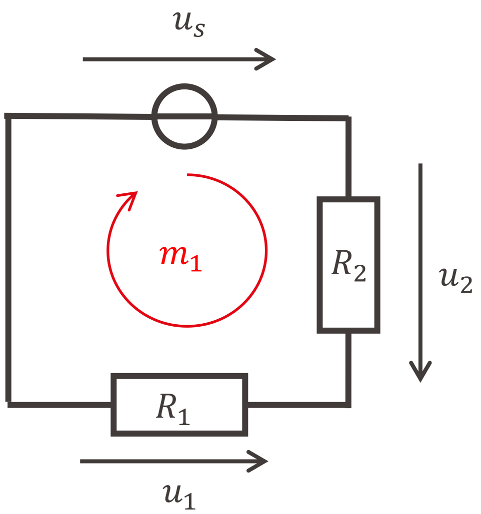
N dipôles dans la maille

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{U_k} = 0}$$

Tension aux bornes du dipôle k

- Attention au signe des tensions
  - Il faut définir un sens de lecture de la maille
  - Tension dans le sens de lecture s'ajoute (+)
  - Tension dans le sens opposé de la lecture se soustrait (-)

Lois de Kirchhoff – Loi des mailles



Loi des mailles dans m_1:

$$u_s + u_2 - u_1 = 0$$

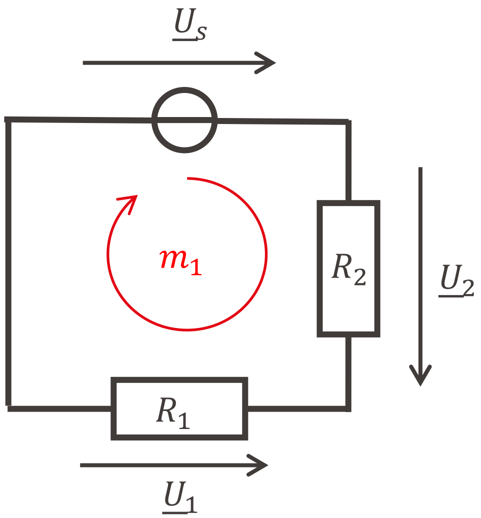
Dans le sens de m_1 ($u_s + u_2$)

Dans le sens opposé à m_1 ($- u_1$)

Astuce: fonctionnement similaire à la relation de Chasles. On part d'un point et on suit les « vecteurs » de tensions jusqu'à revenir au point de départ

Lois de Kirchhoff – Loi des mailles

C. Lafforgue



Loi des mailles dans m_1:

$$\underline{U}_s + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0$$

Dans le sens de m_1

Dans le sens opposé à m_1

Astuce: fonctionnement similaire à la relation de Chasles. On part d'un point et on suit les « vecteurs » de tensions jusqu'à revenir au point de départ

Points clés

- Les lois de Kirchhoff s'appliquent de la même manière sur les phaseurs complexes
  - Loi des nœuds
  - Loi des mailles

