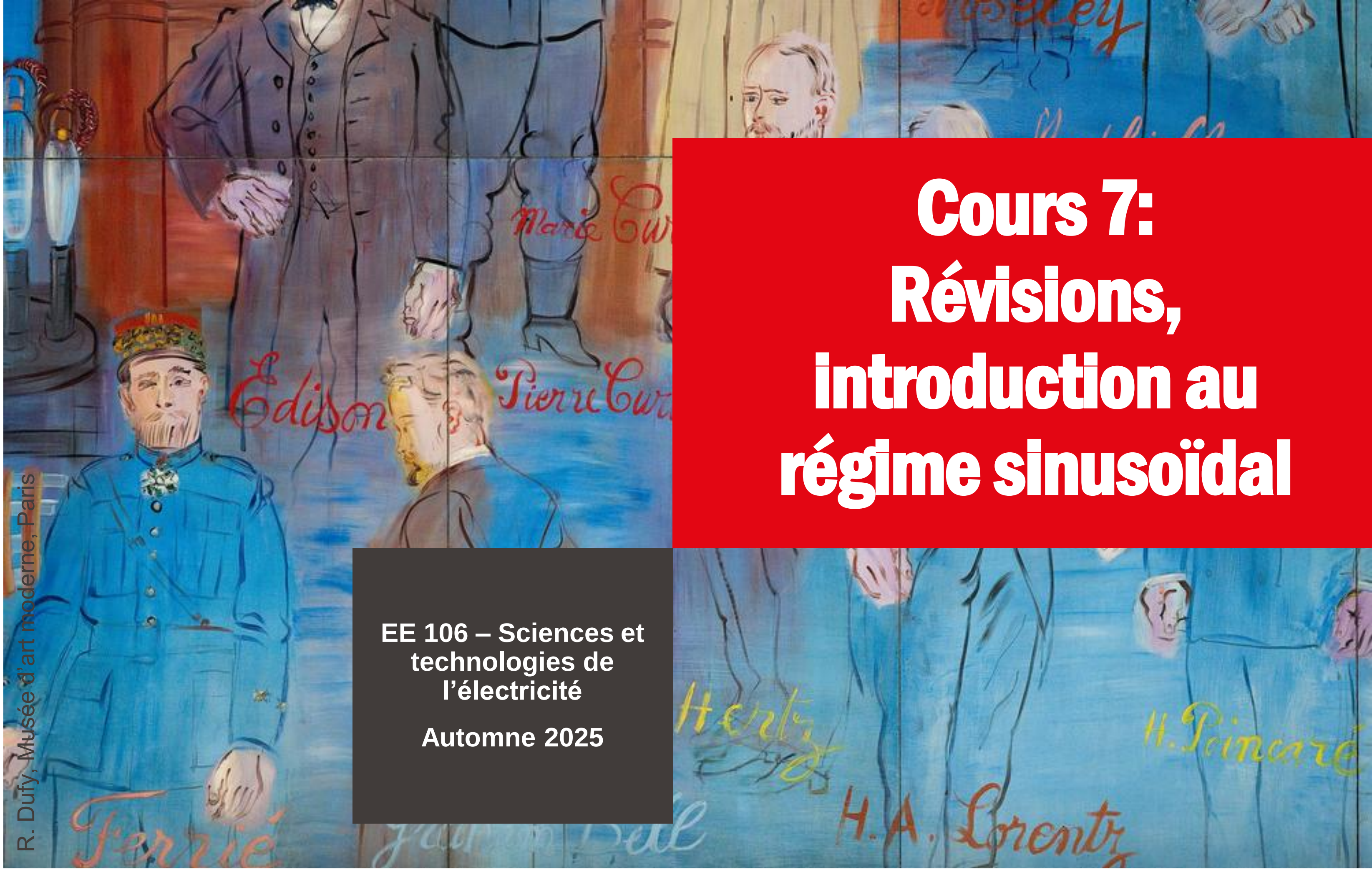
EPFL

Cours 7: Révisions, introduction au régime sinusoïdal

EE 106 – Sciences et technologies de l’électricité

Automne 2025



R. Dufy, Musée d’art moderne, Paris

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Semaine	Cours	Exercices	TP	Salles de cours
1. 08/09-14/09	**I.** Notions d'électrostatique, tension électrique, courant électrique			**STCC**
2. 15/09-21/09	**II.** Résistance, sources, conventions, lois de Kirchhoff		**TP1 / gr. A-C**	**STCC**
3. 22/09-28/09	**III. Puissance,** Elements série/parallèle, résistance équivalente, diviseur de tension/courant	**Série 1 /gr. A-C**	**TP1 / gr. B-D**	**STCC**
4. 29/09-05/10	**IV.** Principe de superposition, théorèmes de Thévenin/Norton, éléments non-linéaires	**Série 1 / gr. B-D**	**TP2 / gr. A-C**	**CO3 -CE16**
5. 06/10-12/10	**V.** Condensateur, circuit RC	**Série 2 /gr. A-C**	**TP2 / gr. B-D**	**CO3 -CE16**
6. 13/10-19/10	**VI.** Inductance, circuit RL	**Série 2 / gr. B-D**	**TP3 / gr. A-C**	**STCC**
X. 20/10-26/10	**RELACHE**			
7. 27/10-02/11	**VII.** Révisions, introduction au régime sinusoïdal	**Série 3 /gr. A-C**	**TP3 / gr. B-D**	**CO3 -CE16**
8. 03/11-09/11	**VIII.** Régime sinusoïdal permanent, loi d'Ohm, lois de Kirchhoff	**Série 3 / gr. B-D**	**TP4 / gr. A-C**	**STCC**
9. 10/11-16/11	**IX.** Diviseur de tension/courant, théorèmes de Thévenin/Norton, introduction aux filtres	**Série 4 /gr. A-C**	**TP4 / gr. B-D**	**STCC**
10. 17/11-23/11	**X.** Filtres, diagramme de Bode	**Série 4 / gr. B-D**	**TP5 / gr. A-C**	**STCC**
11. 24/11-30/11	**XI.** Puissance complexe, adaptation de puissance, facteur de qualité	**Série 5 /gr. A-C**	**TP5 / gr. B-D**	**STCC**
12. 01/12-07/12	**XII.** Systèmes de production, introduction au triphasé	**Série 5 / gr. B-D**	**TP6 / gr. A-C**	**CO3 -CO1**
13. 08/12-14/12	**XIII.** Examen blanc	**Série 6 /gr. A-C**	**TP6 / gr. B-D**	**STCC**
14. 15/12-21/12	**XIV.** Révisions	**Série 6 / gr. B-D**		**STCC**

Examen

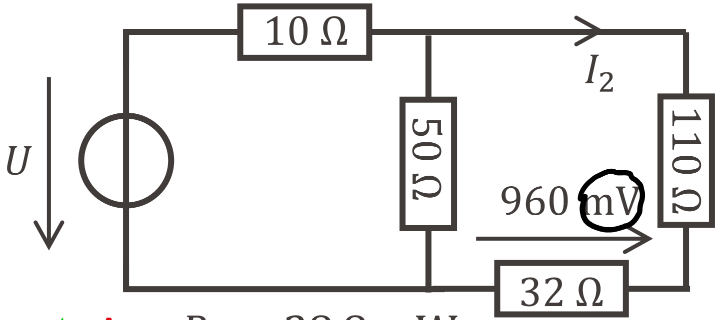
- L'examen aura lieu le **vendredi 23/01/2026 de 9h à ~~10h~~** 12h
- Salle: STCC (étage campus)
- Matériel autorisé:
  - Calculatrice (classique ou mode examen pour les modèles le permettant)
  - Notes de cours: **6 pages (manuscrites ou imprimées)** contenant des notes tirées des slides de cours
  - **Pas de livres, pas de séries d'exercices**

Rappels

- Rappels - Que vaut la puissance reçue par la résistance de 32 Ω?

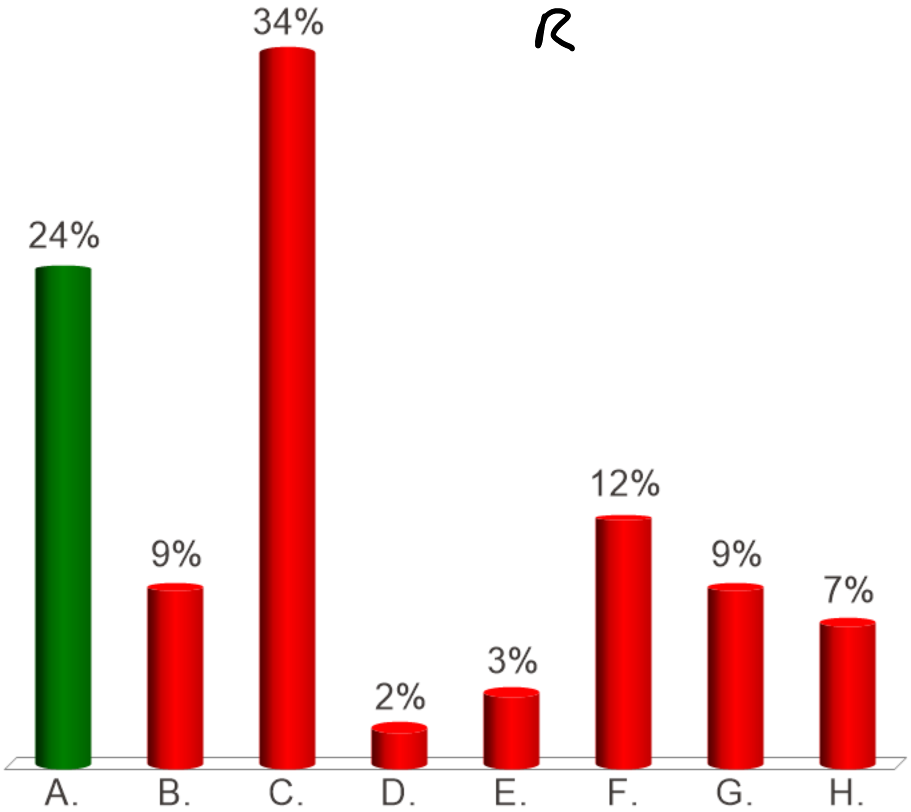
C. Lafforgue

$$P = \frac{U^2}{R}$$

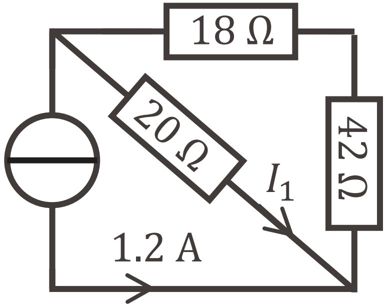


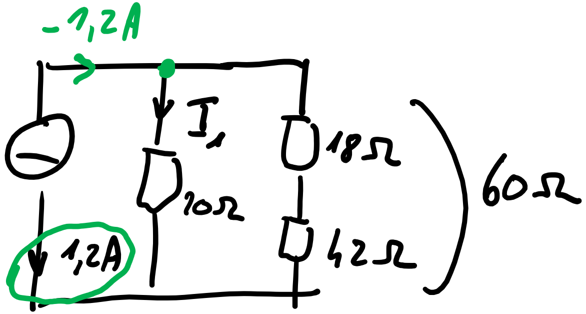
- ✓ A. $P_2 = 28.8\ \text{mW}$
- B. $P_2 = 28.8\ \text{W}$
- C. $P_2 = -28.8\ \text{mW}$
- D. $P_2 = -28.8\ \text{W}$
- E. $P_2 = 29.49\ \text{mW}$
- F. $P_2 = 29.49\ \text{W}$
- G. $P_2 = -29.49\ \text{mW}$
- H. $P_2 = -29.49\ \text{W}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**



- Rappels - Que vaut I_1 ?





$$I_1 = \frac{60}{20+60} \times (-1{,}2)$$

$$= -0{,}9\,A = -900\,mA$$

A. $I_1 = 0.3$ A

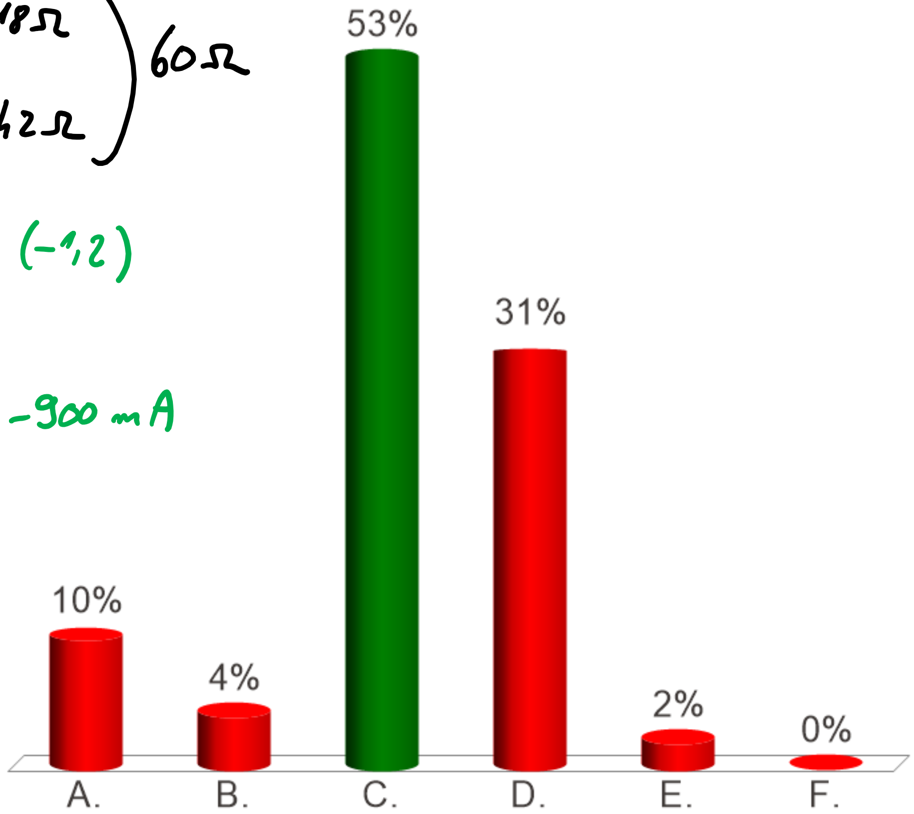
B. $I_1 = 3$ A

✓ C. $I_1 = -900$ mA

D. $I_1 = 0.9$ A

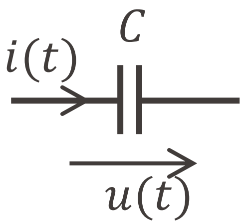
E. $I_1 = -0.48$ A

F. $I_1 = -300$ mA



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels – Quelle est la caractéristique d'un condensateur?

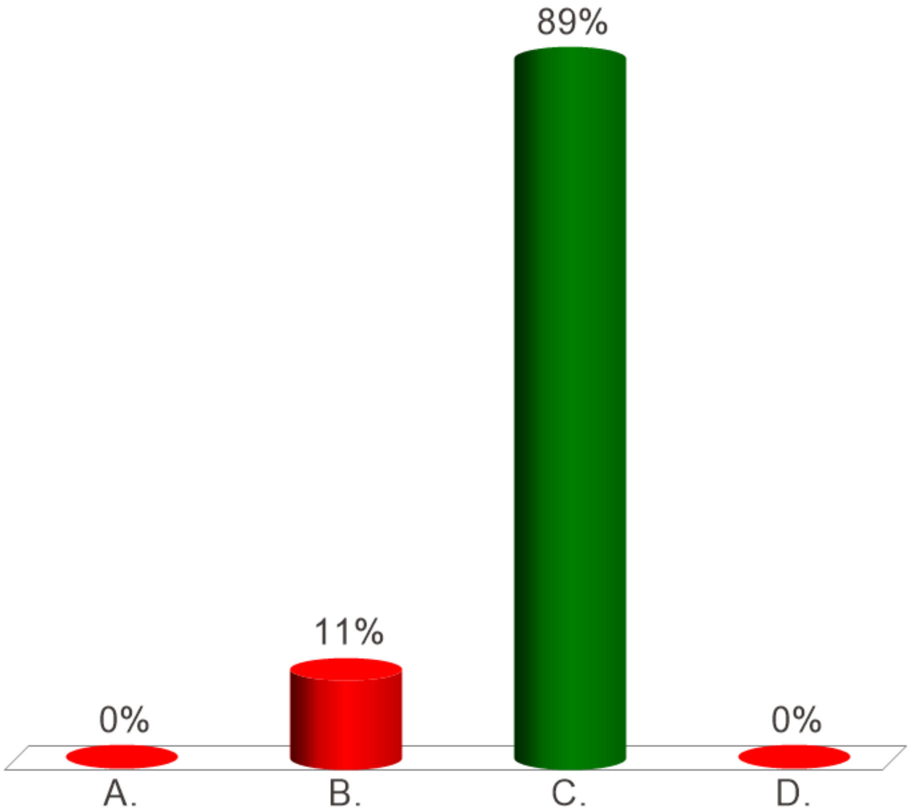


A. $u = \frac{1}{C}\frac{di}{dt}$

B. $u = C\frac{di}{dt}$

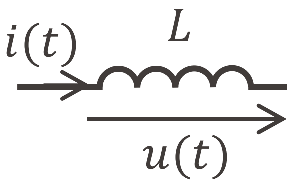
C. $i = C\frac{du}{dt}$ ✓

D. $i = \frac{1}{C}\frac{du}{dt}$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels – Quelle est la caractéristique d'une inductance?

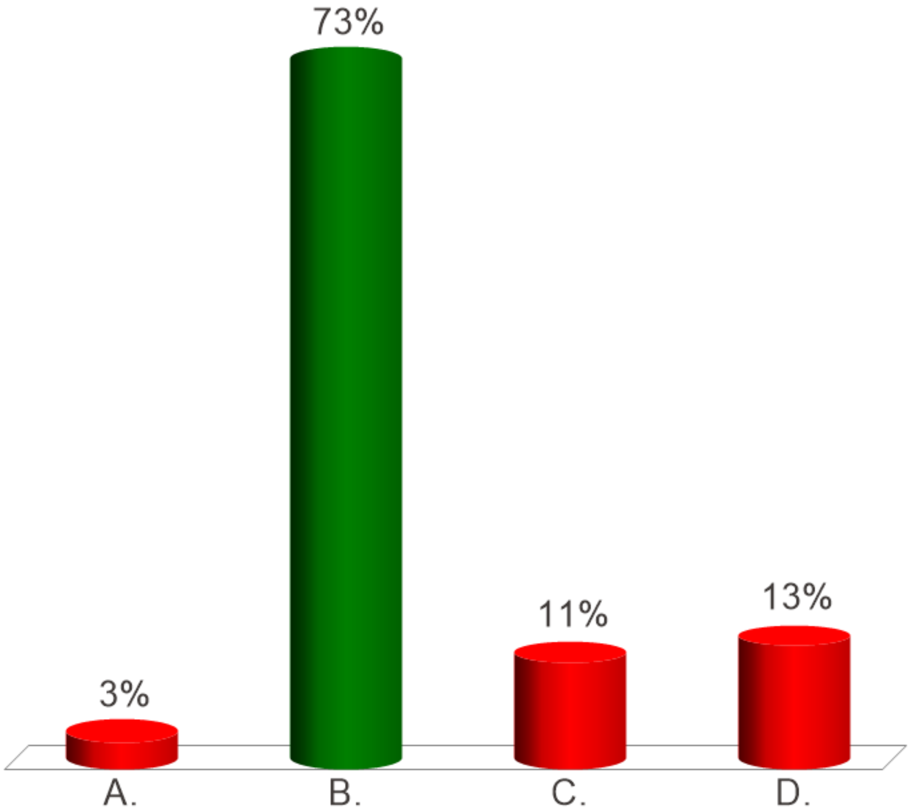


A. $u = \frac{1}{L}\frac{di}{dt}$

B. $u = L\frac{di}{dt}$

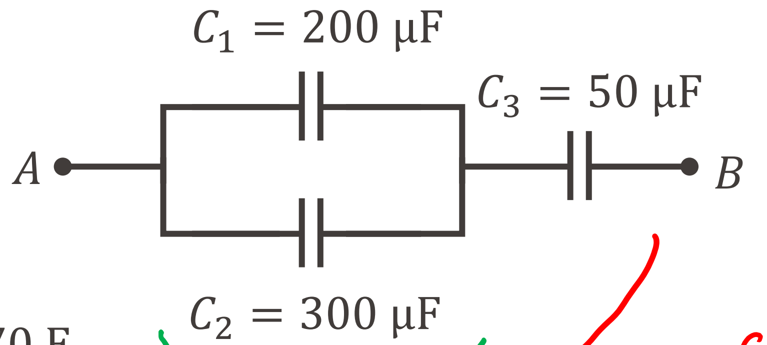
C. $i = L\frac{du}{dt}$

D. $i = \frac{1}{L}\frac{du}{dt}$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels – Quelle est la capacité équivalente entre A et B?



A. 170 F

B. 45.45 µF

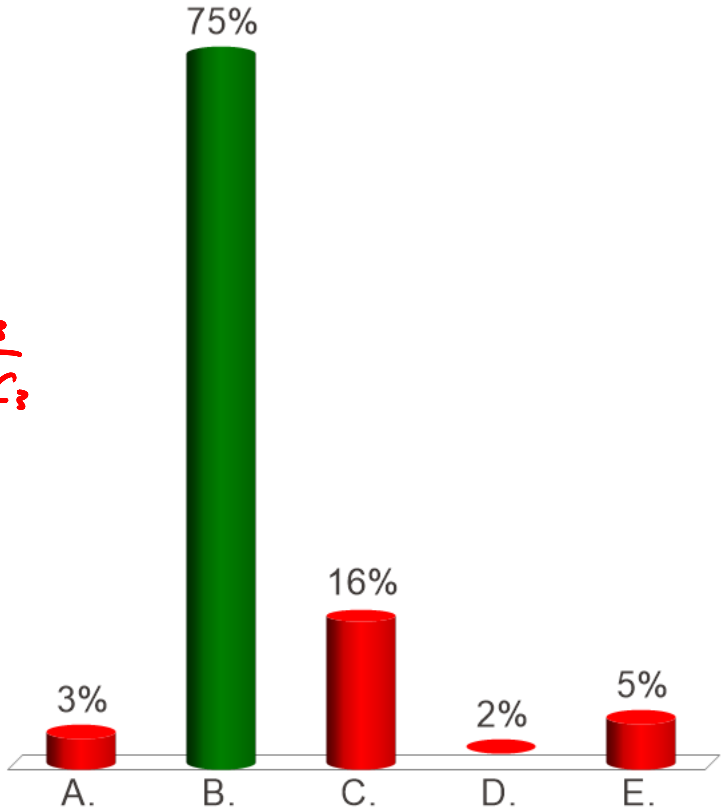
C. 170 µF

D. 0.55 mF

E. 50.75 mF

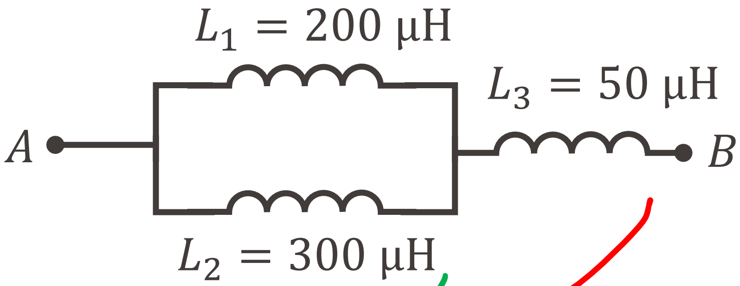
$C_p = C_1 + C_2$

$C_{eq} = \frac{C_p C_3}{C_p + C_3}$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels – Quelle est l'inductance équivalente entre A et B?



$L_{eq} = L_p + L_3$

$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$

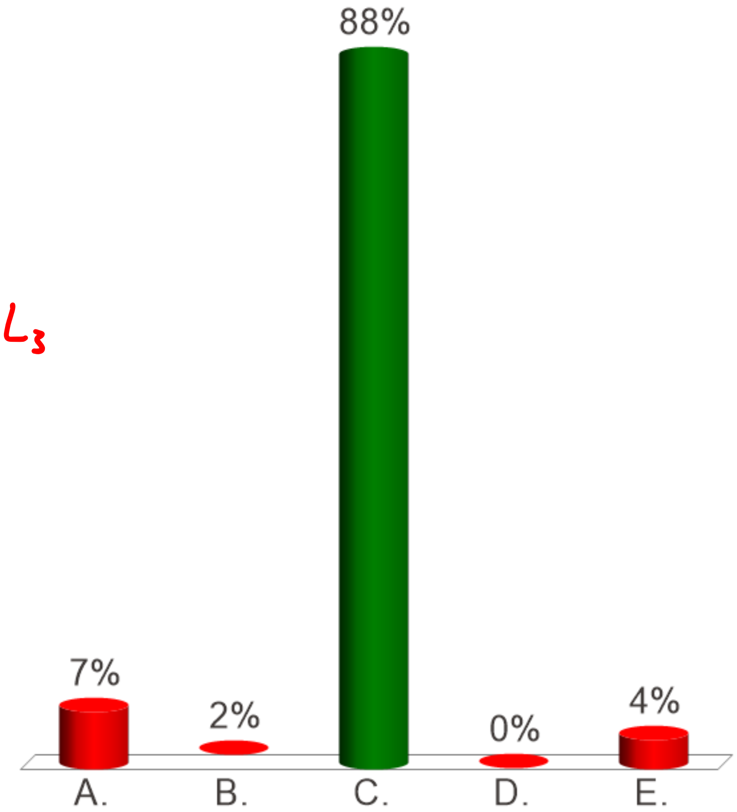
A. 170 H

B. 45.45 µH

C. 170 µH

D. 0.55 mH

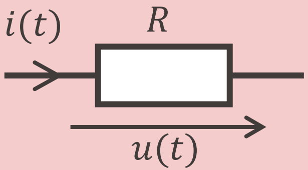
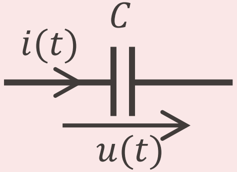
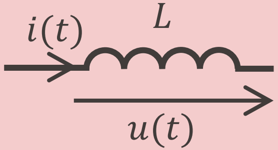
E. 50.75 mH



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

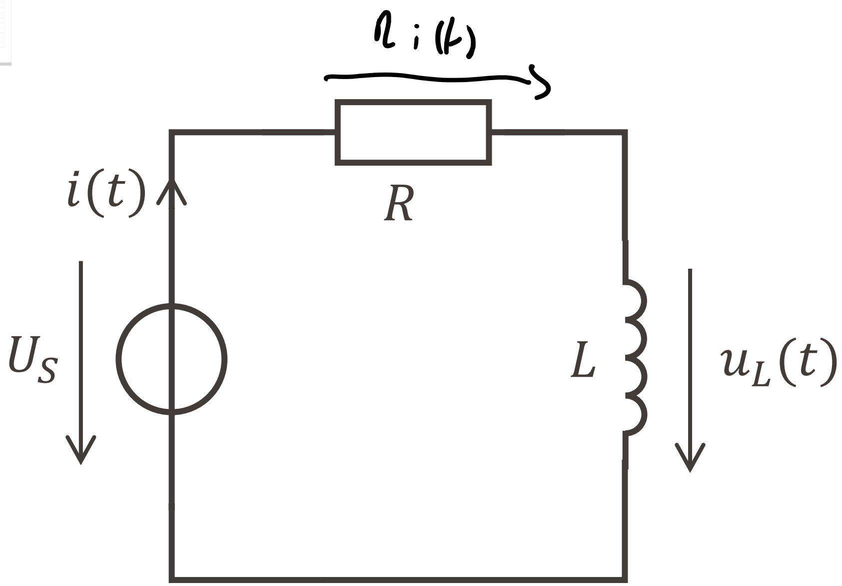
- Rappels -

Symbole	Unité	Caractéristique	Energie stockée	Equivalent mécanique
	ohm (Ω)	$u(t) = Ri(t)$		Amortisseur
	farad (F)	$i(t) = C\dfrac{du}{dt}(t)$	$W = \dfrac{1}{2}CU^2$	Ressort
	henry (H)	$u(t) = L\dfrac{di}{dt}(t)$	$W = \dfrac{1}{2}LI^2$	Masse

Circuit RL

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Loi des mailles:

$$U_S = R\,i(t) + u_L(t)$$

$$U_S = R\,i(t) + L\frac{di}{dt}(t)$$

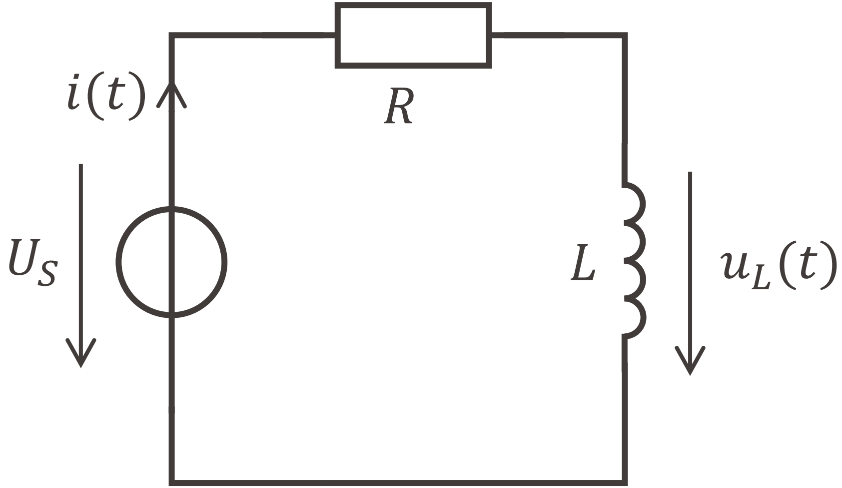
$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{1}{L}U_S$$

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{L}{R}\right] = T \rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Loi des mailles:

$$U_S = Ri(t) + u_L(t)$$

Relation caractéristique de l'inductance

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

Donc on obtient:

$$U_S = L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

* eq. homogène associé :

$$\frac{di_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}i_h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_h(t) = A e^{-t/\tau}$$

* solution particulière :

$$I_p \Rightarrow \frac{R}{L}I_p = \frac{1}{L}U_s$$

$$\Rightarrow I_p = \frac{U_s}{R}$$

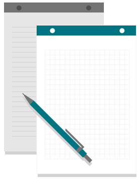
$\Rightarrow$ solution totale :

$$i(t) = i_h(t) + I_p$$

C.I. : $i(0) = 0\,A \Rightarrow 0 = A + I_p$

$\Rightarrow A = -I_p \Rightarrow i(t) = I_p(1 - e^{-t/\tau})$

Circuit RL



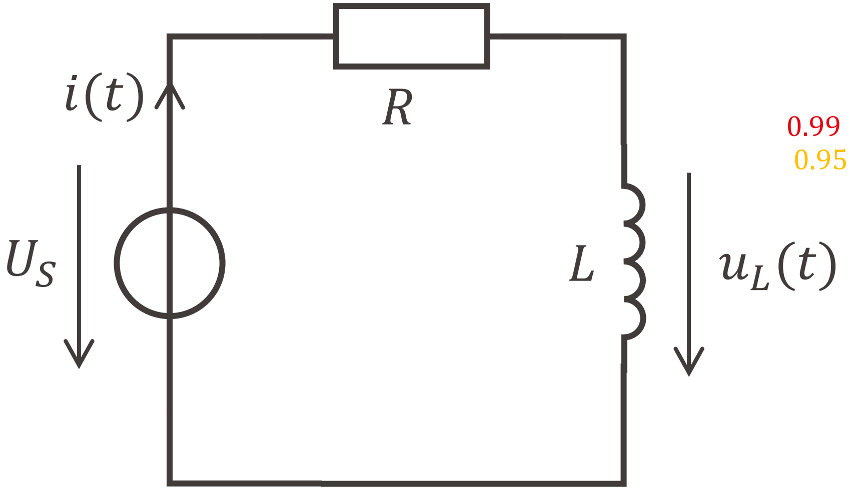
- On modélise un circuit dépendant du temps t:

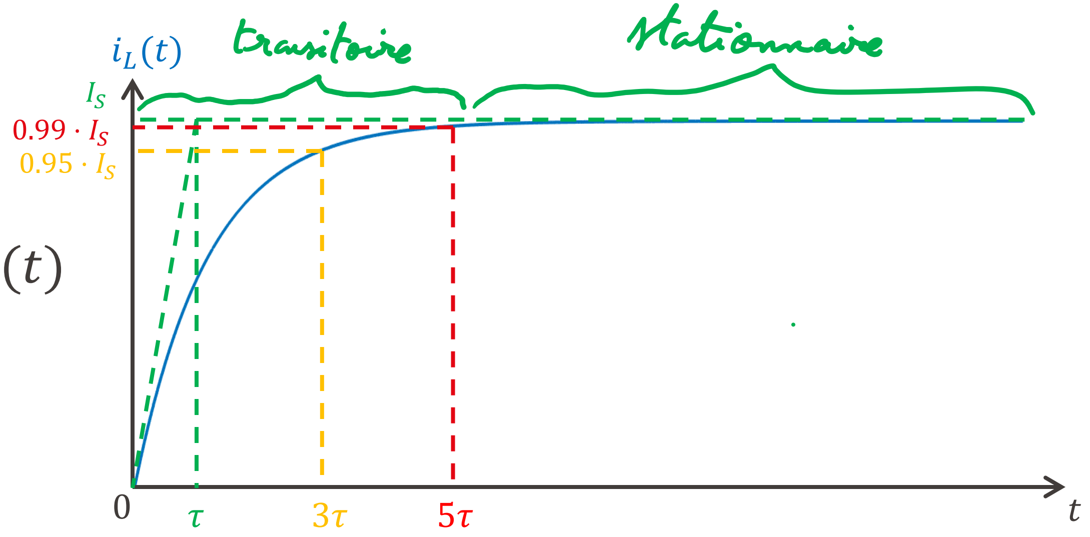
$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S}$$

Circuit RL

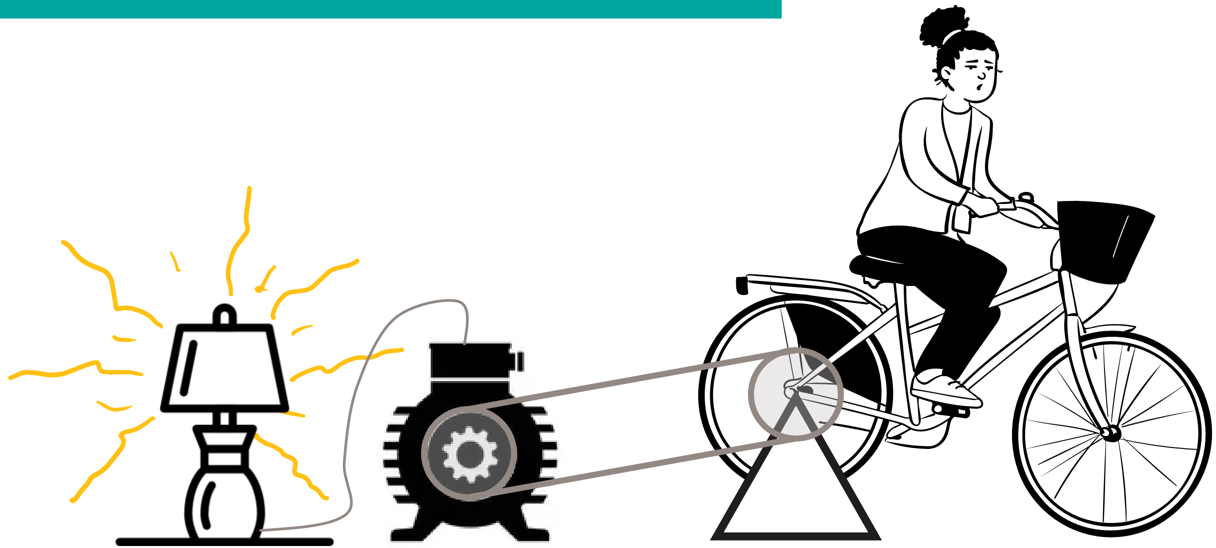
- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$





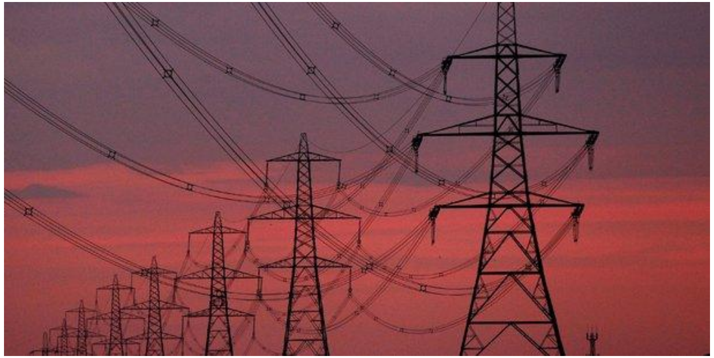
Régime sinusoïdal permanent



Signaux alternatifs

- Ce que nous savons faire pour l'instant:
  - Source constante
  - Régime transitoire d'un condensateur ou d'une inductance
  - Régime stationnaire

- Ce qu'il faut savoir faire aussi:
  - Signaux alternatifs périodiques



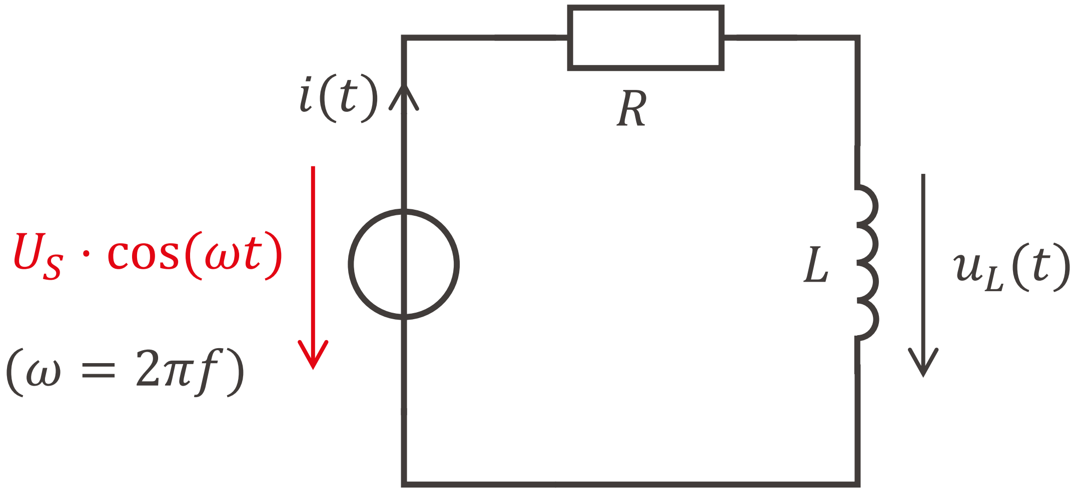
Réseau électrique: 50 Hz

Telecomm: ~ 5 GHz

Son: ~ 1 kHz

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

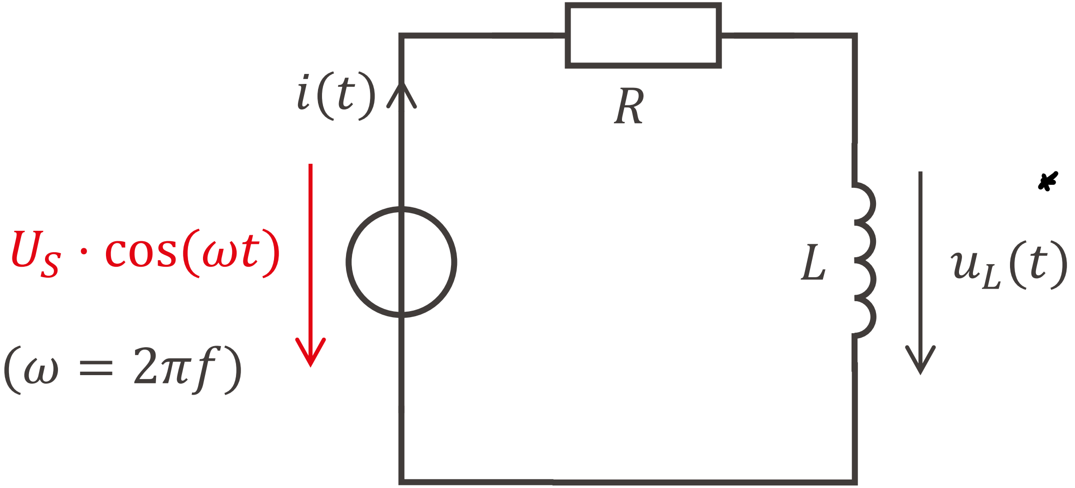


$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

C. Lafforgue

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)$$

* éq. hom. associée :

$\Rightarrow i_h(t) = A e^{-t/\tau}$

* solution particulière.

$I_p = \text{cste}$

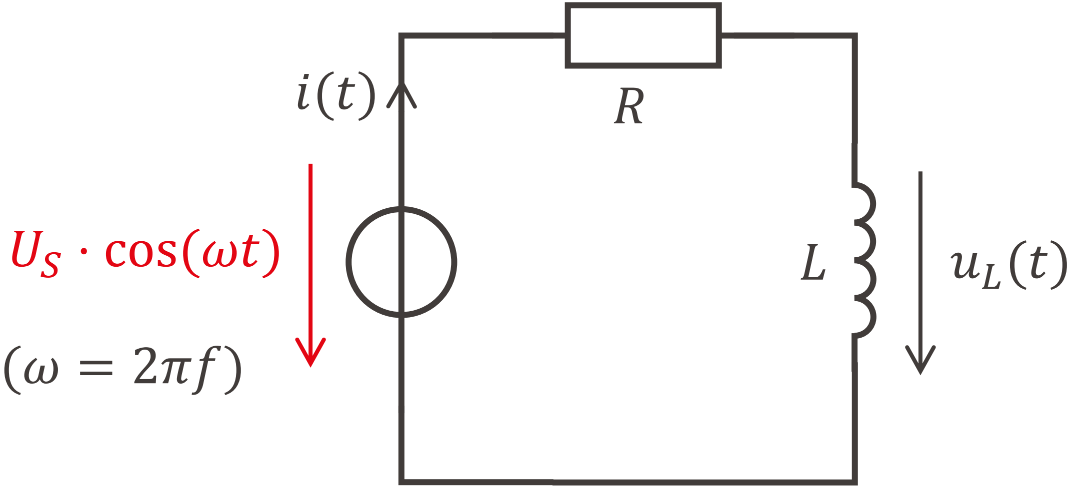
$\Rightarrow \cancel{\frac{R}{L} I_p = \frac{1}{L} U_S \cos(\omega t)}$

Circuit RL

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$-\omega I_p \sin(\omega t+\varphi) + \frac{R}{L} I_p \cos(\omega t+\varphi) = \frac{1}{L} U_s \cos(\omega t)$$



Solution particulière sous la forme:

$$i_p(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi)$$

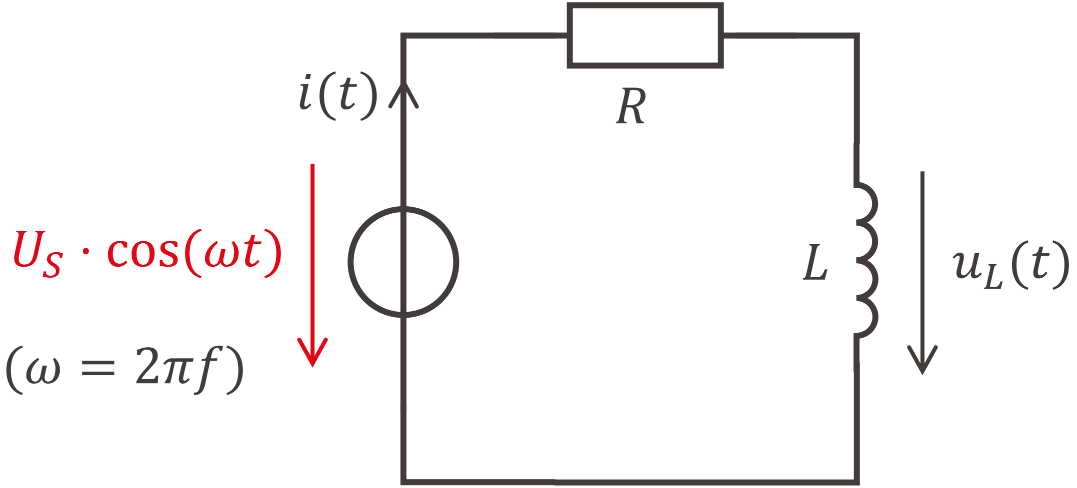
$$I_p = \frac{U_s}{R\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



La résolution peut être compliquée.

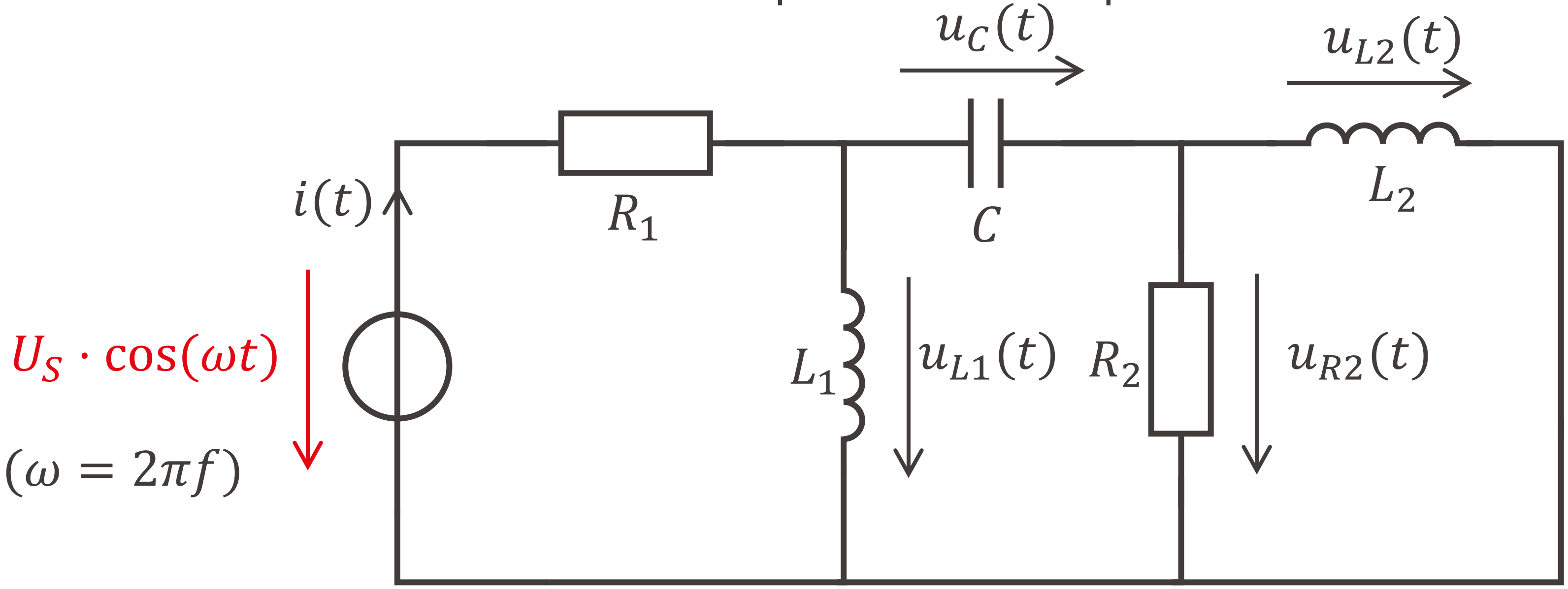
La solution dépend de la fréquence.

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

C. Lafforgue

Circuit RL

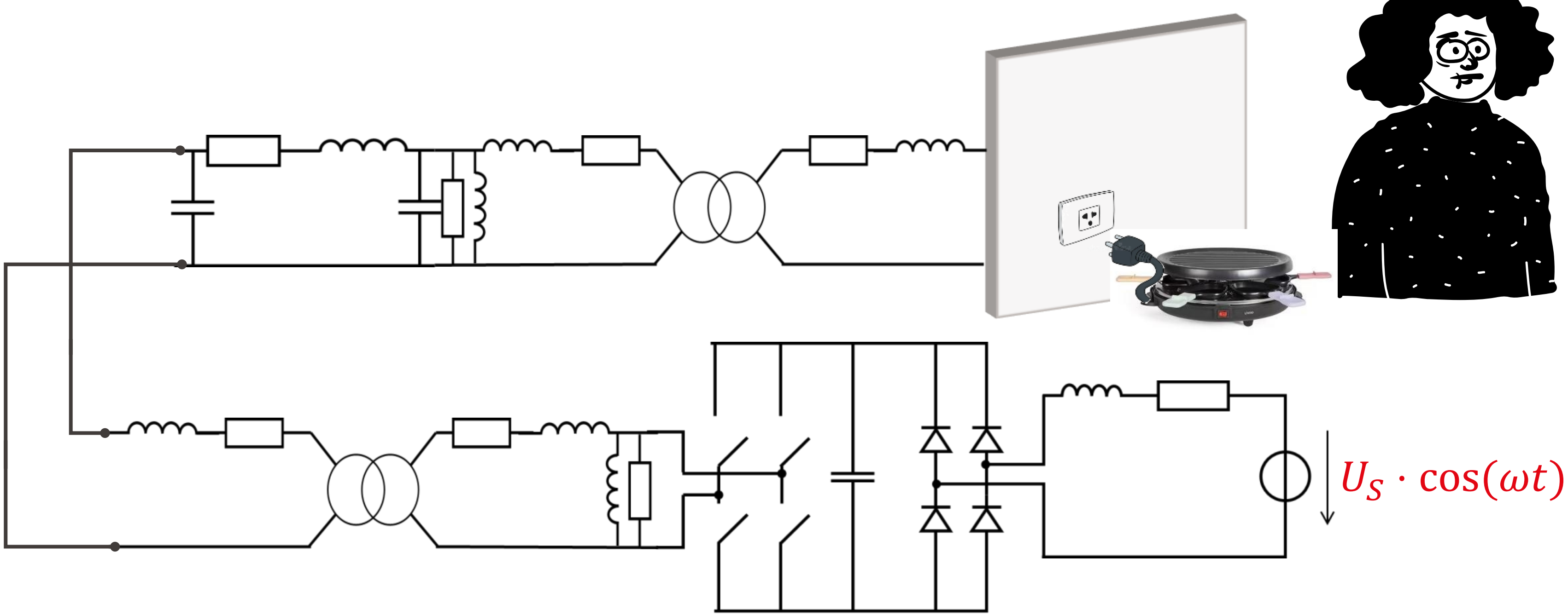
- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Circuit complet

C. Lafforgue

- Exemple: branchement électrique simple



Signaux alternatifs

- Il existe une méthode pour modéliser les circuits en régime sinusoïdal permanent très simplement

- Avant, il faut bien comprendre les signaux sinusoïdaux

Pulsation ($= 2\pi f$)

$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude (crête)

Phase

Signaux alternatifs

- **<u>Définition:</u>** On appelle régime permanent sinusoïdal un régime dans lequel courants et tensions évoluent périodiquement sous forme de signaux sinusoïdaux **une fois le régime transitoire passé.**
  - Par exemple, dans les circuits vus précédemment, le régime transitoire est passé lorsque $t > 5\tau$

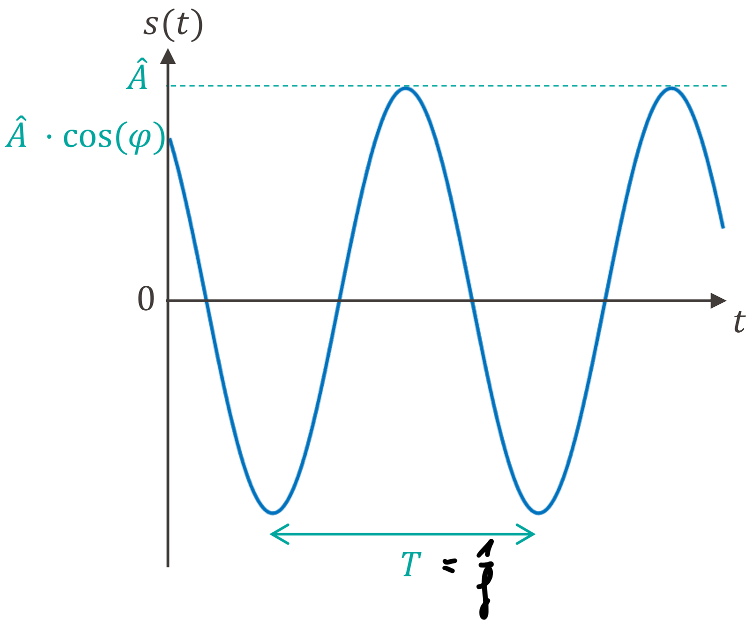
Signaux alternatifs

Pulsation ($= 2\pi f$)

$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude (crête)

Phase

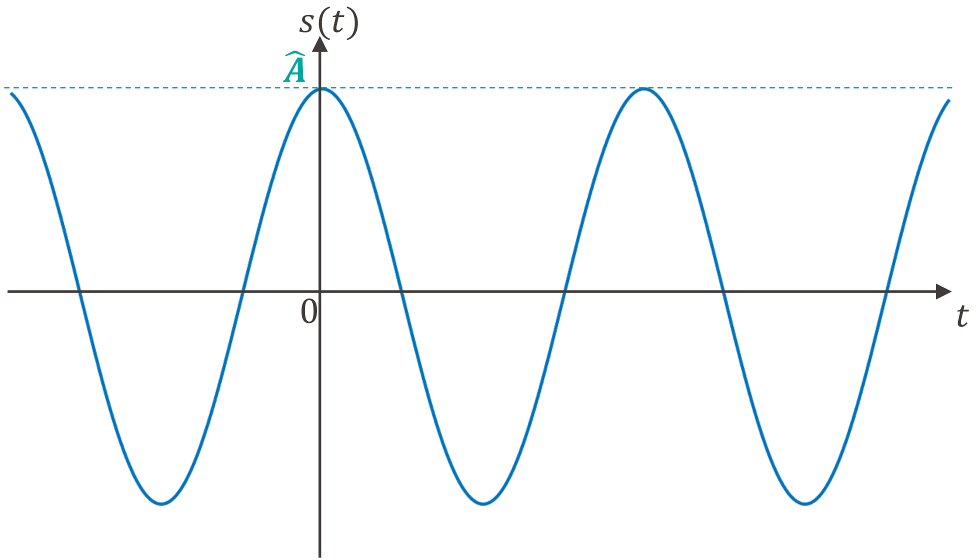


C. Lafforgue

C. Lafforgue

Signaux alternatifs

- L'amplitude:
  - Aussi appelée valeur crête
  - Correspond à la valeur maximale du signal



- Autre paramètre lié: la valeur efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt}$$

Signaux alternatifs

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{A}^2 \cos(\omega t+\varphi)\,dt^2}$$

$$\int_0^T \hat{A}^2 \cos(\omega t+\varphi)^2 dt = \hat{A}^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\omega t+2\varphi)\right)dt$$

$$'' \quad = \hat{A}^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2}\,dt + \frac{\hat{A}^2}{2}\int_0^T \cos(2\omega t+2\varphi)\,dt$$

$$'' \quad = \hat{A}^2 \cdot \frac{T}{2} + \hat{A}^2 \times \frac{1}{4\omega}\left[\sin(2\omega t+2\varphi)\right]_0^T$$

$$'' \quad = \hat{A}^2 \cdot \frac{T}{2} + \frac{\hat{A}^2}{4\omega}\left(\sin(2\omega T+2\varphi) - \sin(2\varphi)\right) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$'' \quad = \hat{A}^2 \cdot \frac{T}{2} + \cancel{\frac{\hat{A}^2}{4\omega}\left(\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)\right)} = 0$$

$$'' \quad = \frac{\hat{A}^2}{2} T$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{T} \times \frac{\hat{A}^2}{2} T}$$

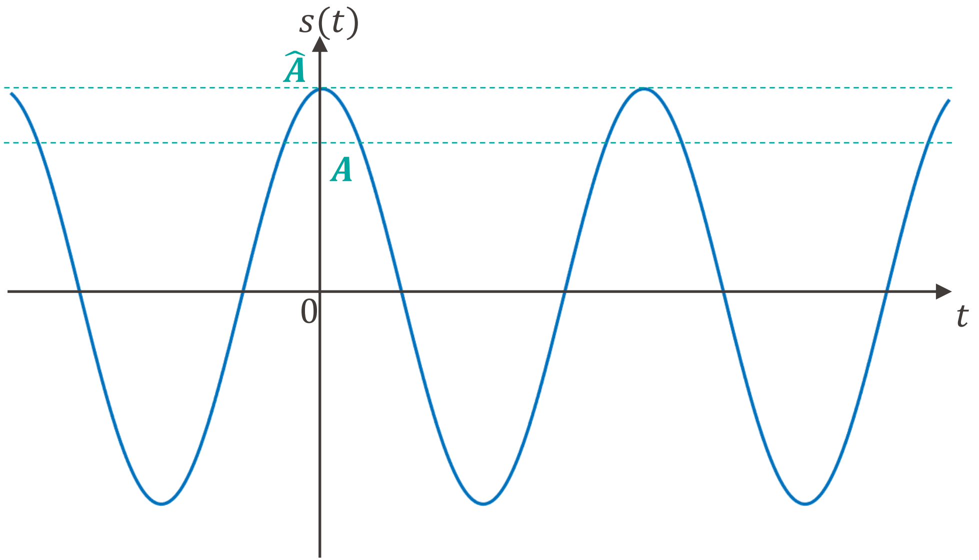
$$A = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$$

Signaux alternatifs

- L'amplitude:
  - Aussi appelée valeur crête
  - Correspond à la valeur maximale du signal

- Autre paramètre lié: la valeur efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$$



Signaux alternatifs

- Pourquoi définit-on la valeur efficace?
  - Exemple: puissance absorbée par une résistance
  - $p(t) = Ri(t)^2$
  - $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$
  - $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$ (puissance moyenne)

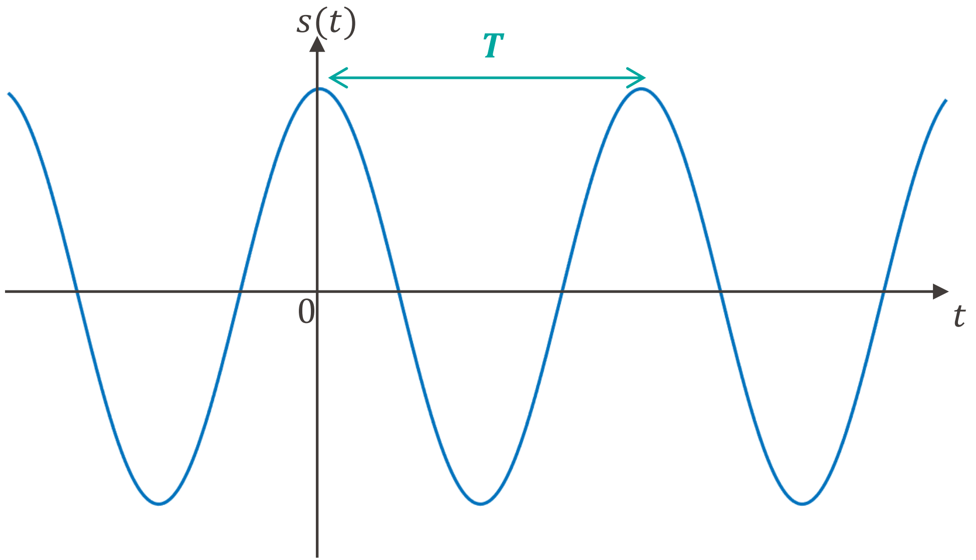
$$= \frac{1}{T}\int_0^T R\hat{I}^2 \cos(\omega t + \varphi)^2 dt = \frac{R\hat{I}^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$P = R\frac{\hat{I}^2}{2} = R\frac{(I\sqrt{2})^2}{2} = RI^2$$

Signaux alternatifs

- La pulsation:
  - Liée à la périodicité du signal

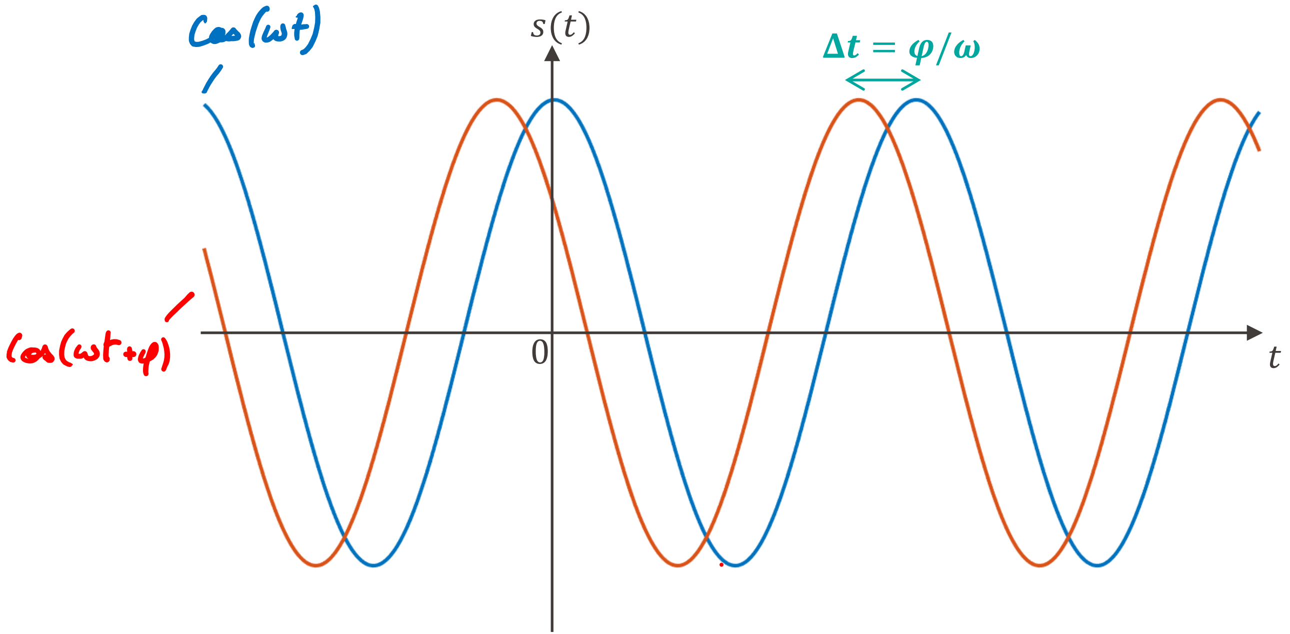
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



  - T s'exprime en seconde (s)
  - f s'exprime en hertz (Hz)
  - ω s'exprime en radian par seconde (rad/s, ou s^{-1})

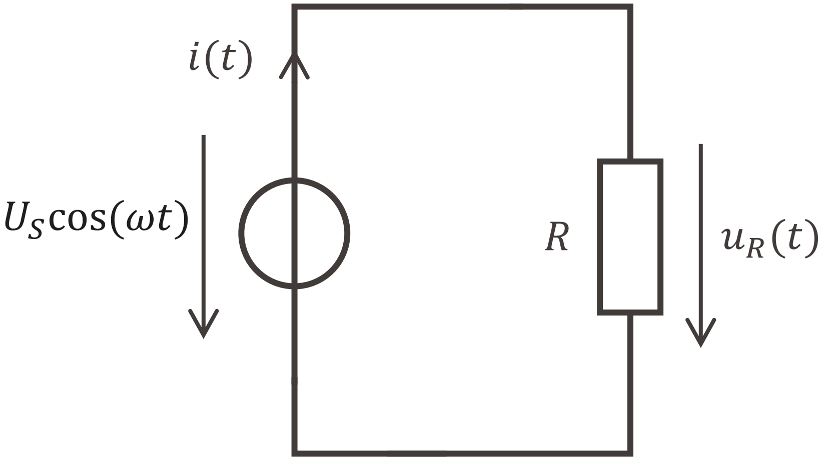
Signaux alternatifs

- La phase:
  - Traduit le retard d'un signal
  - φ s'exprime en radian (rad)



Signaux alternatifs – la résistance

C. Lafforgue

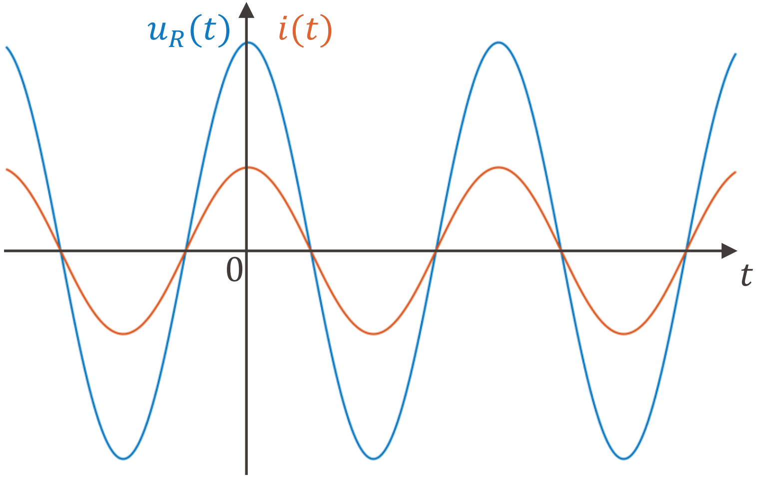


Loi des mailles:
$$u_r(t) = U_s\cos(\omega t)$$

Loi d'Ohm:
$$u_R(t) = Ri(t)$$

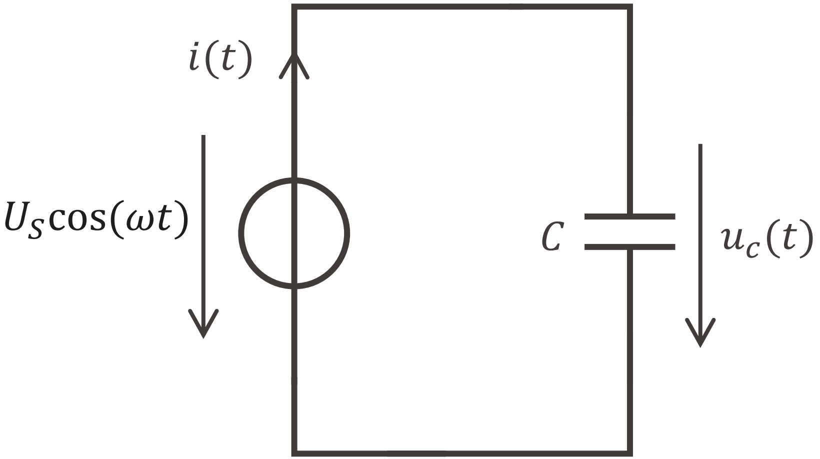
Donc:
$$i(t) = \frac{U_s}{R}\cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$ rad: courant et tension sont **en phase**



Signaux alternatifs – le condensateur

C. Lafforgue



Loi des mailles:

$$u_c(t) = U_s\cos(\omega t)$$

Condensateur:

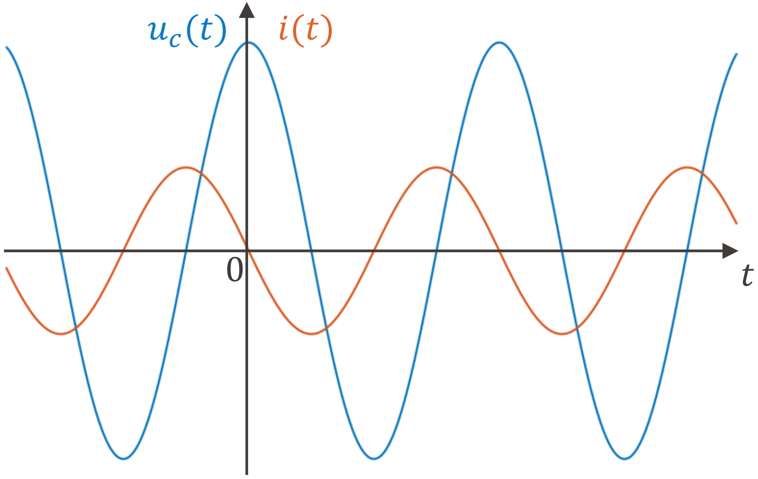
$$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

Donc:

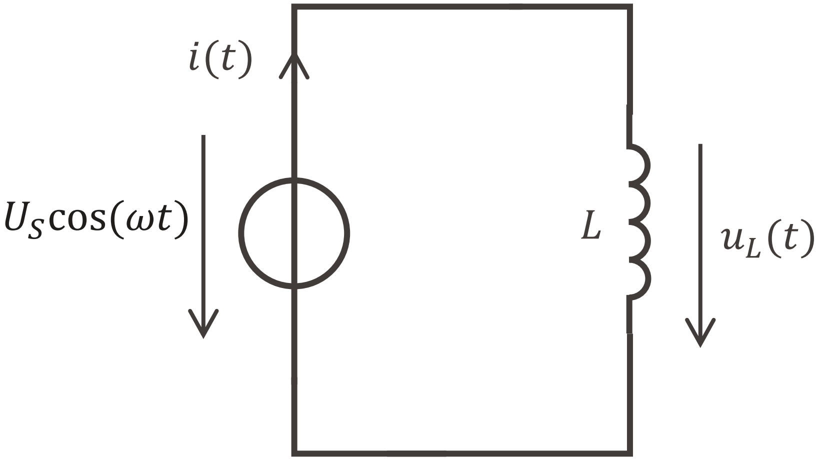
$$i(t) = -C\omega U_s\sin(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega U_s\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **avance de phase** sur la tension



Signaux alternatifs – l'inductance

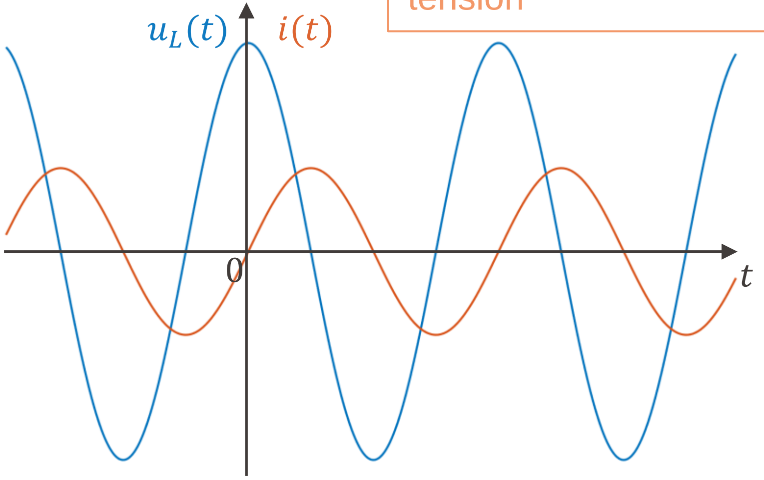


Loi des mailles:
$$u_L(t) = U_s\cos(\omega t)$$

Inductance:
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

Donc:
$$i(t) = \frac{U_s}{L\omega}\sin(\omega t)$$
$$i(t) = \frac{U_s}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **retard de phase** sur la tension



Signaux alternatifs

$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi_U)$ $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_I)$

Composant	Loi	$\hat{I}/\hat{U}$	$\varphi_I - \varphi_U$
Résistance  R	$u(t) = Ri(t)$	$\frac{1}{R}$	0
Condensateur  C	$i(t) = C\frac{du}{dt}(t)$	$C\omega$	$\frac{\pi}{2}$
Inductance  L	$u(t) = L\frac{di}{dt}(t)$	$\frac{1}{L\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

Signaux alternatifs

- Que remarque-t-on?
  - L’amplitude de la tension est proportionnelle à l’amplitude du courant
  - Cela rappelle un peu la loi d’Ohm…
  - **Mais les signaux ne sont pas proportionnels car il y a un décalage de phase**

- Que pouvons-nous faire?
  - Les fonctions trigonométriques ont d’autres propriétés intéressantes…

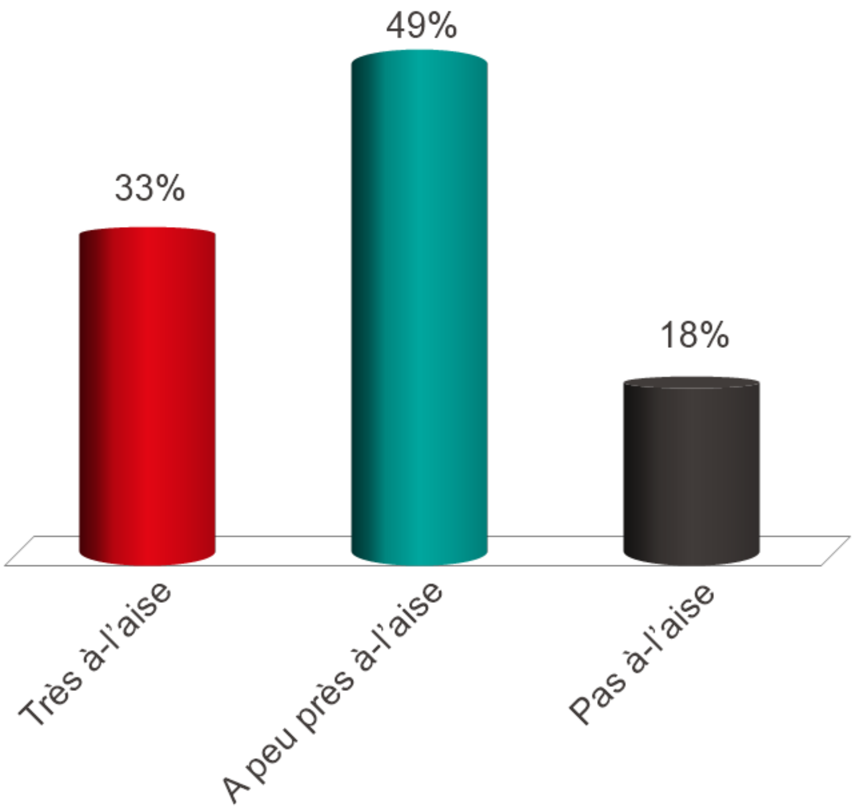
Signaux alternatifs

- Que remarque-t-on?
  - L’amplitude de la tension est proportionnelle à l’amplitude du courant
  - Cela rappelle un peu la loi d’Ohm…
  - **Mais les signaux ne sont pas proportionnels car il y a un décalage de phase**

- Que pouvons-nous faire?
  - Les fonctions trigonométriques ont d’autres propriétés intéressantes…
  - … liées aux **nombres complexes**

Comment vous sentez-vous avec les nombres complexes?

A. Très à-l'aise
B. A peu près à-l'aise
C. Pas à-l'aise



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- Que pouvons-nous faire?
  - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes…
  - … liées aux **nombres complexes**

$j^2 = -1$

- Nombres complexes:
  - On considère $\underline{x} \in \mathbb{C}$
  - Le cours de maths nous dit que $\underline{x} = \hat{X}(\cos(\theta) + j\sin(\theta)) = \hat{X}e^{j\theta}$
  - Donc $Re[\underline{x}] = \hat{X}\cos(\theta) = Re[\hat{X}e^{j\theta}]$
  - En appliquant à notre cas: $\hat{A}\cos(\omega t + \varphi) = Re[\hat{A}e^{j(\omega t+\varphi)}]$

Rappels sur les nombres complexes

- Forme algébrique

$$\underline{z} = x + jy$$

- Forme trigonométrique

$$\underline{z} = \rho\big(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\big)$$

- Forme exponentielle

$$\underline{z} = \rho e^{j\theta}$$

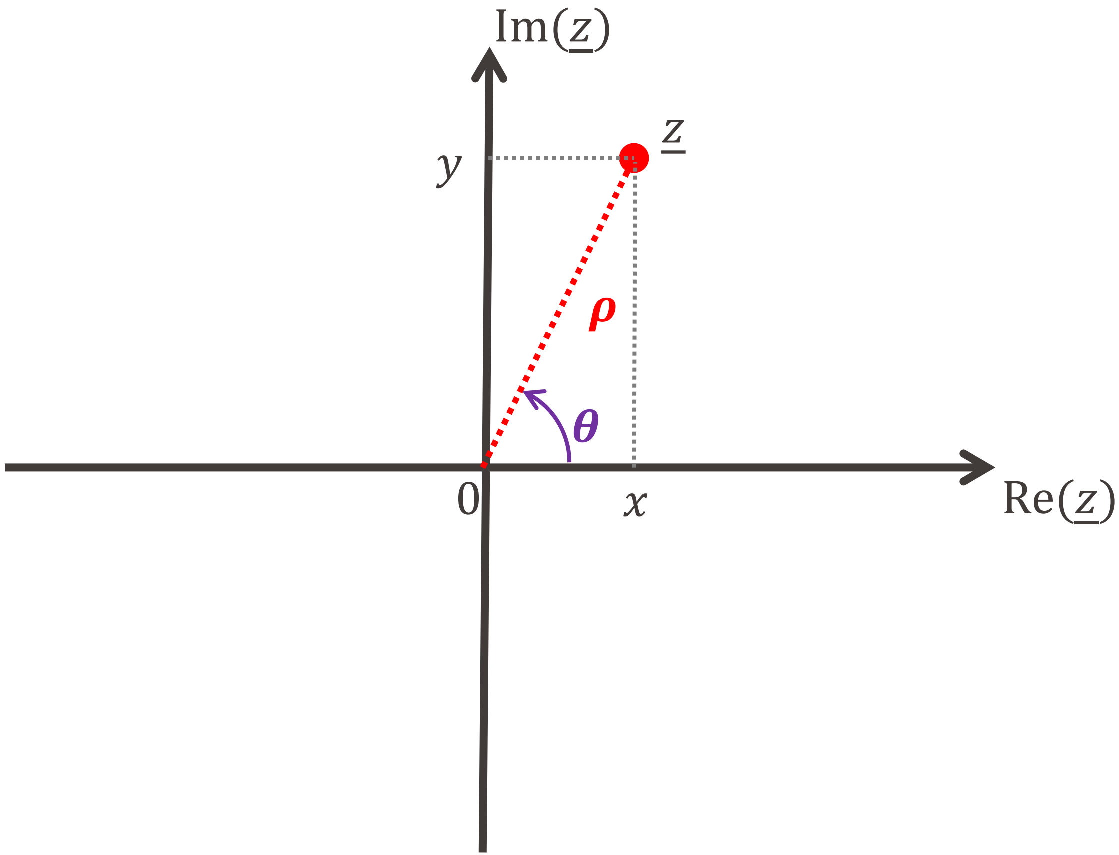
Voire fiche de rappel sur Moodle

- $\mathrm{Re}(\underline{z}) = x = \rho \cdot \cos(\theta) \quad ; \quad \mathrm{Im}(\underline{z}) = y = \rho \cdot \sin(\theta)$

  $|\underline{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \arg(\underline{z}) = \theta$

- $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \quad ; \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Rappels sur les nombres complexes



Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- Exemple:
  - $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi)$
  - On définit une tension complexe assosciée:

$$\underline{u}(t) = \hat{U}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

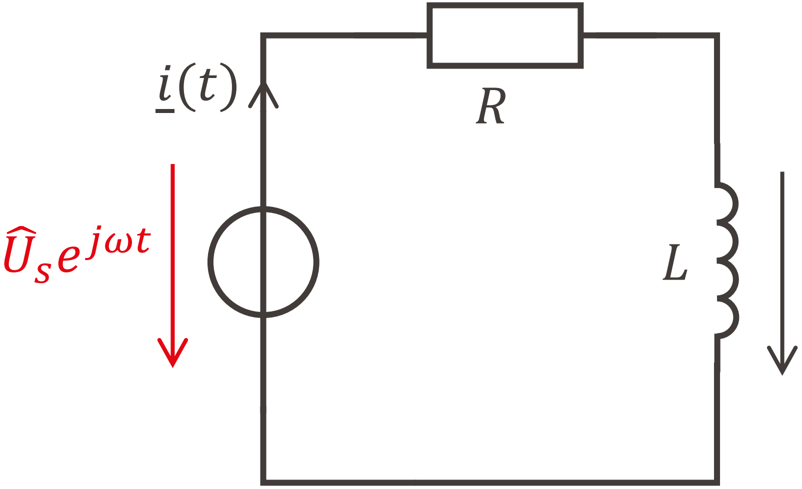
  - On a alors:

$$u(t) = Re\left[\underline{u}(t)\right]$$

  - On peut alors étudier les circuits avec les grandeurs sous forme complexe, et on prend la partie réelle du résultat.

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



loi des mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\hat{I} e^{j(\omega t+\varphi)} + \underline{u}_L(t)$$

$$\underline{u}_L(t) = L \frac{d\underline{i}}{dt}(t)$$

$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t+\varphi)}$$

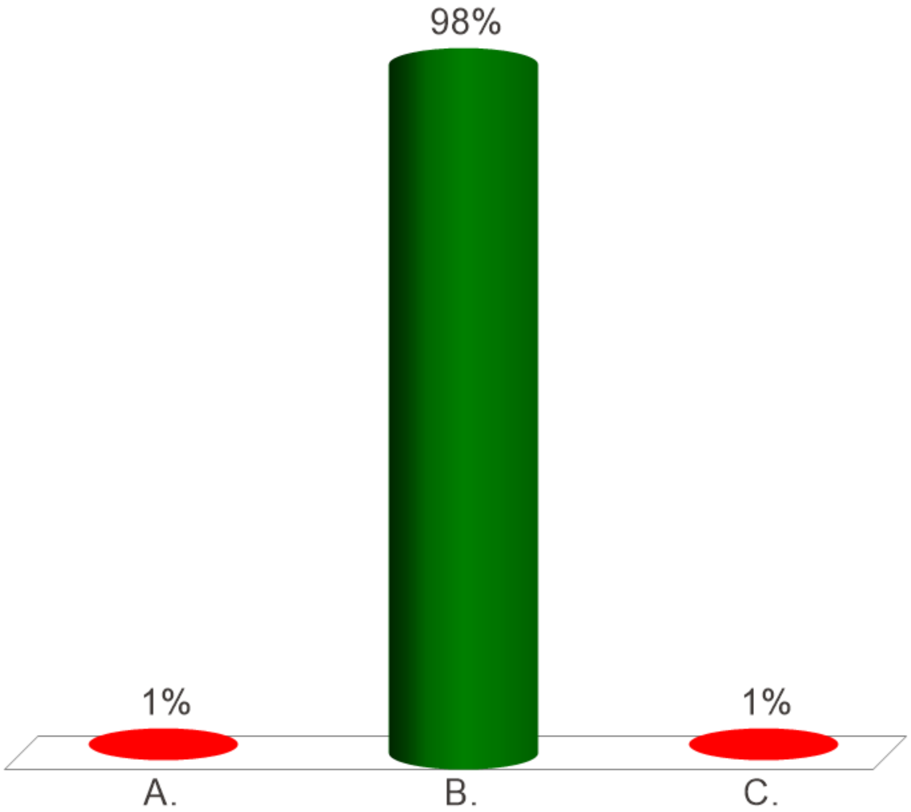
Quelle est la bonne réponse?

$$x(t) = Xe^{kt}$$

A. $\frac{dx}{dt}(t) = Xe^{kt}$

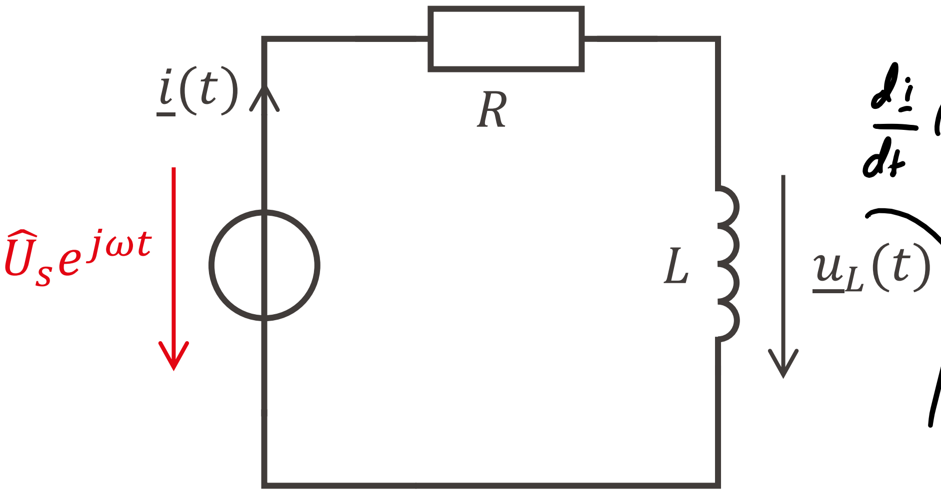
B. $\frac{dx}{dt}(t) = kXe^{kt}$

C. $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{X}{k}e^{kt}$



Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} + L \frac{d\underline{i}}{dt}(t)$$

$$\frac{d\underline{i}}{dt}(t) = j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = R \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} + jL\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

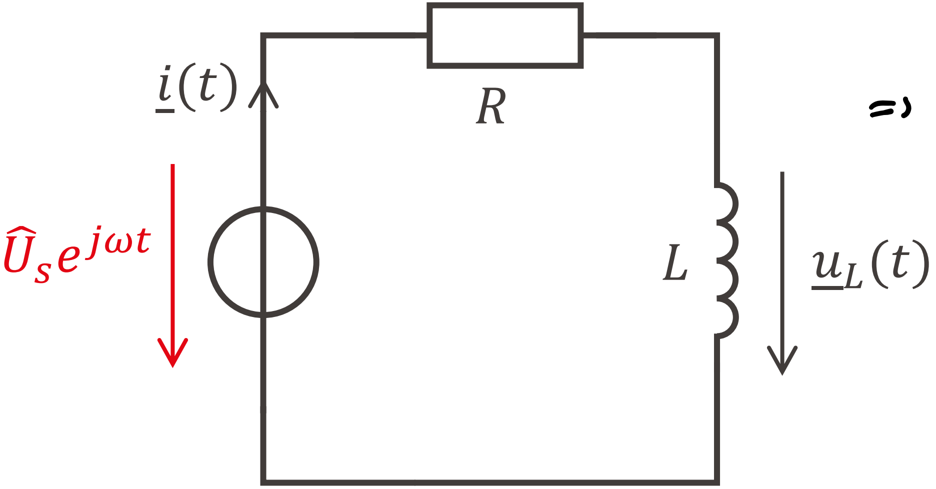
$$e^{j(\omega t + \varphi)} = e^{j\omega t} \times e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s \cancel{e^{j\omega t}} = R \hat{I} \cancel{e^{j\omega t}} e^{j\varphi} + jL\omega \hat{I} \cancel{e^{j\omega t}} e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s = R \hat{I} e^{j\varphi} + jL\omega \hat{I} e^{j\varphi}$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\hat{U}_s = (R + jL\omega)\hat{I}_s e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_s e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

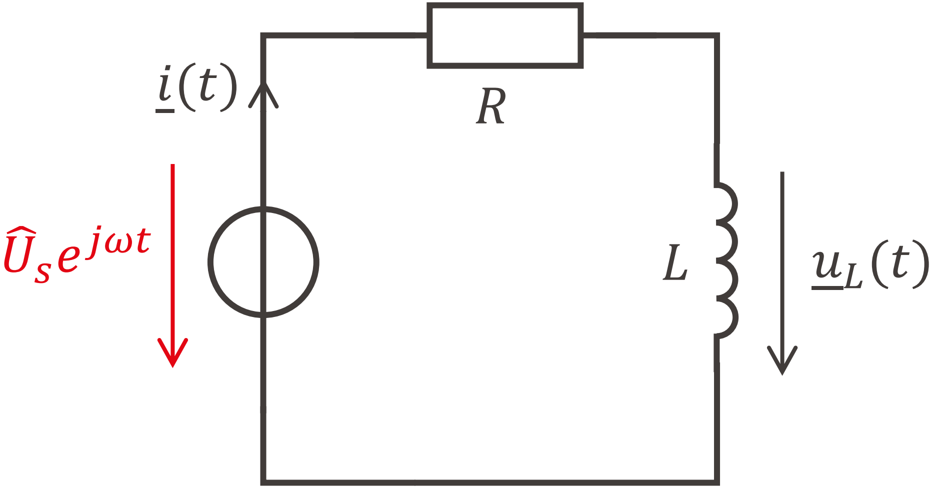
$$\Rightarrow \hat{I}_s = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$= \frac{\hat{U}_s}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Loi de mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

Inductance:

$$\underline{u}_L(t) = L\frac{d\underline{i}}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = L\left(j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = jL\omega\underline{i}(t)$$

On a alors:

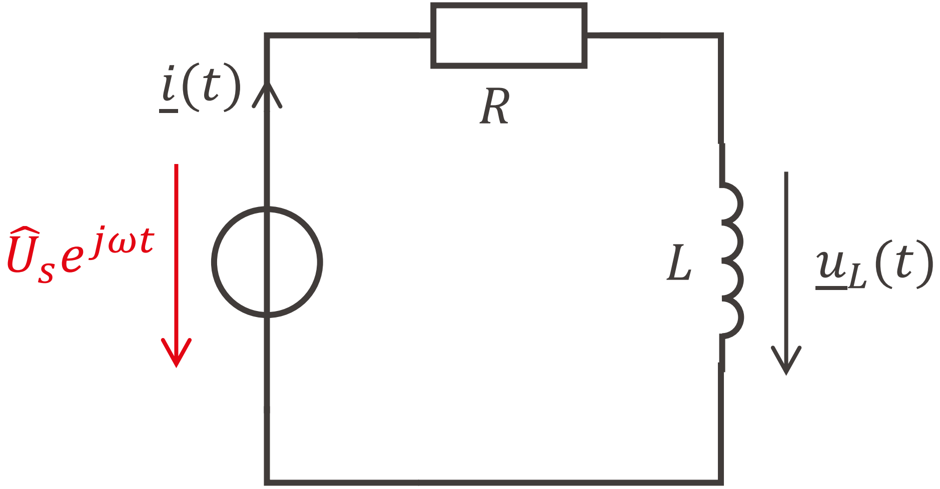
$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + jL\omega\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega)\underline{i}(t)$$

C. Lafforgue

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

On a alors:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + jL\omega\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega)\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I}e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

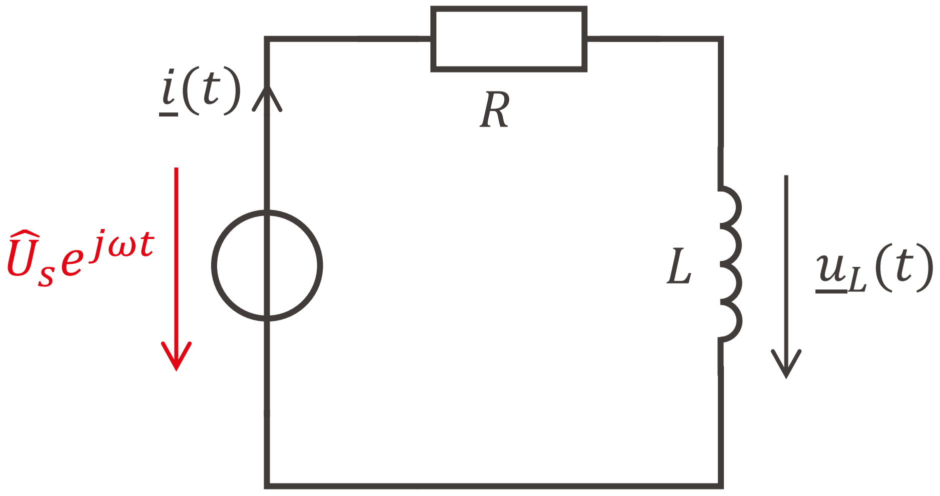
$$\Rightarrow \hat{I}e^{j\varphi}e^{j\omega t} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I}e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

C. Lafforgue

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

$$\hat{I} = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

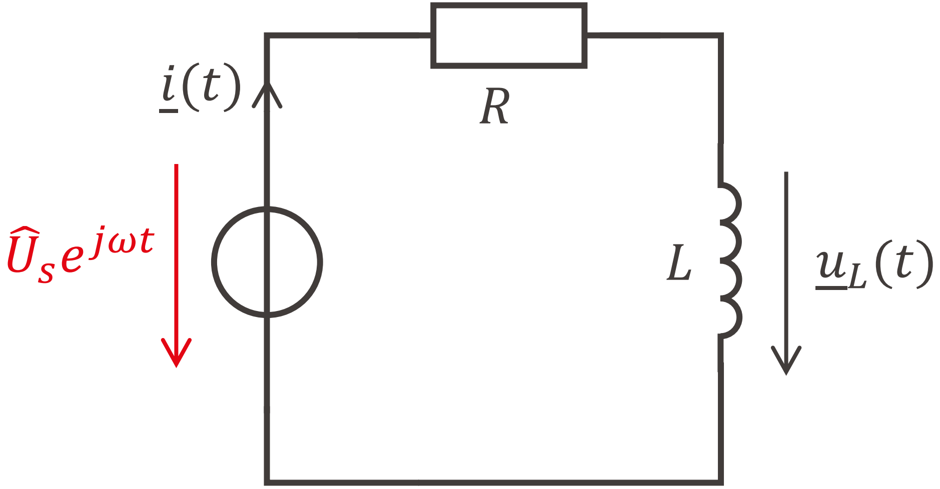
$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On peut trouver la solution sans résoudre d'équation différentielle!

Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- On voit qu'en régime permanent sinusoïdal il y a deux grandeurs à déterminer:
  - L'amplitude $\hat{X}$
  - La phase φ

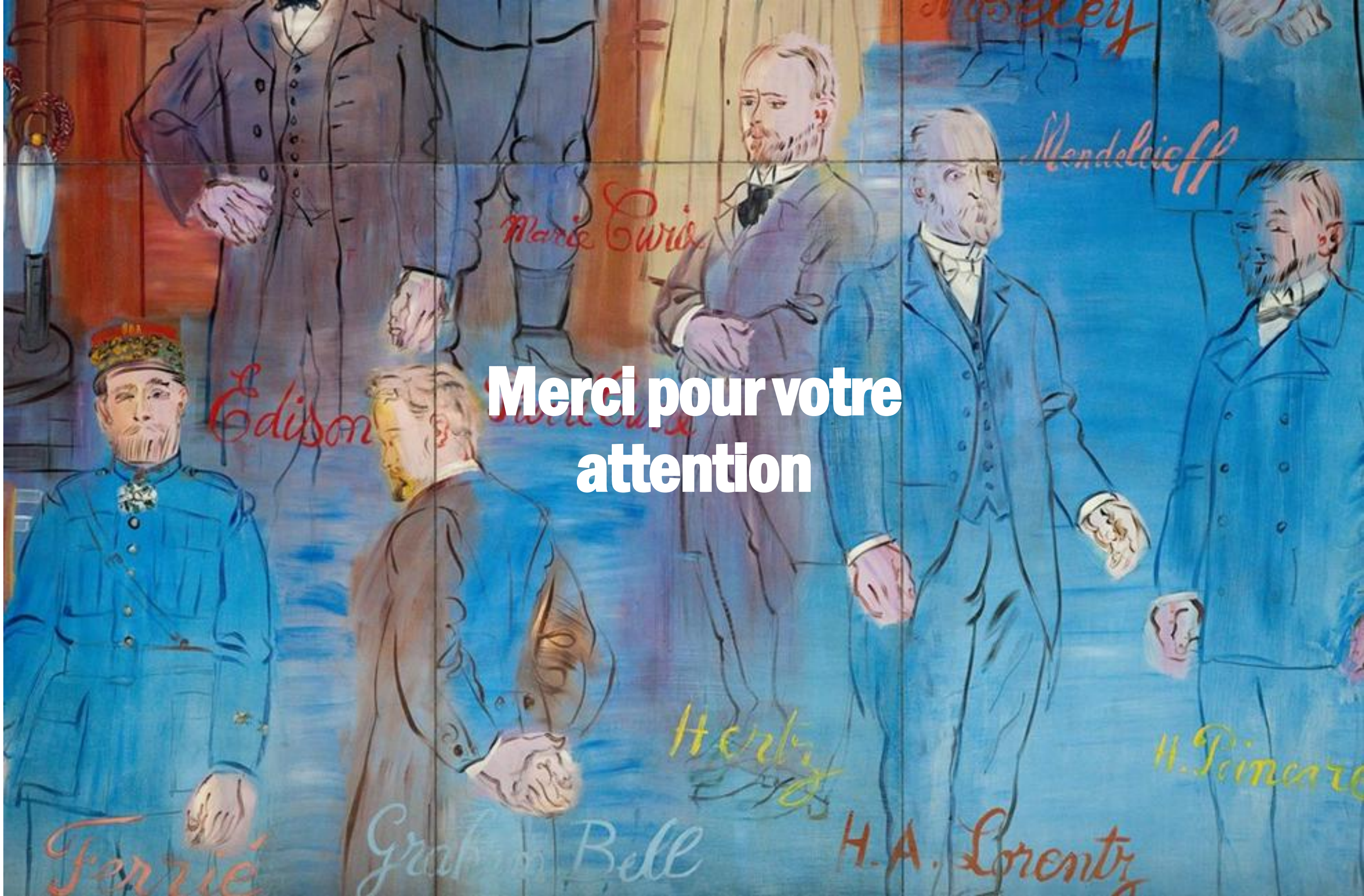
- On définit alors les **phaseurs:**
  - $\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$ (phaseur crête)

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{X}}\,e^{j(\omega t)}\right\}$$

  - $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$ (phaseur efficace)

$$\underline{X} = \frac{\underline{\hat{X}}}{\sqrt{2}}$$

Merci pour votre attention



R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris