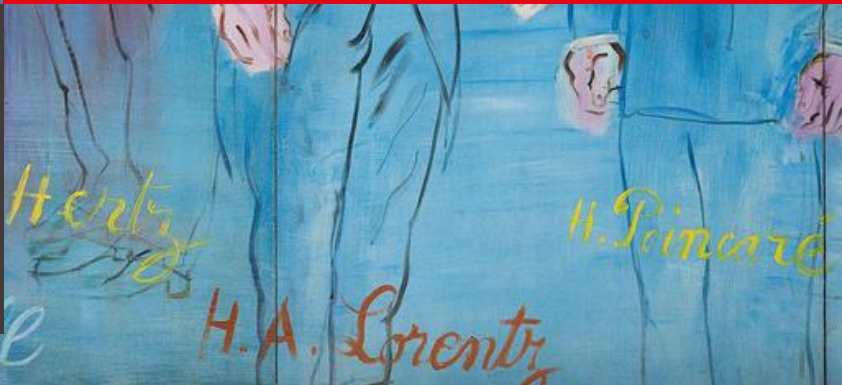


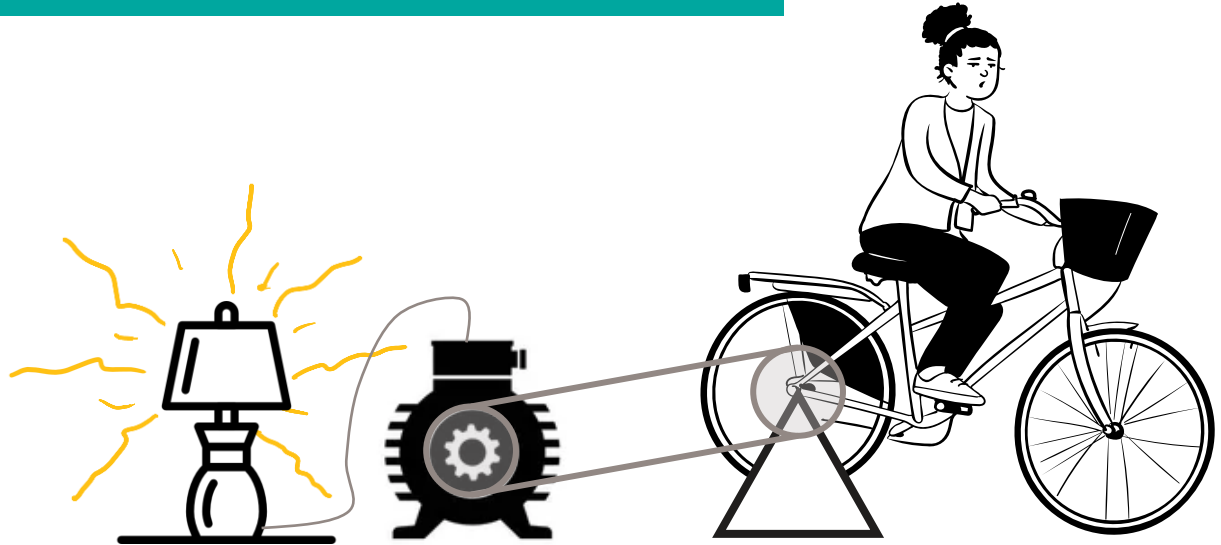
R. Duÿy - Musée d'art moderne, Paris

Cours 7: Révisions, introduction au régime sinusoïdal

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité
Automne 2025



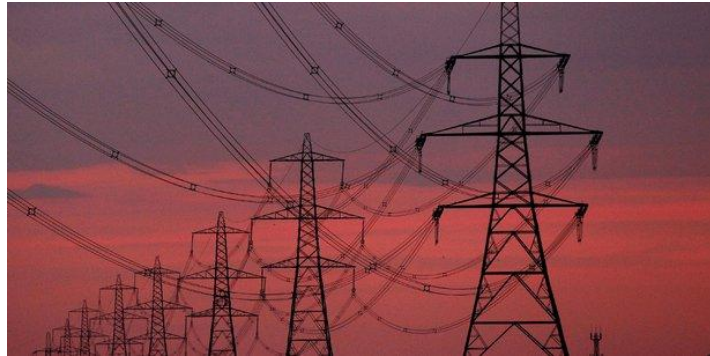
Régime sinusoïdal permanent



Signaux alternatifs

- Ce que nous savons faire pour l'instant:
 - Source constante
 - Régime transitoire d'un condensateur ou d'une inductance
 - Régime stationnaire

- Ce qu'il faut savoir faire aussi:
 - Signaux alternatifs périodiques



Réseau électrique: 50 Hz

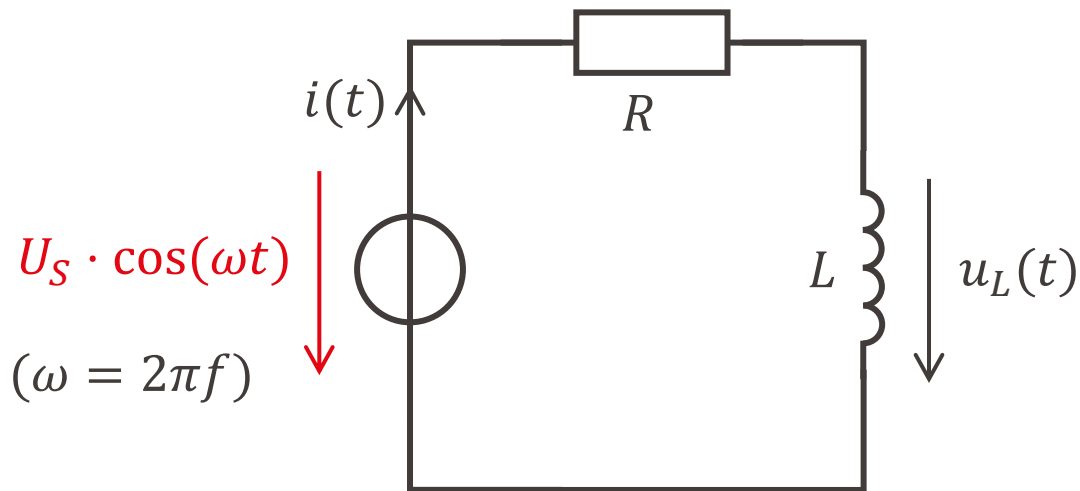


Telecomm: ~ 5 GHz



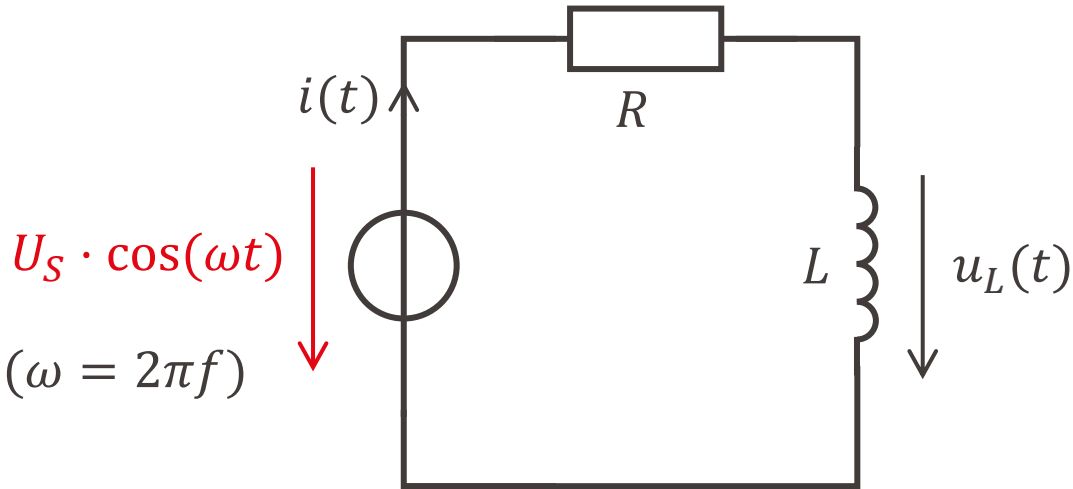
Son: ~ 1 kHz

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



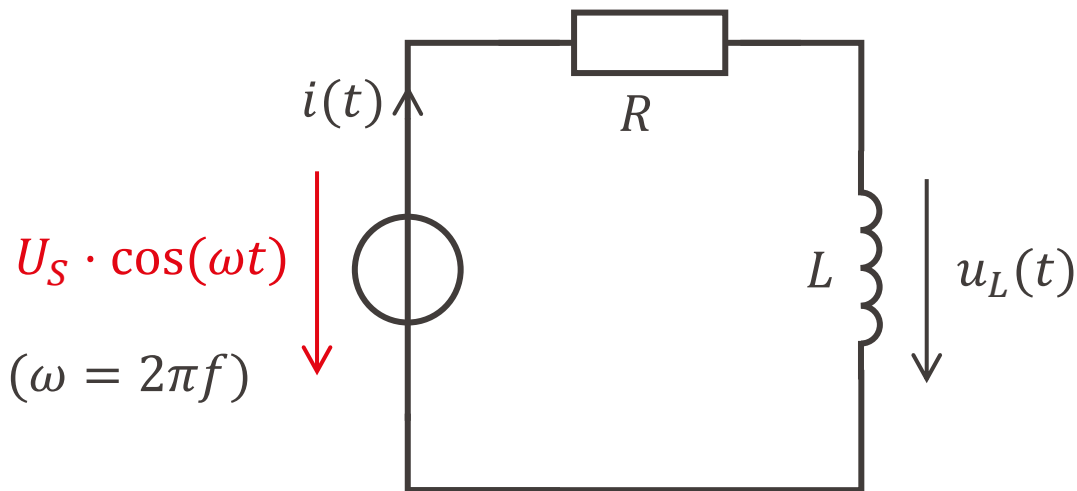
$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S \cdot \cos(\omega t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S \cdot \cos(\omega t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



Solution particulière sous la forme:

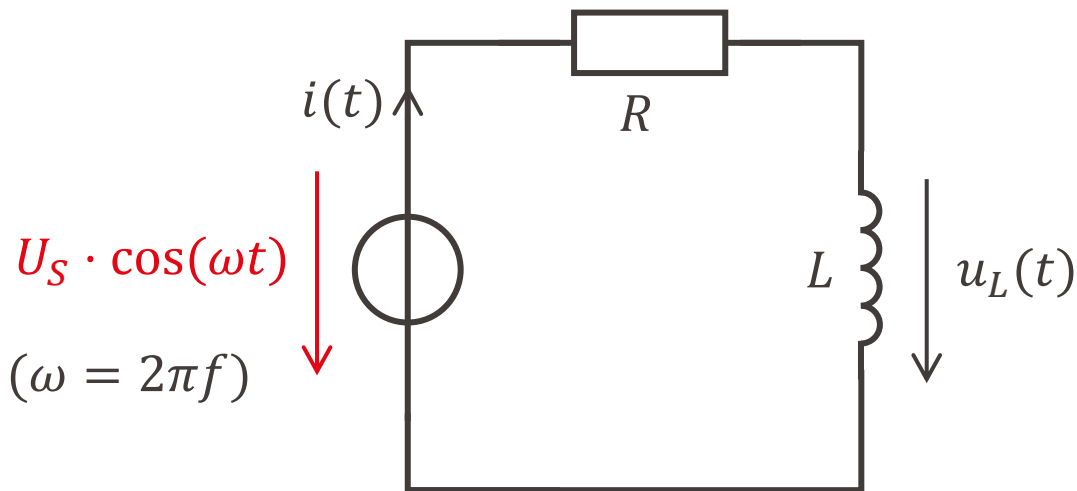
$$i_p(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I_p = \frac{U_S}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S \cdot \cos(\omega t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps t :

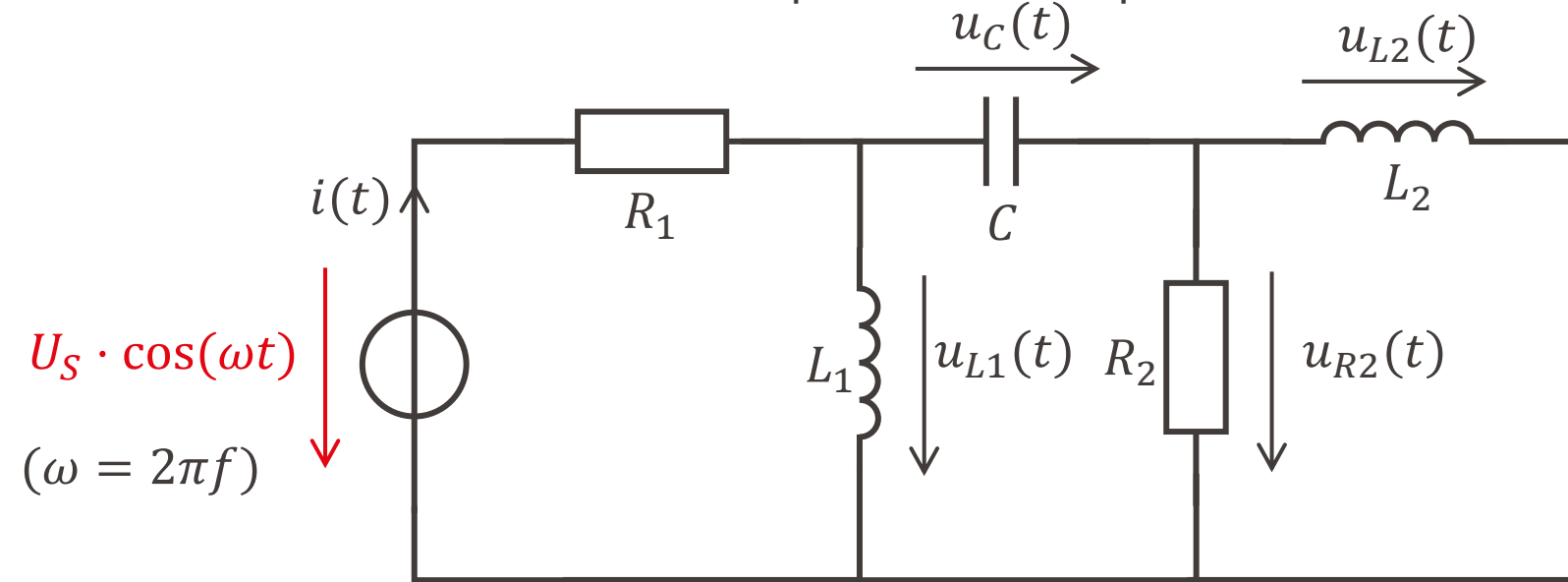


La résolution peut être compliquée.

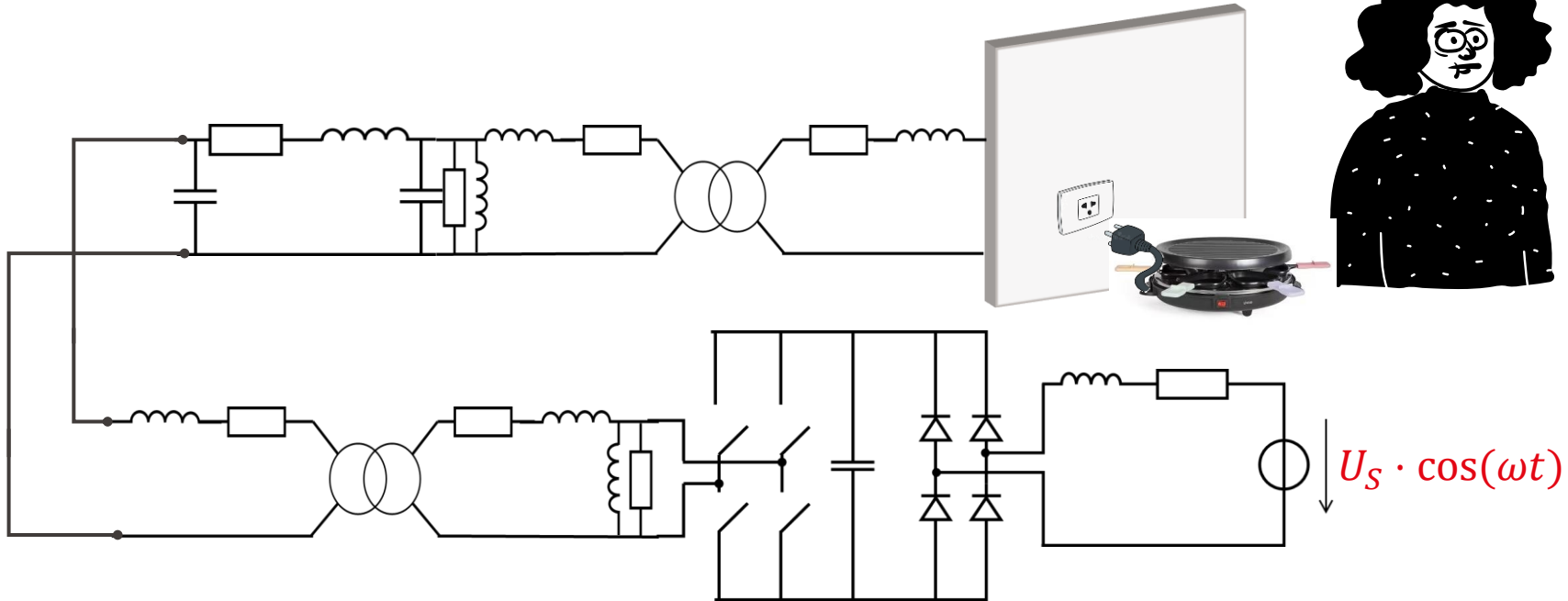
La solution dépend de la fréquence.

$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S \cdot \cos(\omega t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



- Exemple: branchement électrique simple



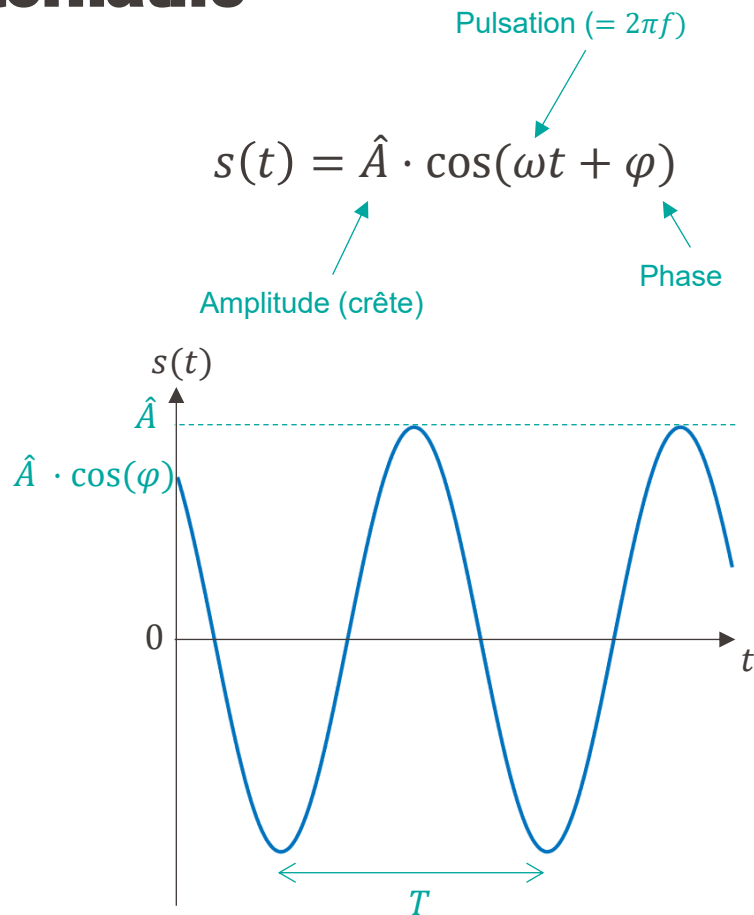
- Il existe une méthode pour modéliser les circuits en régime sinusoïdal permanent très simplement
- Avant, il faut bien comprendre les signaux sinusoïdaux

$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude (crête) Pulsation ($= 2\pi f$) Phase

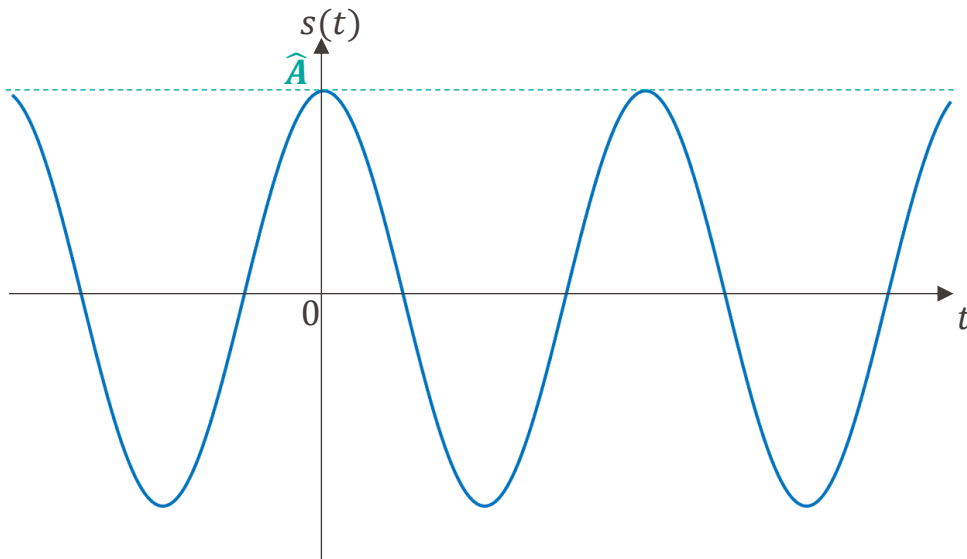
- **Définition:** On appelle régime permanent sinusoïdal un régime dans lequel courants et tensions évoluent périodiquement sous forme de signaux sinusoïdaux **une fois le régime transitoire passé.**
 - Par exemple, dans les circuits vus précédemment, le régime transitoire est passé lorsque $t > 5\tau$

Signaux alternatifs



- L'amplitude:
 - Aussi appelée valeur crête
 - Correspond à la valeur maximale du signal
- Autre paramètre lié: la valeur efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt}$$

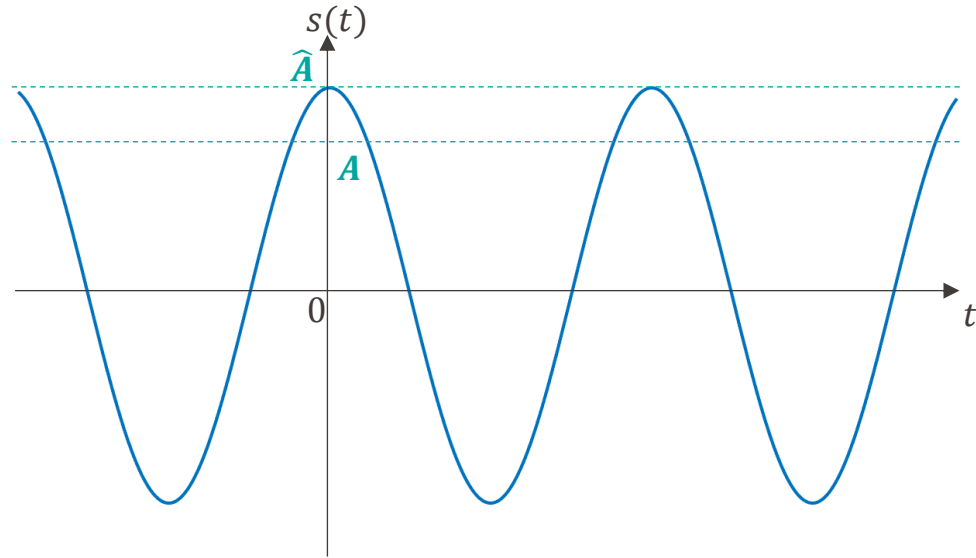


Signaux alternatifs



- L'amplitude:
 - Aussi appelée valeur crête
 - Correspond à la valeur maximale du signal
- Autre paramètre lié: la valeur efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$$



Signaux alternatifs



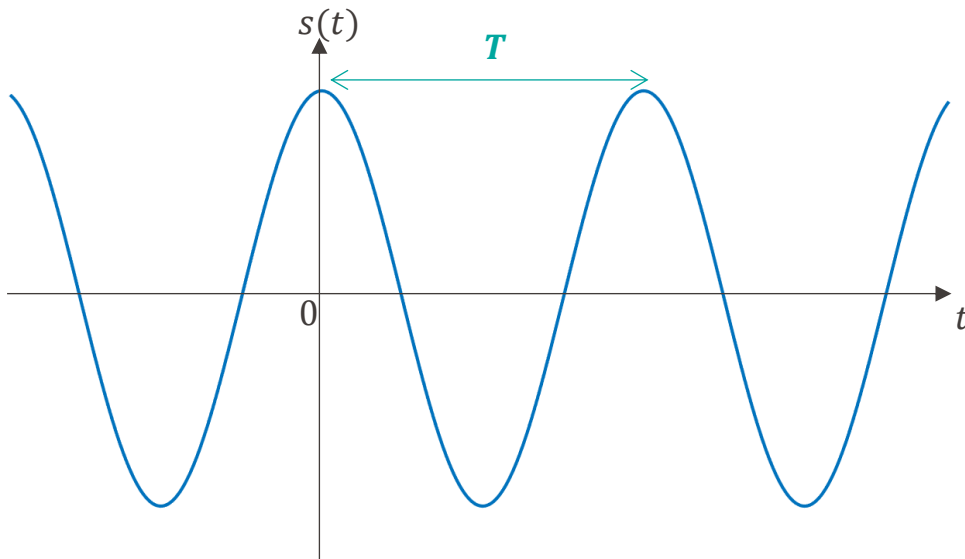
- Pourquoi définit-on la valeur efficace?
 - Exemple: puissance absorbée par une résistance
 - $p(t) = Ri(t)^2$
 - $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi)$
 - $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ (puissance moyenne)

- La pulsation:

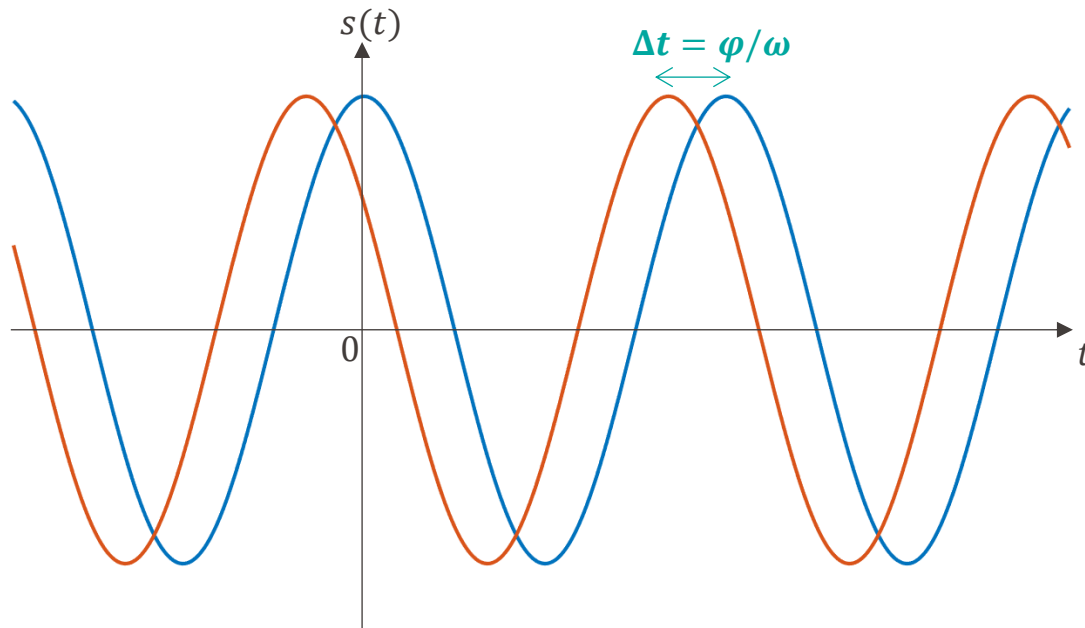
- Liée à la périodicité du signal

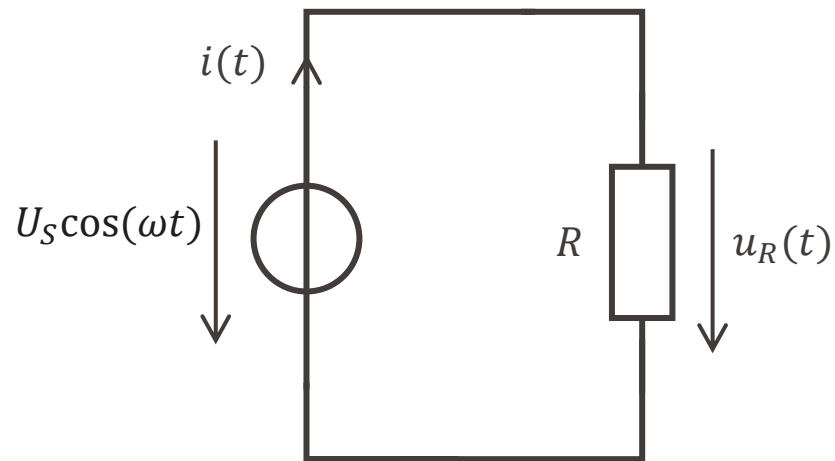
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- T s'exprime en seconde (s)
- f s'exprime en hertz (Hz)
- ω s'exprime en radian par seconde (rad/s, ou s^{-1})



- La phase:
 - Traduit le retard d'un signal
 - φ s'exprime en radian (rad)





Loi des mailles:

$$u_r(t) = U_s \cos(\omega t)$$

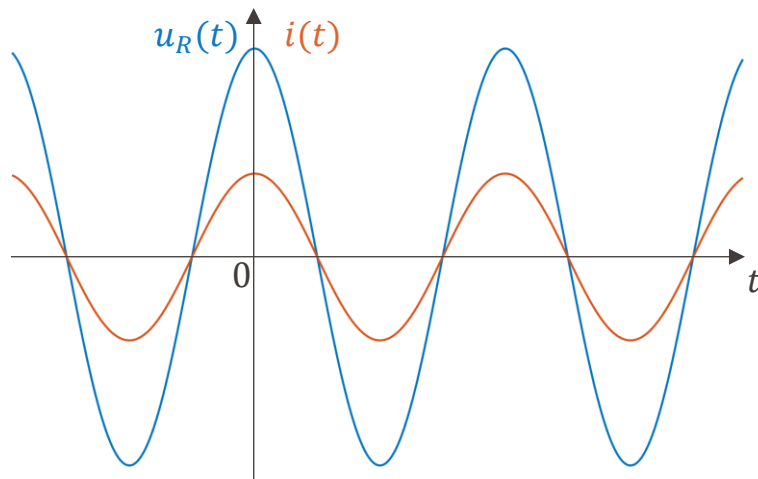
Loi d'Ohm:

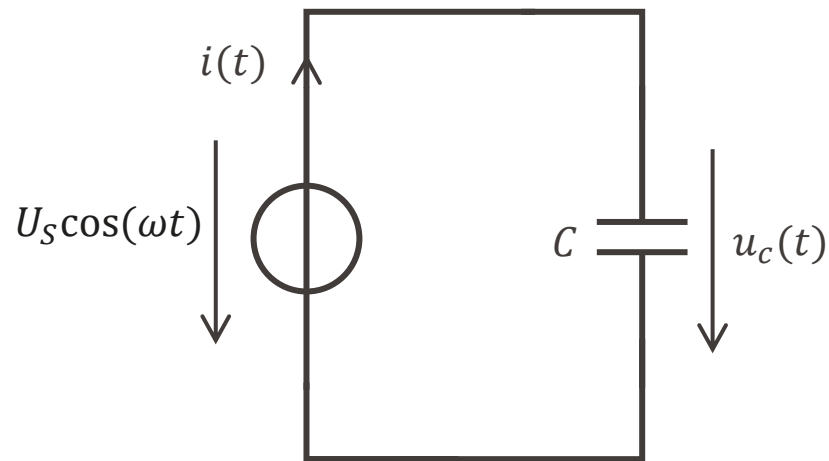
$$u_R(t) = R i(t)$$

Donc:

$$i(t) = \frac{U_s}{R} \cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$ rad: courant et tension sont **en phase**





Loi des mailles:
 $u_c(t) = U_s \cos(\omega t)$

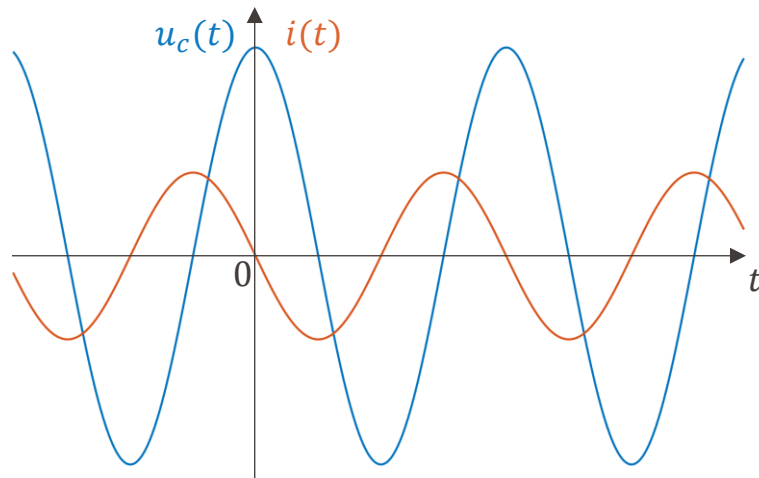
Condensateur:
 $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$

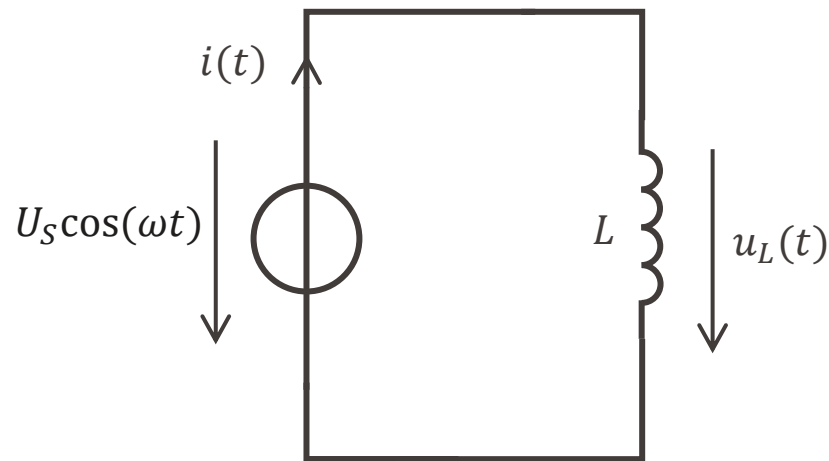
Donc:

$$i(t) = -C\omega U_s \sin(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega U_s \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **avance de phase** sur la tension





Loi des mailles:

$$u_L(t) = U_s \cos(\omega t)$$

Inductance:

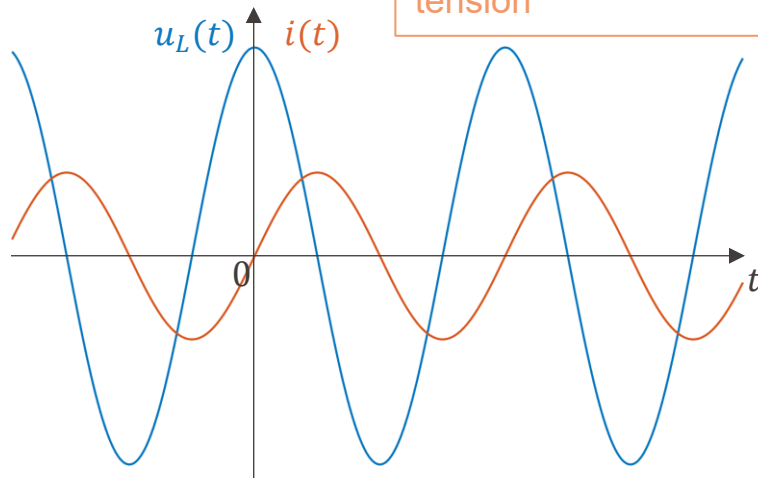
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$




Donc:

$$i(t) = \frac{U_s}{L\omega} \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{U_s}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **retard de phase** sur la tension



Composant	Loi	\hat{i}/\hat{u}	$\varphi_I - \varphi_U$
Résistance  R	$u(t) = Ri(t)$	$\frac{1}{R}$	0
Condensateur  C	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$	$C\omega$	$\frac{\pi}{2}$
Inductance  L	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$\frac{1}{L\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

- Que remarque-t-on?
 - L'amplitude de la tension est proportionnelle à l'amplitude du courant
 - Cela rappelle un peu la loi d'Ohm...
 - **Mais les signaux ne sont pas proportionnels car il y a un décalage de phase**

- Que pouvons-nous faire?
 - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes...

- Que remarque-t-on?
 - L'amplitude de la tension est proportionnelle à l'amplitude du courant
 - Cela rappelle un peu la loi d'Ohm...
 - **Mais les signaux ne sont pas proportionnels car il y a un décalage de phase**

- Que pouvons-nous faire?
 - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes...
 - ... liées aux **nombres complexes**

- Que pouvons-nous faire?
 - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes...
 - ... liées aux **nombres complexes**

- Nombres complexes:
 - On considère $\underline{x} \in \mathbb{C}$
 - Le cours de maths nous dit que $\underline{x} = \hat{X}(\cos(\theta) + j \sin(\theta)) = \hat{X}e^{j\theta}$
 - Donc $Re[\underline{x}] = \hat{X} \cos(\theta) = Re[\hat{X}e^{j\theta}]$
 - En appliquant à notre cas: $\hat{A} \cos(\omega t + \varphi) = Re[\hat{A}e^{j(\omega t + \varphi)}]$

- Forme algébrique

$$\underline{z} = x + jy$$

- Forme trigonométrique

$$\underline{z} = \rho(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$$

- Forme exponentielle

$$\underline{z} = \rho e^{j\theta}$$

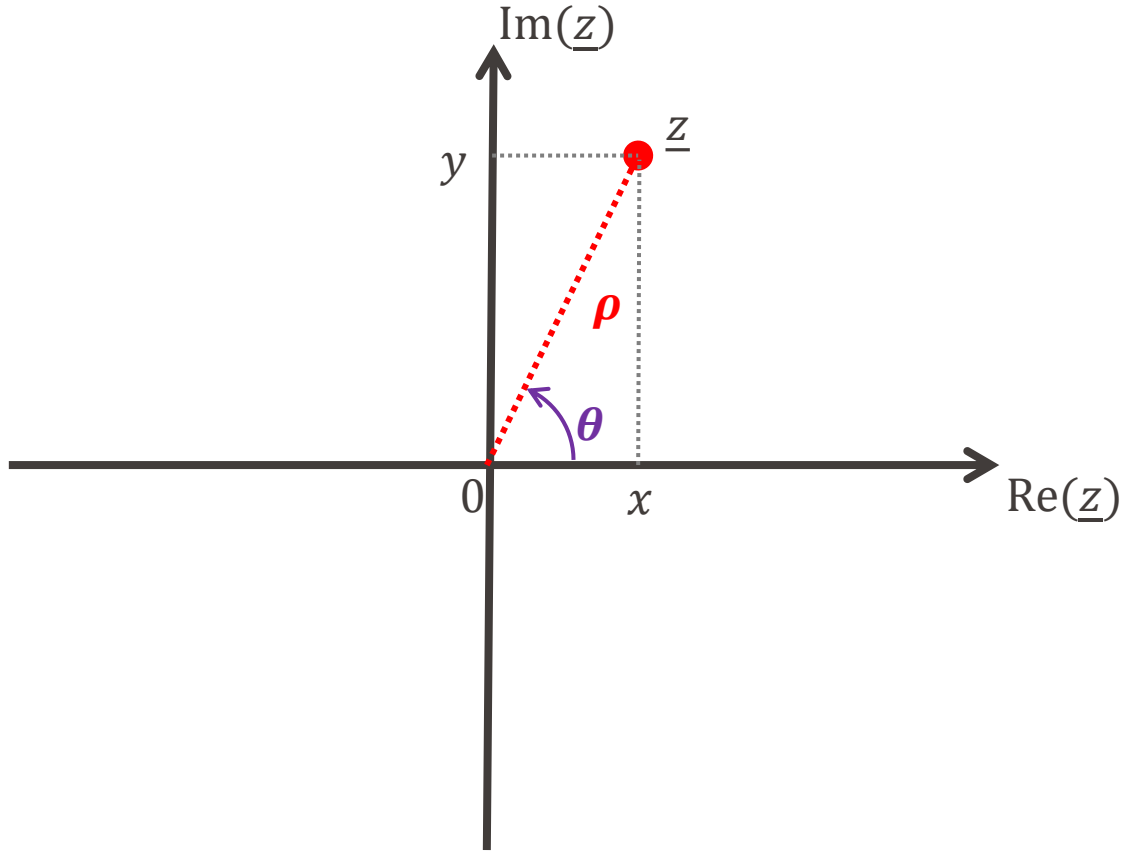
- $\operatorname{Re}(\underline{z}) = x = \rho \cdot \cos(\theta)$; $\operatorname{Im}(\underline{z}) = y = \rho \cdot \sin(\theta)$

$$|\underline{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \arg(\underline{z}) = \theta$$

- $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$; $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$; $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Voire fiche de
rappel sur Moodle

Rappels sur les nombres complexes



- Exemple:

- $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$

- On définit une tension complexe associée:

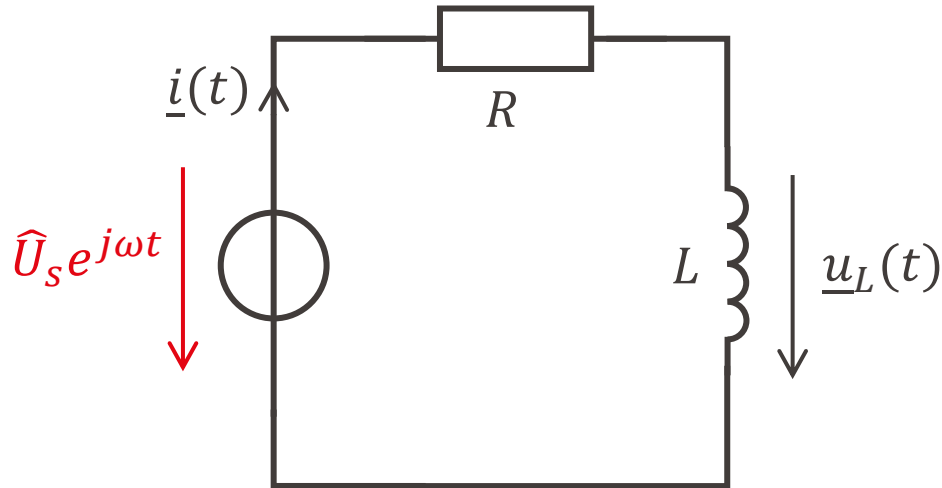
$$\underline{u}(t) = \hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On a alors:

$$u(t) = \text{Re}[\underline{u}(t)]$$

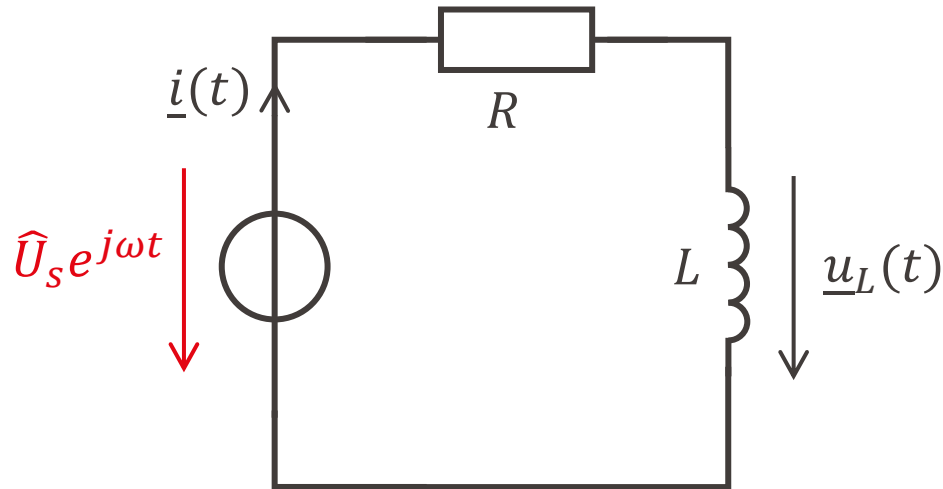
- On peut alors étudier les circuits avec les grandeurs sous forme complexe, et on prend la partie réelle du résultat.

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



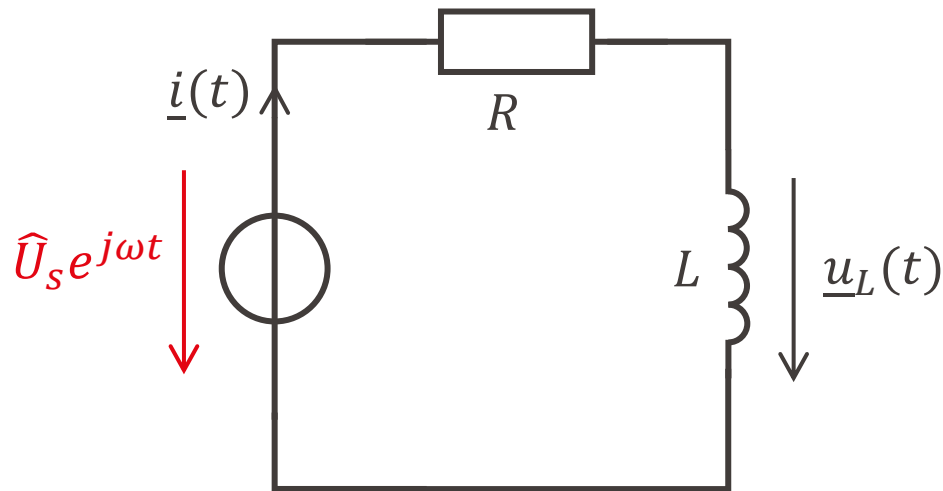
$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



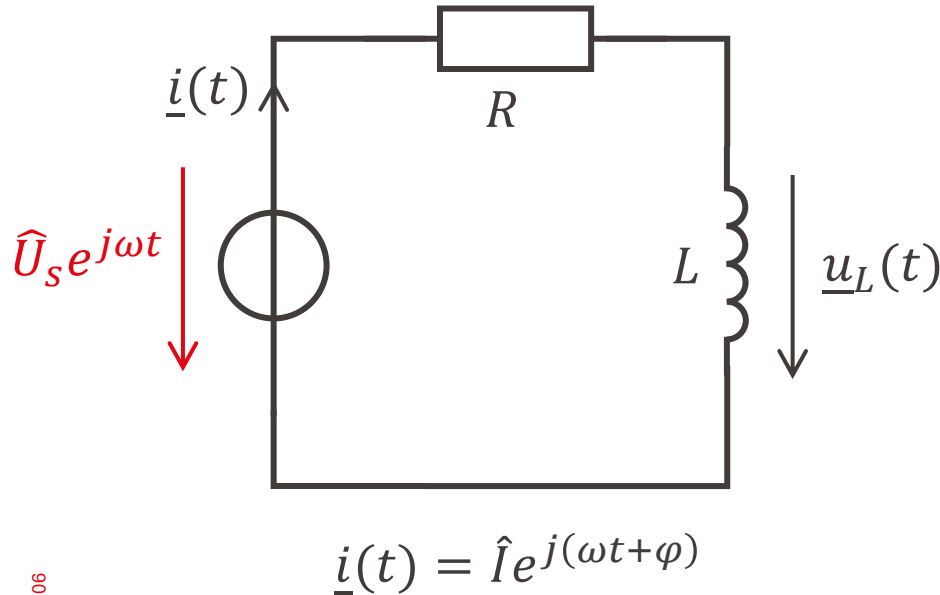
$$\underline{i}(t) = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



Loi de mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R \underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

Inductance:

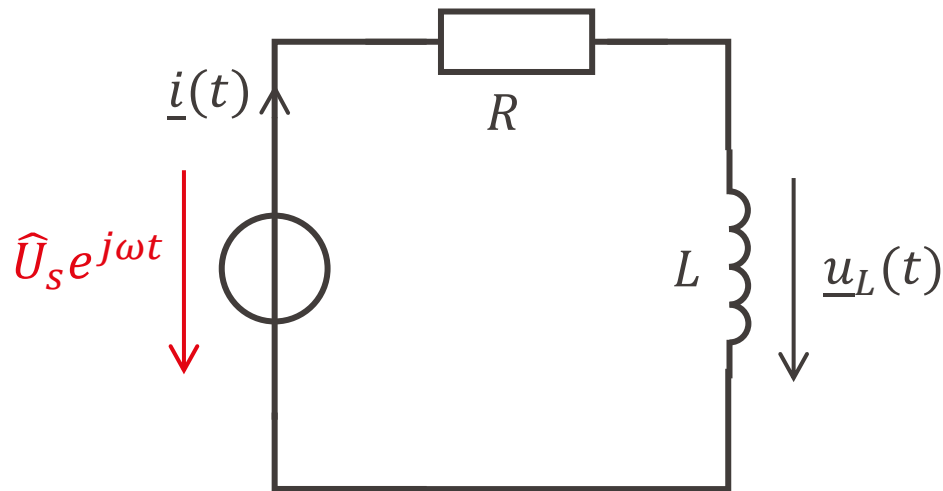
$$\underline{u}_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{u}_L(t) &= L(j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}) \\ \Rightarrow \underline{u}_L(t) &= jL\omega \underline{i}(t) \end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \hat{U}_s e^{j\omega t} &= R \underline{i}(t) + jL\omega \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} &= (R + jL\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \hat{U}_s e^{j\omega t} &= R \underline{i}(t) + jL\omega \underline{i}(t) \\ \Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} &= (R + jL\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

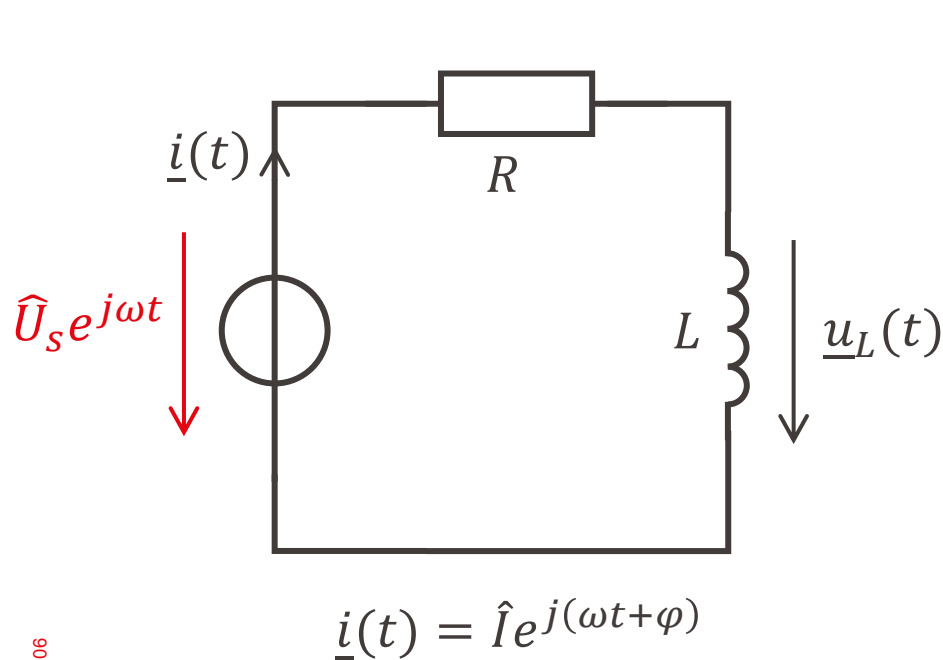
$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

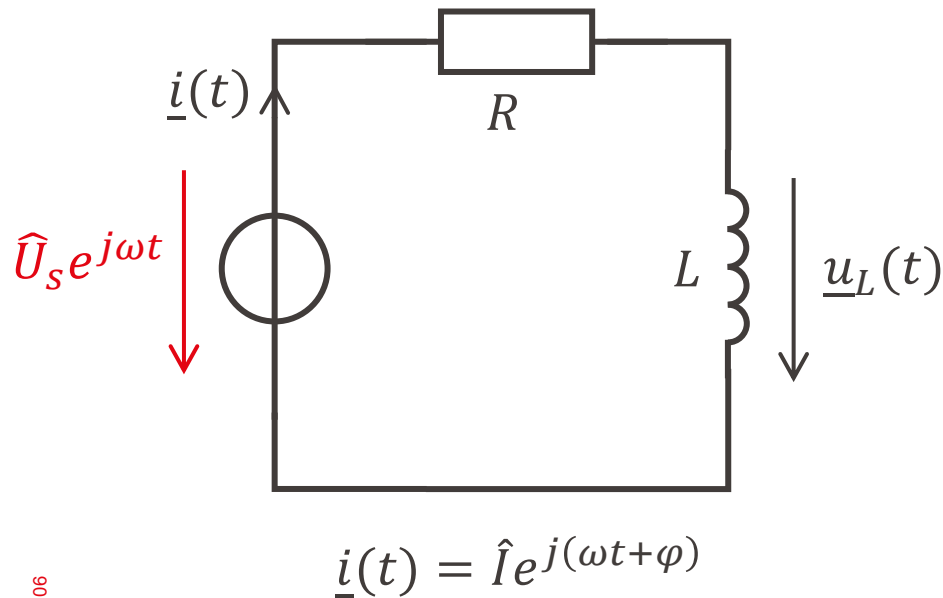
$$\hat{I} = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$


$$\varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps sous forme complexe:



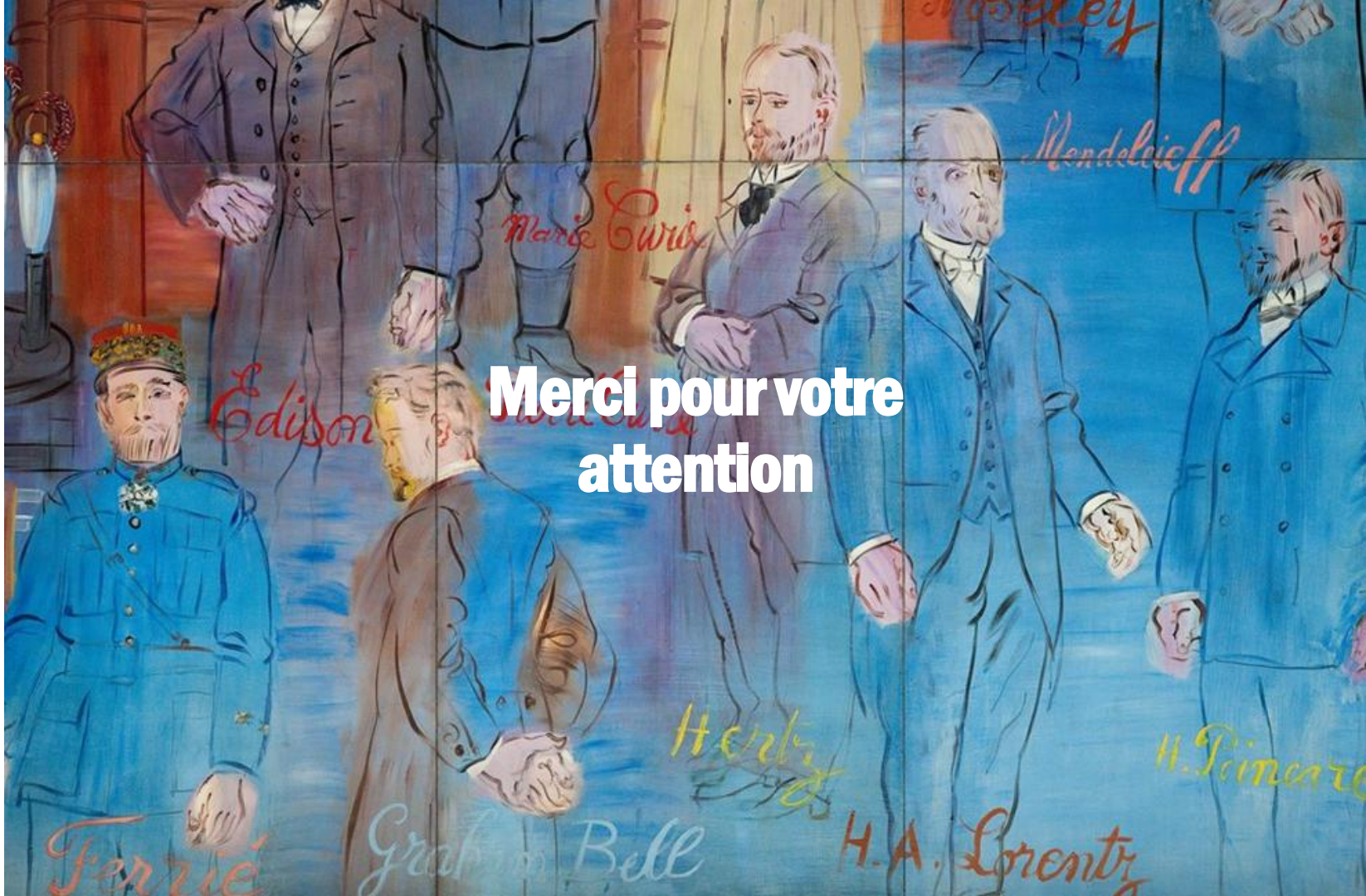
On peut trouver la solution sans résoudre d'équation différentielle!

- 
- On voit qu'en régime permanent sinusoïdal il y a deux grandeurs à déterminer:
 - L'amplitude \hat{X}
 - La phase φ

 - On définit alors les **phaseurs**:
 - $\underline{\hat{X}} = \hat{X}e^{j\varphi}$ (phaseur crête)

 - $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$ (phaseur efficace)

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris



Merci pour votre
attention