N branches

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{I}_k = 0}$$

Courant dans la branche k

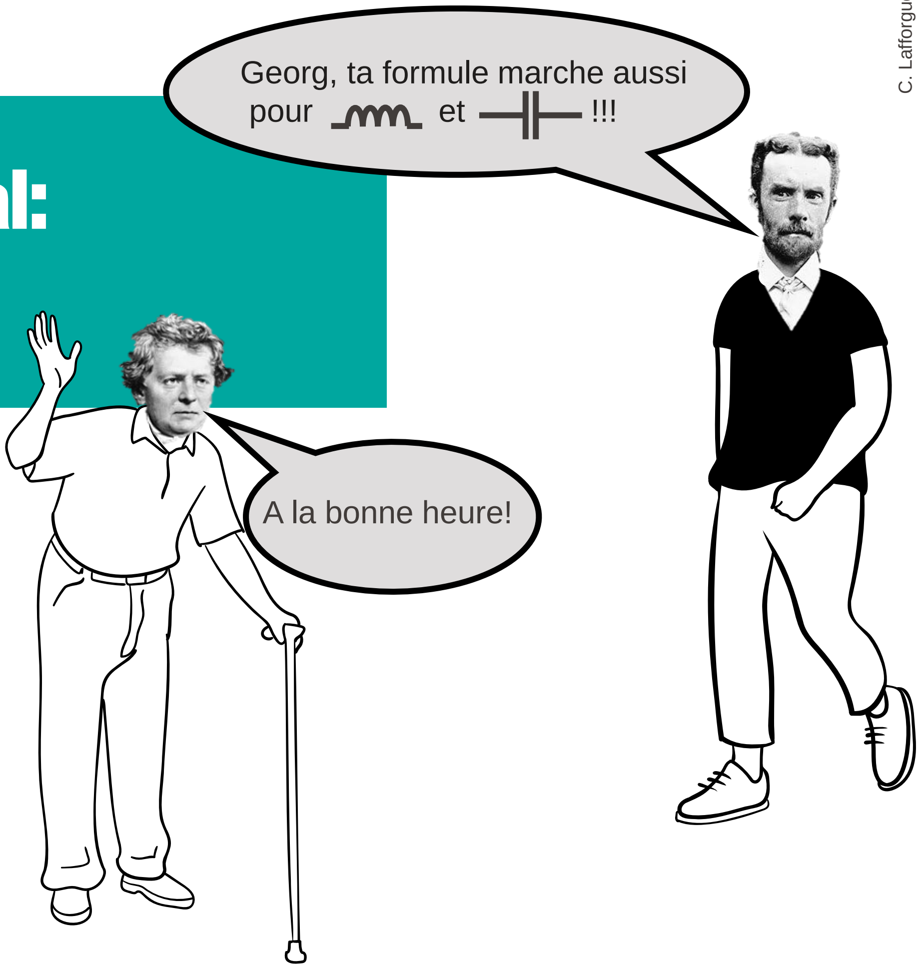
N dipôles dans la maille

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{U}_k = 0}$$

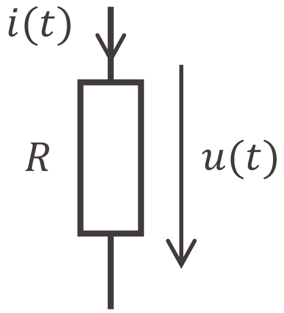
Tension aux bornes du dipôle k

C. Lafforgue

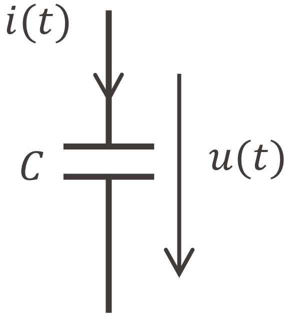
Loi d’Ohm en régime sinusoïdal: Impédance



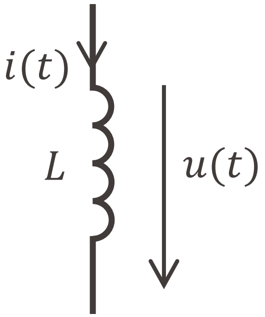
Signaux alternatifs – la résistance



Signaux alternatifs – le condensateur



Signaux alternatifs – l’inductance



L'impédance

- On remarque que dans tous les cas, tension et courant **sous leur forme de phaseur** sont proportionnels
  - En formalisme complexe, on obtient aussi une forme de loi d'Ohm!
  - Cette loi s'écrit $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$
  - $\underline{Z}$ est appelée **impédance**
  - Pour une résistance:

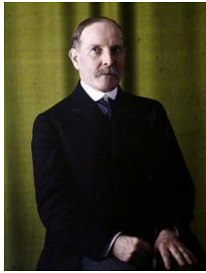
$$\underline{Z} = R$$

  - Pour un condensateur:

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

  - Pour une inductance:

$$\underline{Z} = jL\omega$$



Arthur Edwin Kennelly
1861-1939
Ingénieur, mathématicien irlandais

Oliver Heaviside
1850-1925
Ingénieur, physicien, mathématicien anglais

L’impédance

- Propriétés
  - L’impédance $\underline{Z}$ **est un nombre complexe**
  - Elle depend de la pulsation (et donc de la fréquence)
  - Elle est homogène à des ohms (Ω)
- Exemples
  - Un condensateur de capacité $C = 20\ \mu\text{F}$ à une pulsation $\omega = 250\ \text{rad} \cdot s^{-1}$
  - Une inductance $L = 30\ \mu\text{H}$ à une pulsation $\omega = 250\ \text{rad} \cdot s^{-1}$

L'impédance

- Grandeurs associées:
  - On peut aussi écrire

$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

  - $\underline{Y}$ est appelée **admittance**

  - L'impédance $\underline{Z}$ peut avoir une partie réelle et/ou une partie imaginaire

$$\underline{Z} = R + jX$$

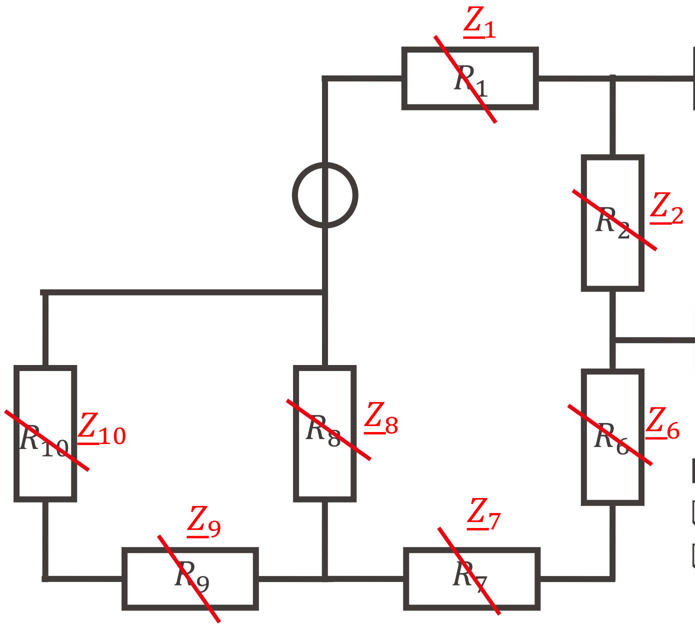
  - La partie réelle R est appelée **résistance**
  - La partie imaginaire X est appelée **réactance**

C. Lafforgue

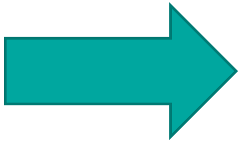
L'impédance

Composant	Loi	$\underline{Z}$	$\lvert\underline{Z}\rvert$	$\arg(\underline{Z})$
Résistance  R	$u(t) = Ri(t)$	R	R	0
Condensateur  C	$i(t) = C\dfrac{du}{dt}(t)$	$\dfrac{1}{jC\omega}$	$\dfrac{1}{C\omega}$	$-\dfrac{\pi}{2}$
Inductance  L	$u(t) = L\dfrac{di}{dt}(t)$	$jL\omega$	$L\omega$	$\dfrac{\pi}{2}$

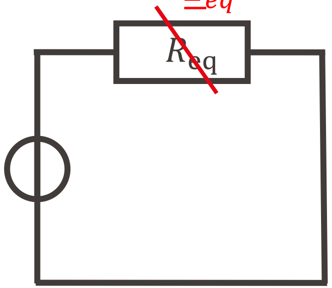
Agencements de résistances



Possible mais:
- ❑ C’est long!
- ❑ C’est compliqué!

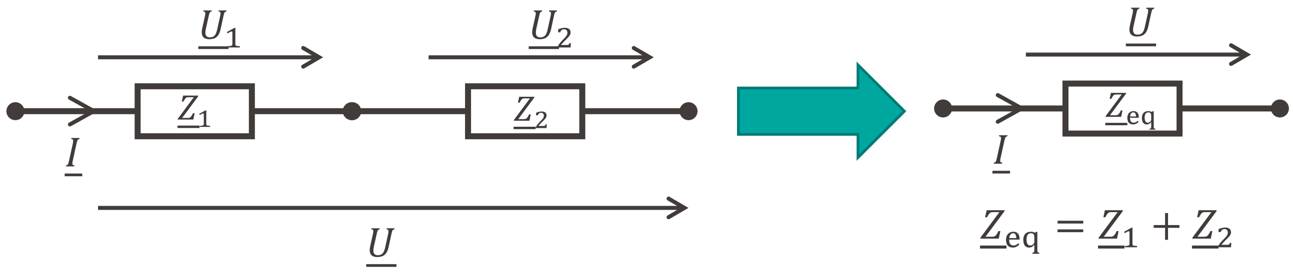


Circuit équivalent:
- ❑ Beaucoup plus facile!



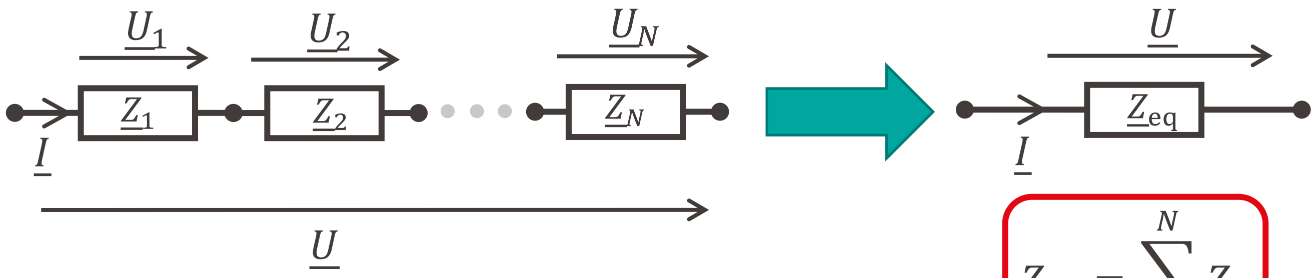
Agencement en série

- Deux impédances en série s'additionnent:



$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

- Plus généralement:

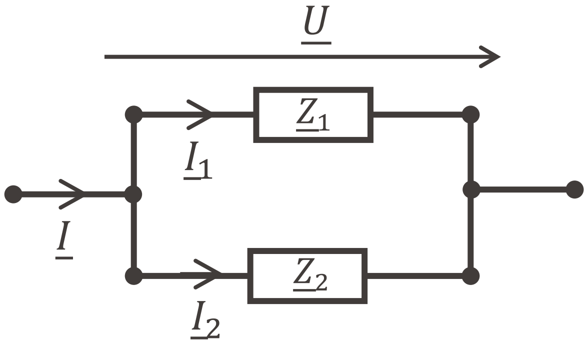


$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_k}$$

C. Lafforgue

Agencement en parallèle

- Deux impédances en parallèle: les admittances s'ajoutent

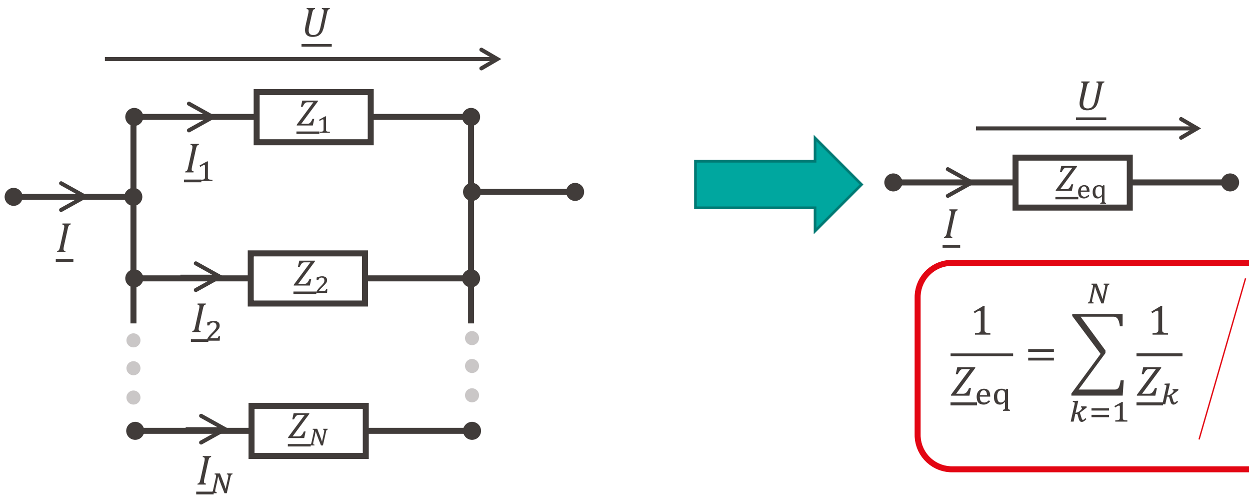


$$\underline{U} = \underline{Z}_{\mathrm{eq}}\underline{I} \qquad \underline{I} = \underline{Y}_{\mathrm{eq}}\underline{U}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \qquad \underline{Y}_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \qquad \underline{Z}_{\mathrm{eq}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

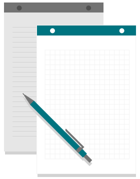
Agencement en parallèle

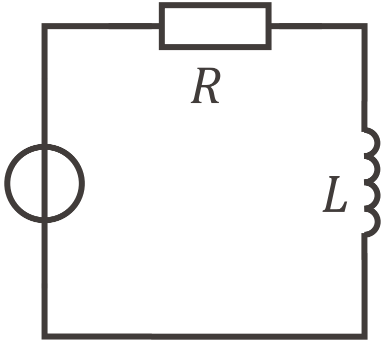
- Plus généralement:

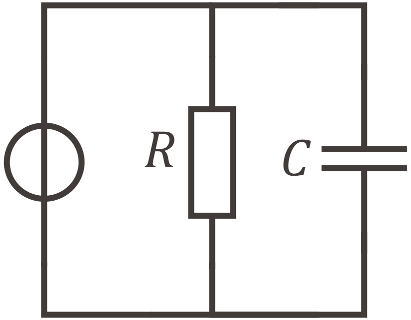


$$\frac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_k} \quad / \quad \underline{Y}_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Y}_k$$

Exemples







Points clés

C. Lafforgue

- La loi d'Ohm s'applique sur les phaseurs complexes
  - La résistance devient l'impédance
  - L'impédance est un nombre complexe et est une fonction de la fréquence

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

$$\boxed{\left|\underline{Z}\right| = \frac{U}{I}}$$

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})}$$

- Les agencements d'impédances suivent les même règles que les résistances

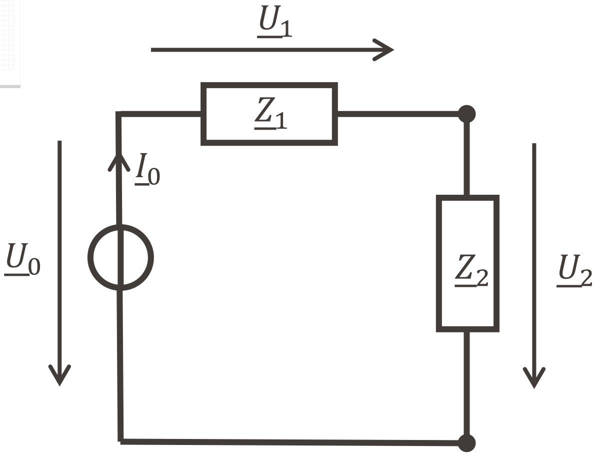
En série:

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_k}$$

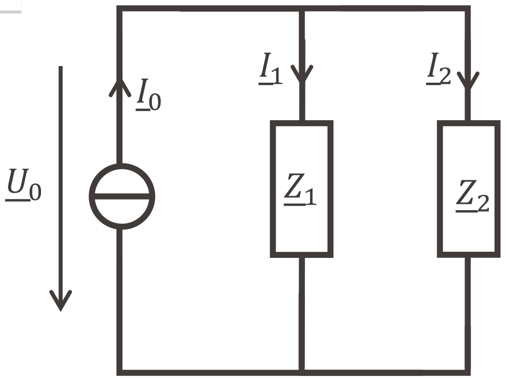
En parallèle:

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_k} \;\Big/\; \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Y}_k}$$

Application



Application

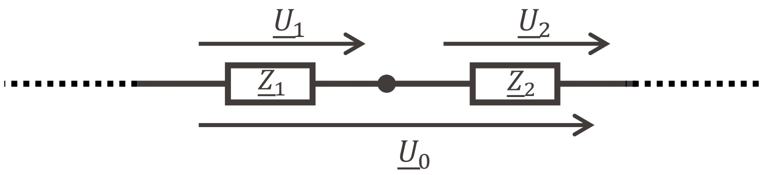


Points clés

C. Lafforgue

- Comme les lois de Kirchhoff et d'Ohm marchent avec les phaseurs:
  - La formule du diviseur de tension est valide
  - La formule du diviseur de courant est valide

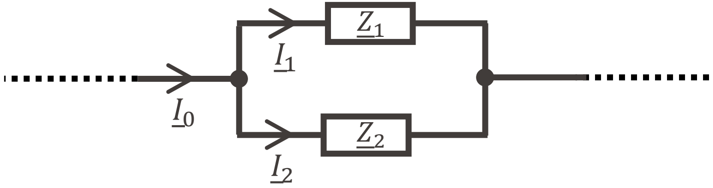
En série:



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}_0$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}_0$$

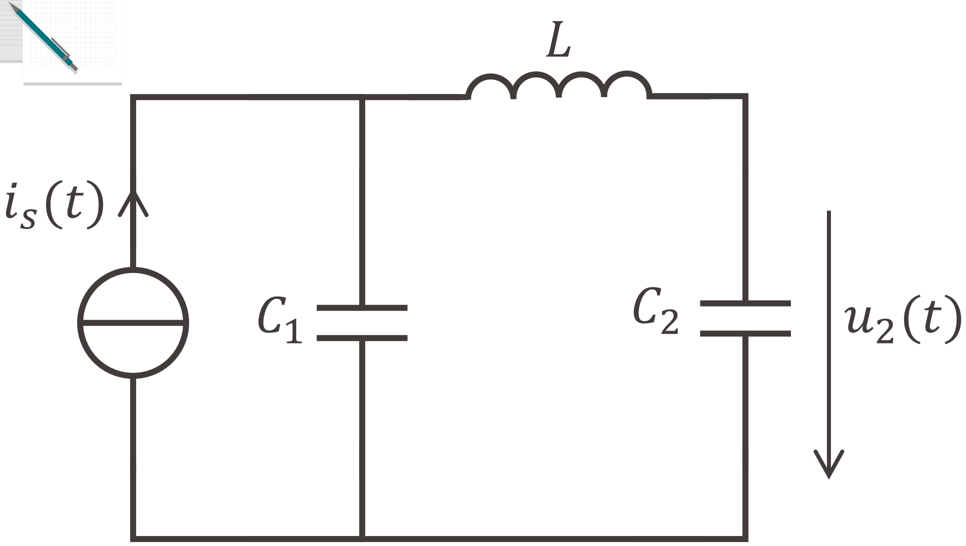
En parallèle:



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}_0$$

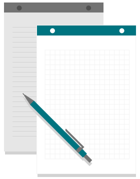
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}_0$$

Exemple



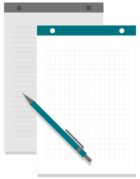
$i_s(t) = I_s\cos(\omega t)$

Exemple

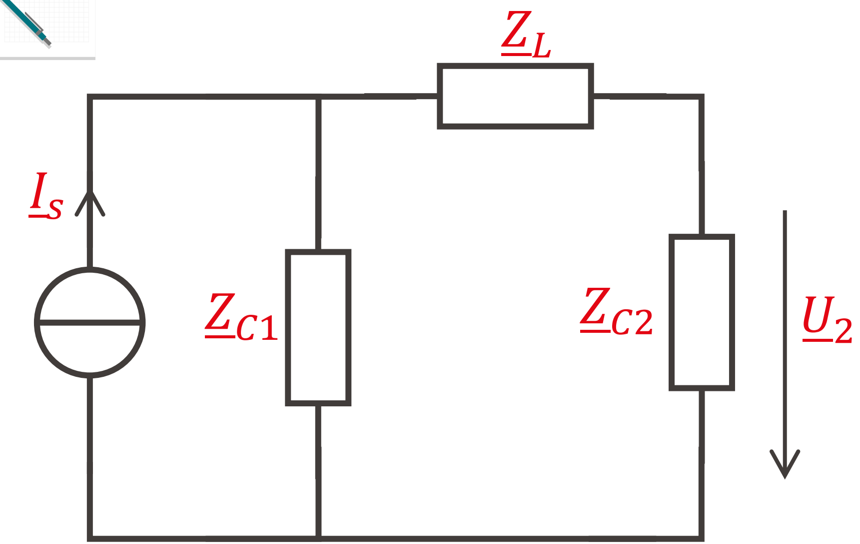


Exemple

Exemple



Exemple


$\underline{Z}_L$
$\underline{I}_S$
$\underline{Z}_{C1}$
$\underline{Z}_{C2}$
$\underline{U}_2$

Exemple

Exemple

C. Lafforgue

Exemple

Exemple

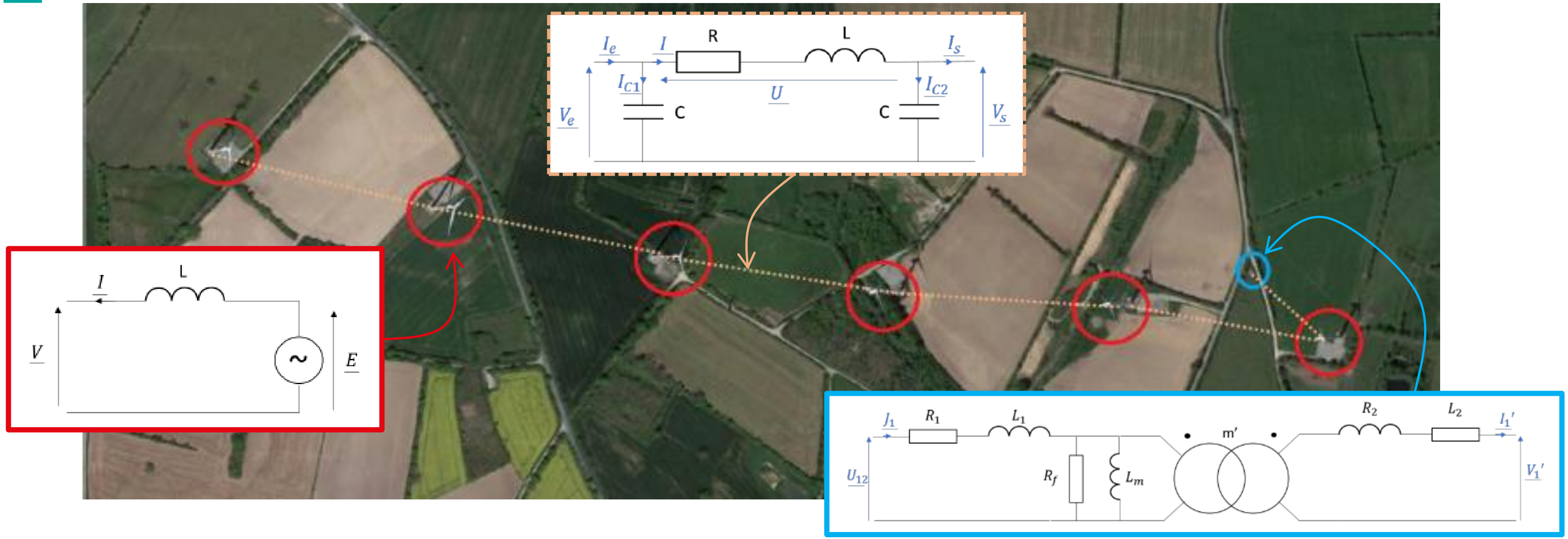
Pour aller plus loin

- Le formalisme complexe s'applique à des systèmes réels, même à grande échelle
- Par exemple: systèmes de production d'électricité

Pour aller plus loin

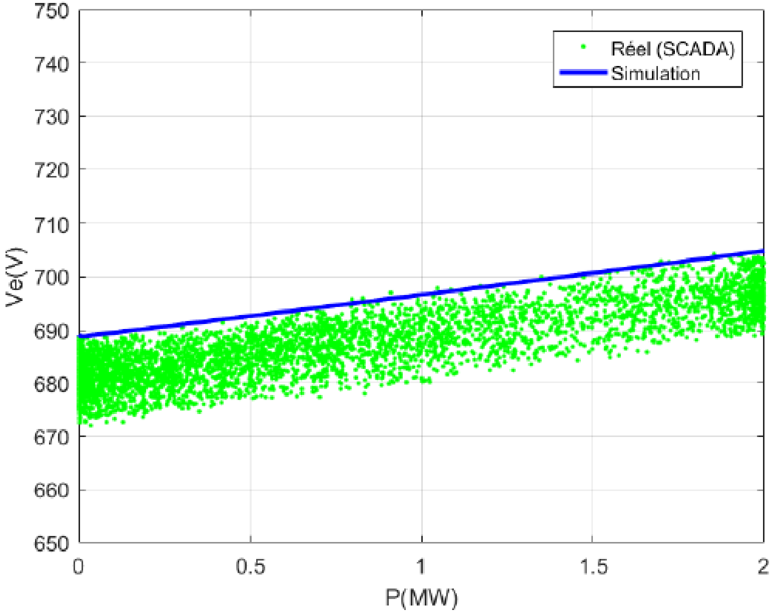
C. Lafforgue

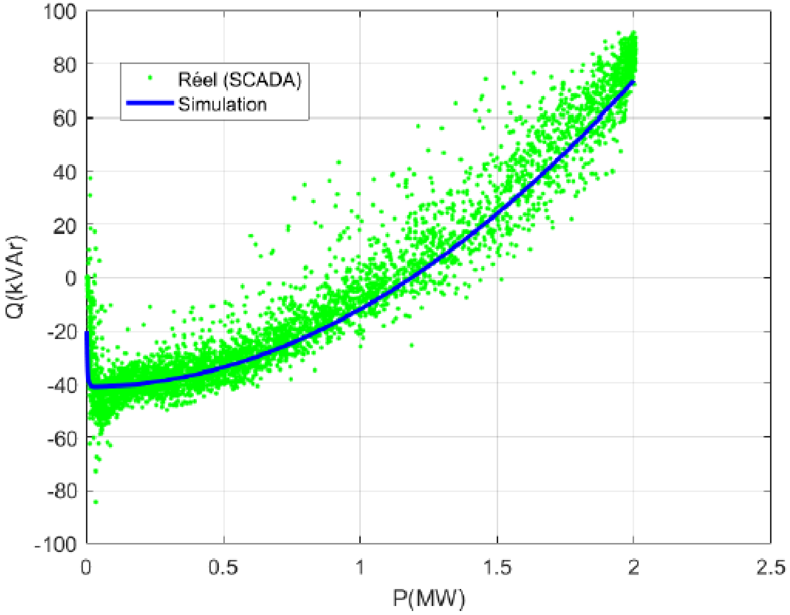
Parc éolien de Chauvé, France



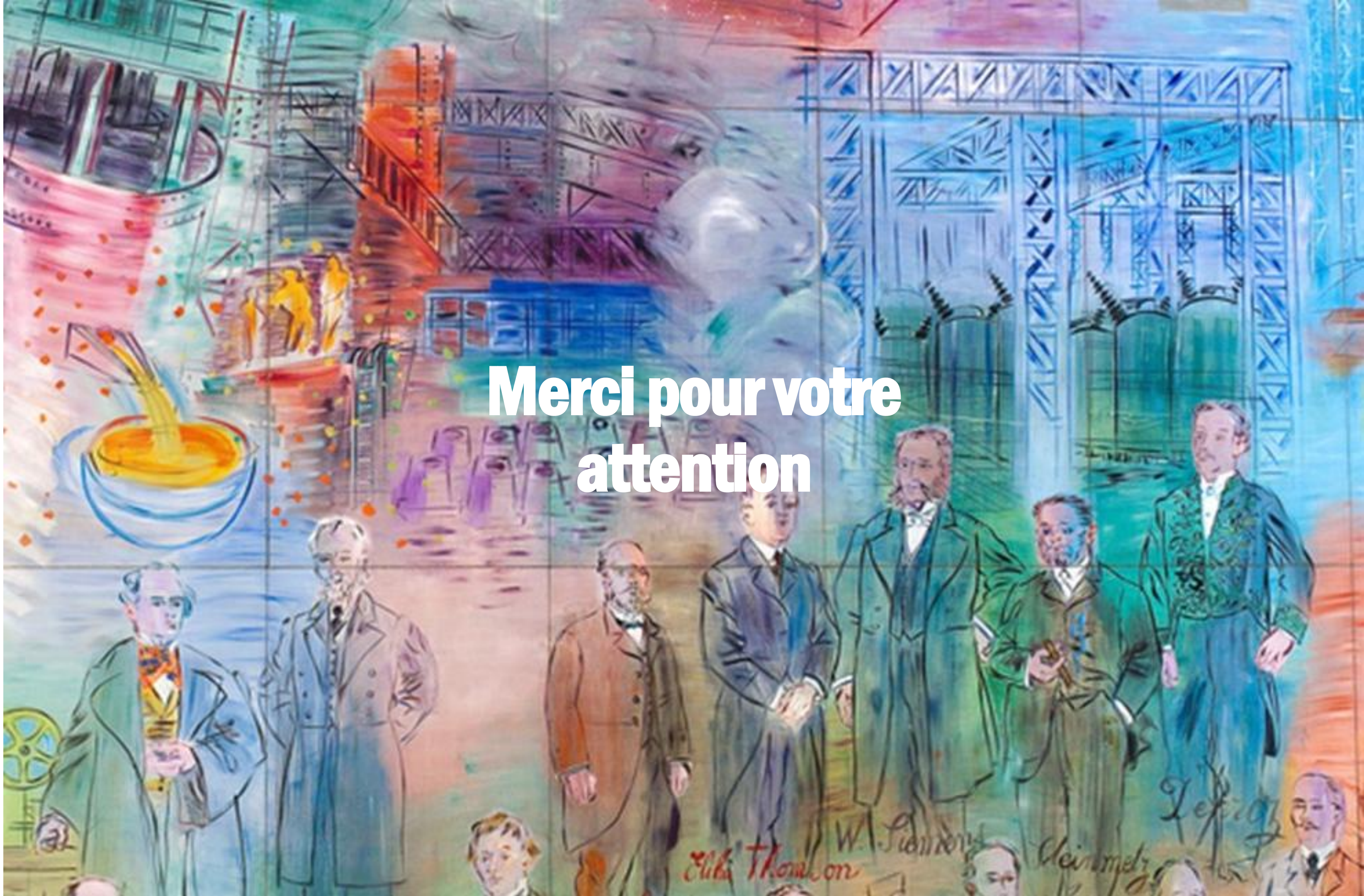
Pour aller plus loin

- Les modèles permettent de prévoir la production du parc
- Ils permettent aussi de détecter des problèmes de fonctionnement
- Ils permettent de concevoir des systèmes complexes





Merci pour votre attention



R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris