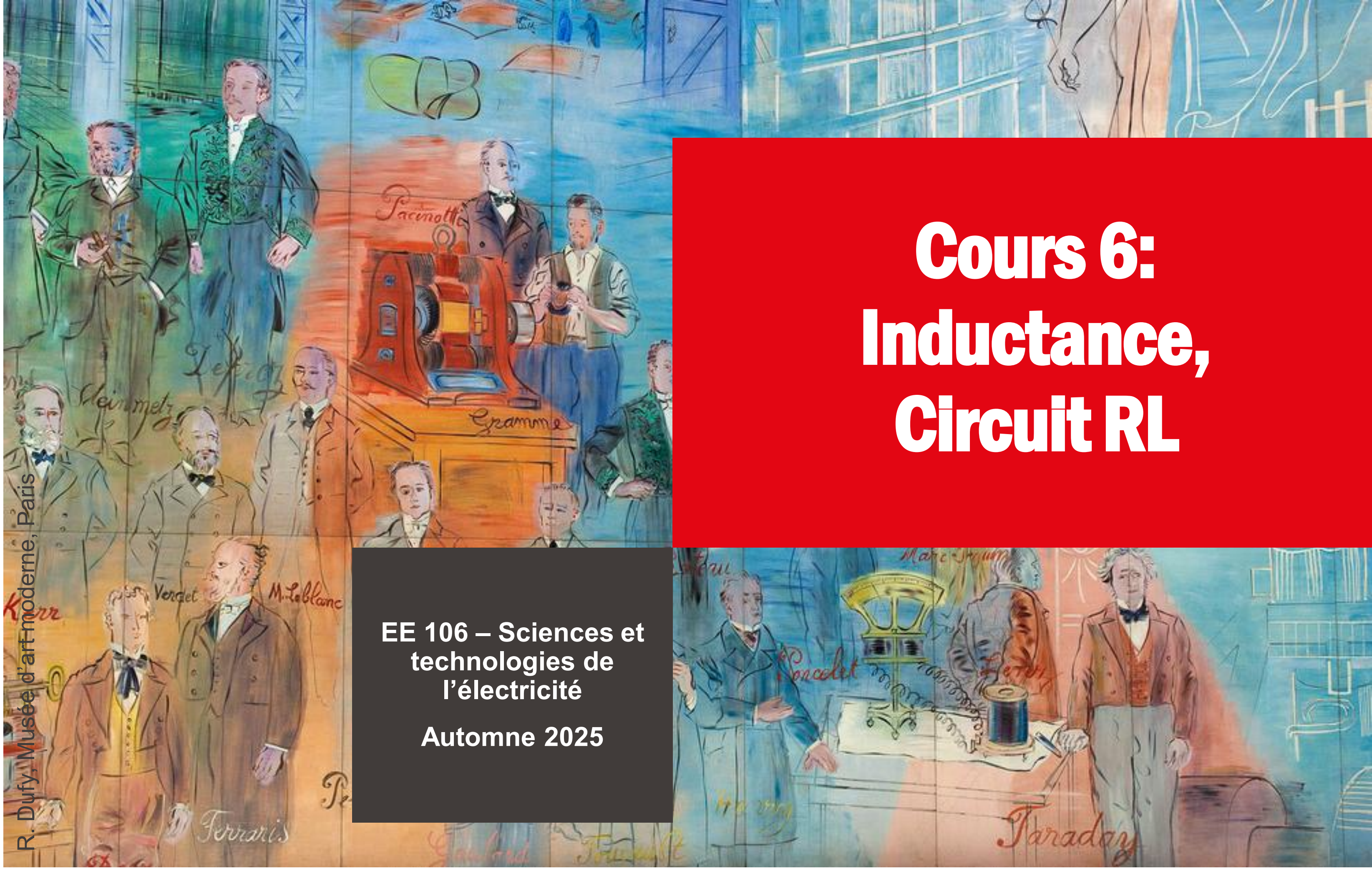
EPFL



R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 6: Inductance, Circuit RL

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2025

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

C. Lafforgue

Rappels

- Rappels – Condensateur

Symbole	Signification	Grandeur	Unité
	Condensateur	C (capacité)	farad (F)

- Un condensateur est un dipôle qui accumule de l’énergie électrostatique en condensant des charges proportionnellement à la tension:

$$Q = CU$$

- Le condensateur est caractérisé par sa **capacité**:

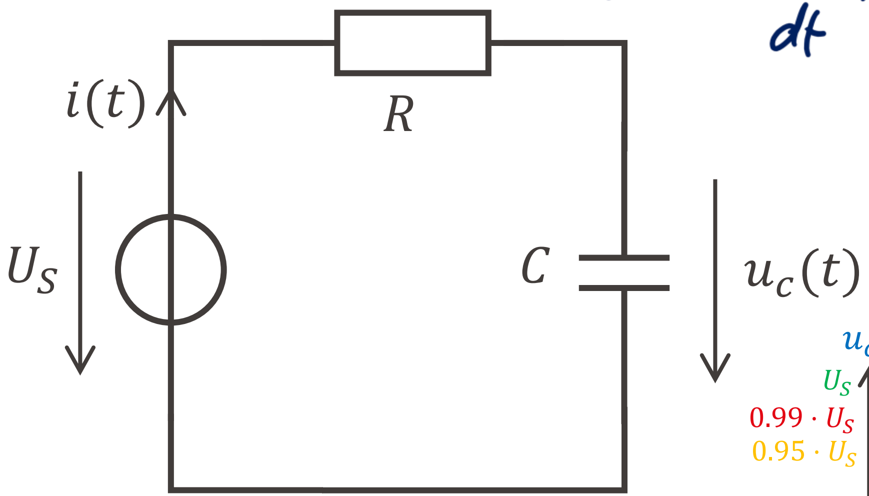
$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

- L’énergie accumulée pour une tension U est:

$$W_c = \frac{1}{2} C U^2$$

- Rappels – Charge d'un condensateur

$i(t) = C \frac{du_c}{dt}(t)$

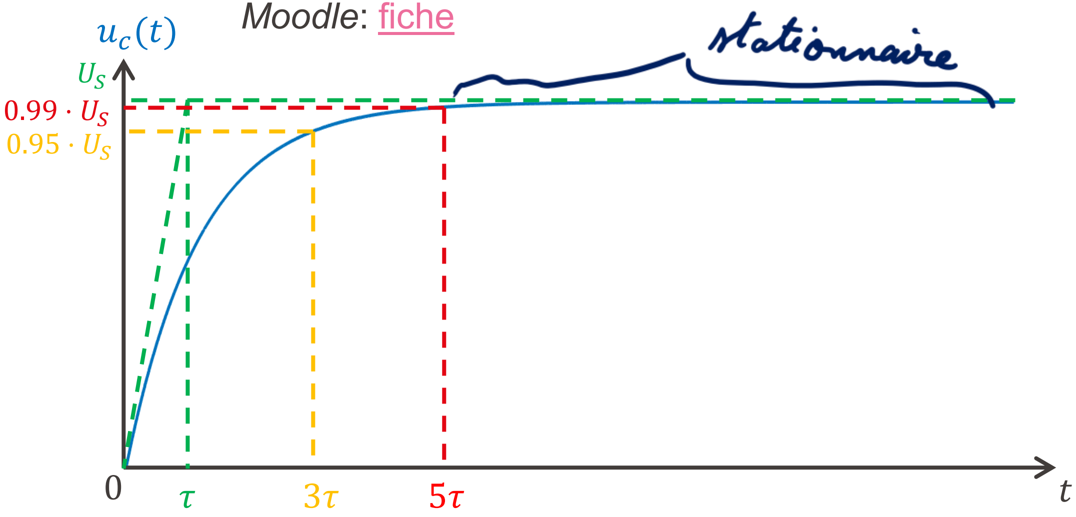


$$\boxed{\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}U_S}$$

$\tau = RC$

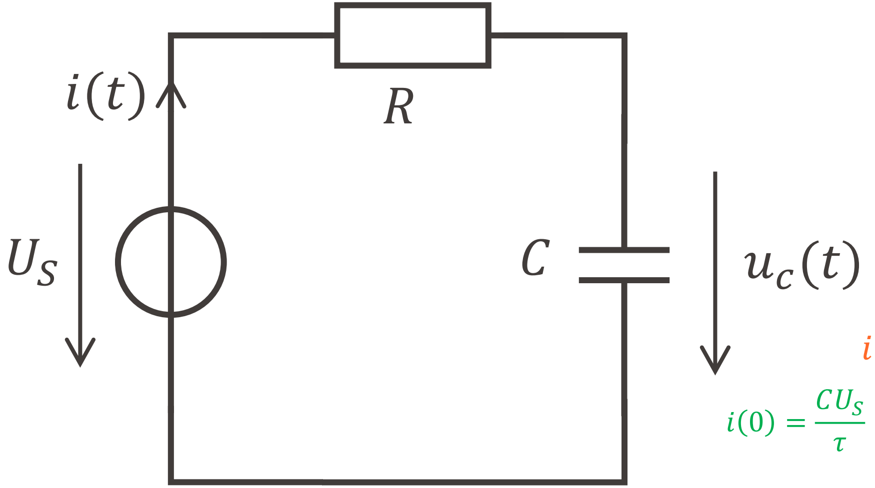
$$\boxed{u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Voire fiche détaillée sur la résolution d'équations différentielles pour les circuits électriques sur Moodle: fiche



Condition initiale:
$u_c(0) = 0\ \mathrm{V}$

- Rappels – Charge d'un condensateur

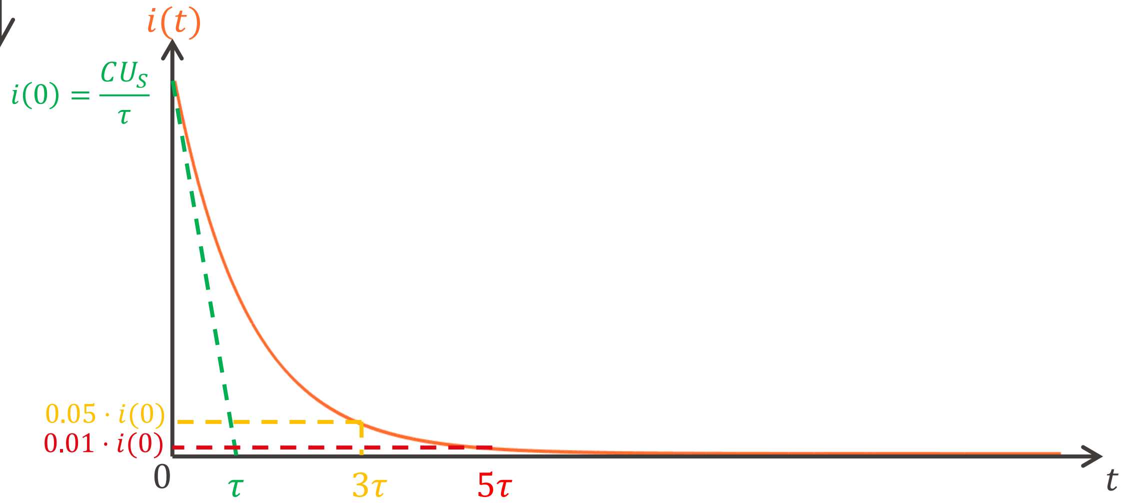


Condition initiale:
$u_c(0) = 0\ \mathrm{V}$

$$\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}U_S$$

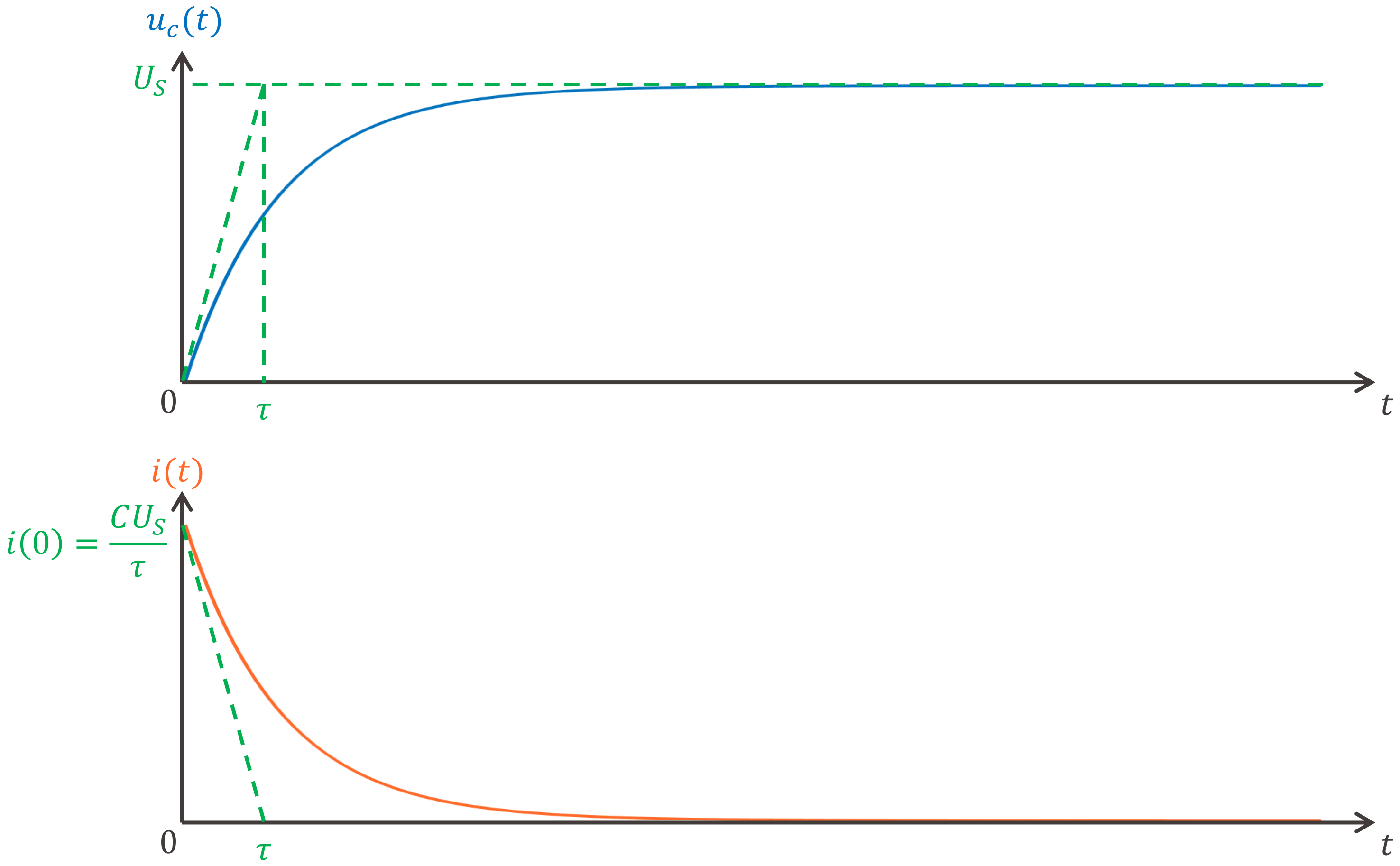
$$u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$i_c(t) = \frac{CU_S}{\tau}e^{-t/\tau}$$



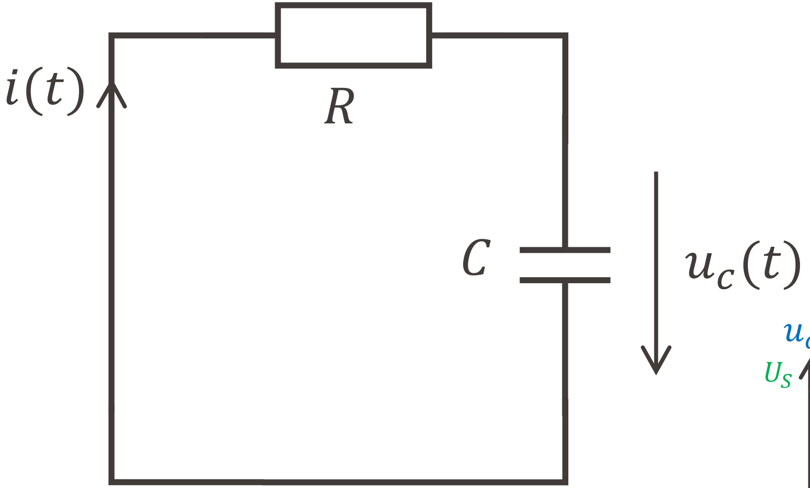
C. Lafforgue

- Rappels – Charge d'un condensateur



C. Lafforgue

- Rappels – Décharge d'un condensateur

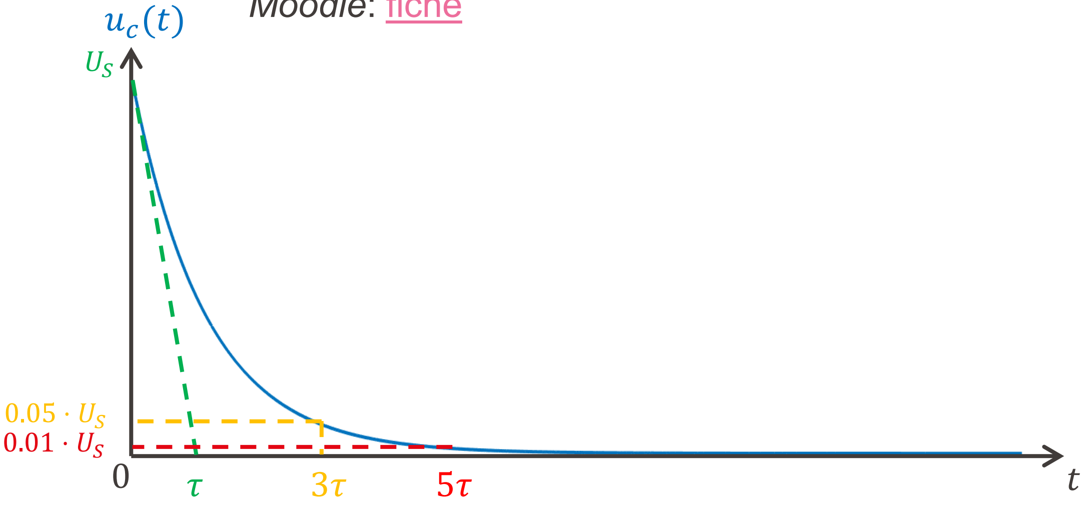


Condition initiale:
$u_c(0) = U_S$

$$\boxed{\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0}$$

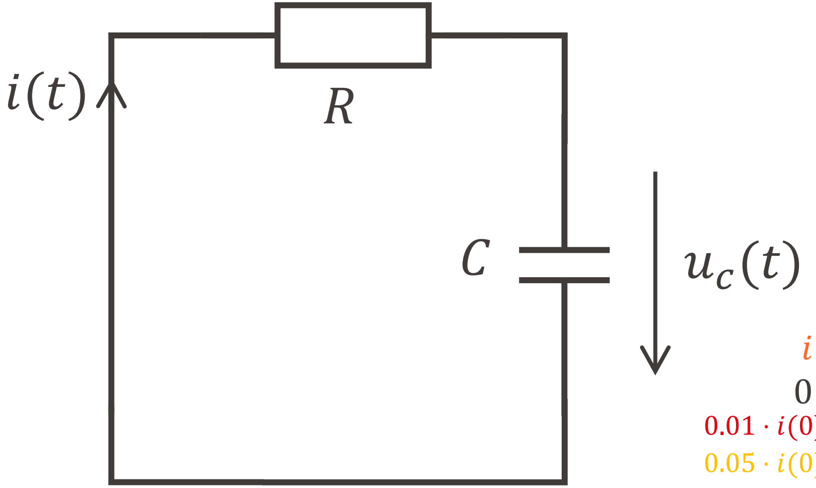
$$\boxed{u_c(t) = U_S e^{-t/\tau}}$$

Voire fiche détaillée sur la résolution d'équations différentielles pour les circuits électriques sur Moodle: fiche



- Rappels – Décharge d'un condensateur

C. Lafforgue

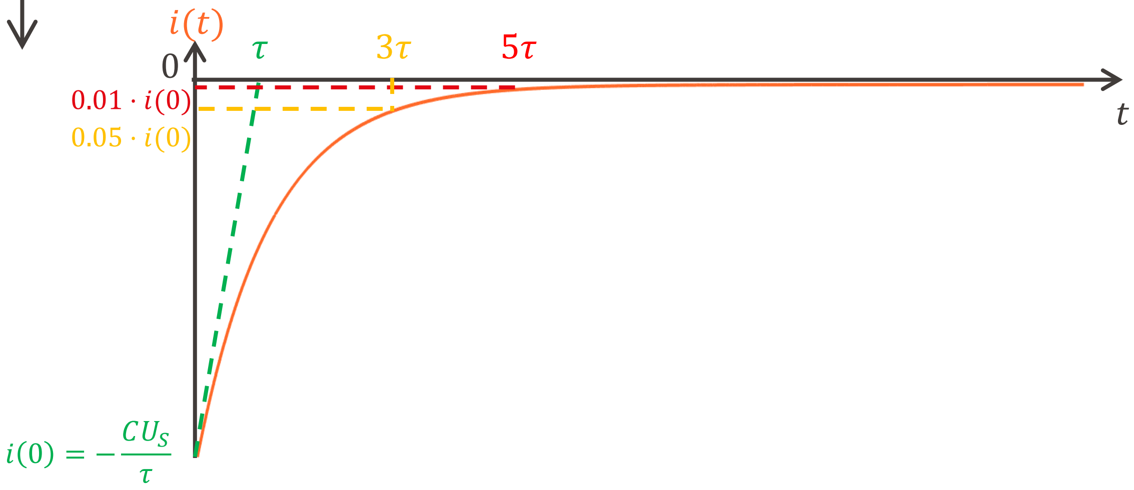


Condition initiale:
$u_c(0) = U_S$

$$\boxed{\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0}$$

$$\boxed{u_c(t) = U_S e^{-t/\tau}}$$

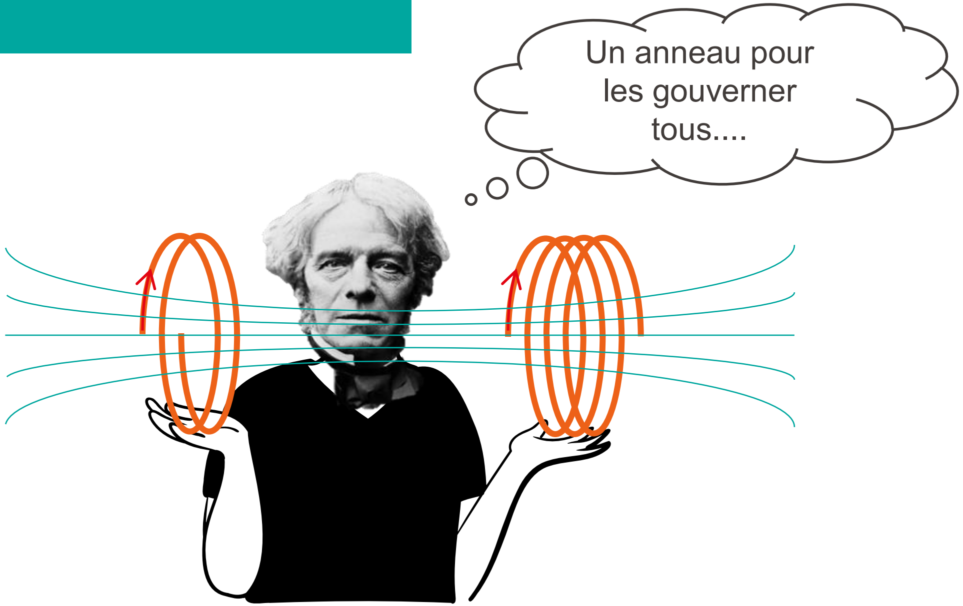
$$\boxed{i(t) = -\frac{CU_S}{\tau}e^{-t/\tau}}$$



Objectifs

- Décrire le comportement d’une inductance
- Déterminer la relation courant-tension d’une inductance
- Etudier un circuit en régime transitoire

Les inductances



C. Lafforgue

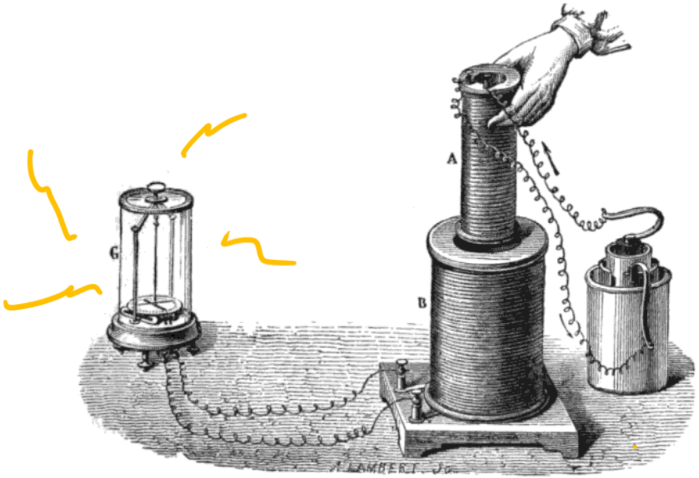
L'inductance

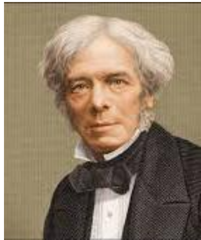
Symbole	Signification	Grandeur	Unité
	Inductance, bobine	L (inductance)	henry (H)

- L'inductance est un composant de base utilisé pour:
  - Le stockage d'énergie
  - Le filtrage de signaux parasites
  - La protection de systèmes électriques sensibles
  - …
- C'est un dipôle passif

L’induction magnétique

- 1831: Michael Faraday découvre l’induction magnétique
- Il enroule deux conducteurs sur un barreau de fer: lorsqu’un des conducteurs est traversé par un courant, un courant apparait momentanément dans le deuxième conducteur

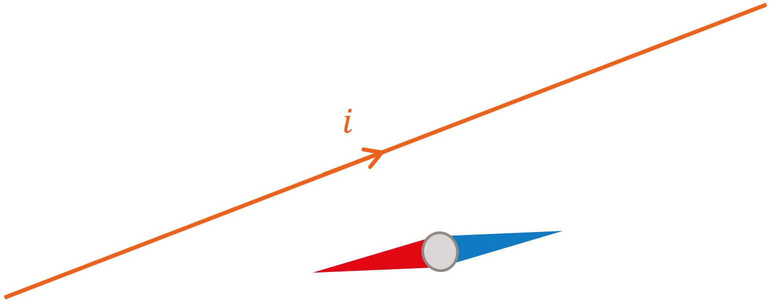




Michael Faraday
1791-1867
Physicien anglais

L'induction magnétique

- Pour expliquer le résultat de Michael Faraday, il faut parler d'**électromagnétisme**
- L'expérience de H. C. Ørsted:
  - Un courant circulant dans un fil fait bouger des aimants!
  - Il y a donc une relation entre l'électricité et le magnétisme!



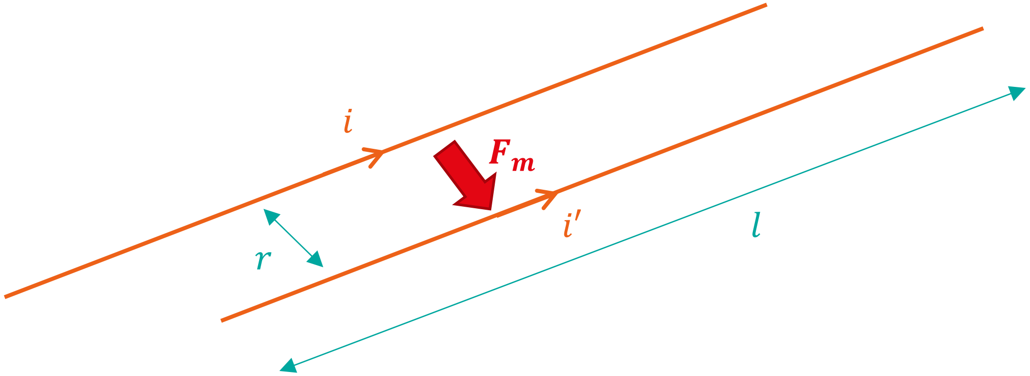
Voire vidéo de l'expérience d'Ørsted sur Moodle: vidéo

Hans Christian Ørsted
1777-1851
Physicien danois

L'induction magnétique

- Des charges en mouvements génèrent un champ magnétique
  - Courant dans un conducteur → bobines de fil
  - Électrons et protons à l'échelle atomique → aimants permanents

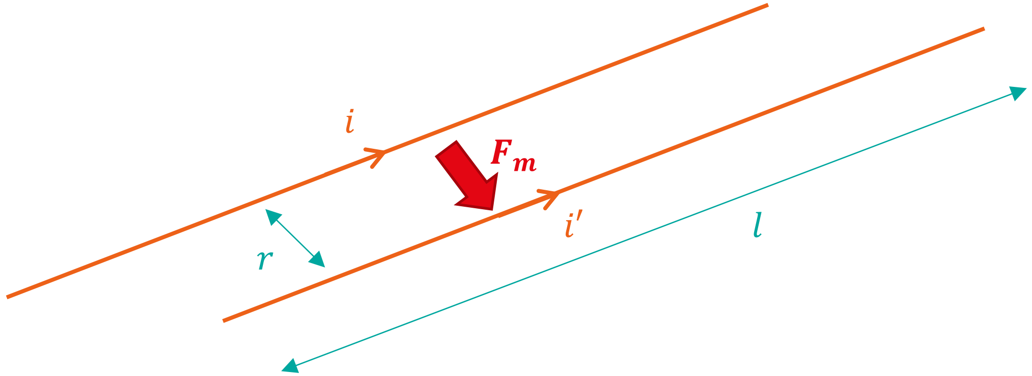
- Les interactions magnétiques donnent lieu à une force
  - Expérience d'Ampère: deux conducteurs parallèles de longueur l, séparés par une distance r, chacun traversé par un courant i et i'



André-Marie Ampère
1775-1836
Physicien français

L'induction magnétique

- Les interactions magnétiques donnent lieu à une force
  - Expérience d'Ampère: deux conducteurs parallèles de longueur l, séparés par une distance r, chacun traversé par un courant i et i'



  - La force dépend des courants, de la géométrie et du milieu

$$|F_m| = \frac{\mu i i' l}{2\pi r}$$

L'induction magnétique

- Les interactions magnétiques donnent lieu à une force
  - Expérience d'Ampère: deux conducteurs parallèles de longueur l, séparés par une distance r, chacun traversé par un courant i et i'
  - La force dépend des courants, de la géométrie et du milieu

$$\boxed{|\boldsymbol{F_m}| = \frac{\boldsymbol{\mu i i' l}}{\boldsymbol{2\pi r}}}$$

  - μ est la perméabilité magnétique du milieu, exprimée en H/m
  - Similairement à la perméabilité diélectrique, elle s'écrit:

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

  - μ_0 est la perméabilité magnétique du vide ($\simeq 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$)
  - μ_r est la perméabilité relative du milieu (sans unité)

L'induction magnétique

C. Lafforgue

- Les interactions magnétiques donnent lieu à une force
  - Expérience d'Ampère: deux conducteurs parallèles de longueur l, séparés par une distance r, chacun traversé par un courant i et i'
  - La force dépend des courants, de la géométrie et du milieu

$$\boxed{|\boldsymbol{F_m}| = \frac{\boldsymbol{\mu i i' l}}{\boldsymbol{2\pi r}}}$$

$$|F_m| = \underbrace{\frac{\mu i}{2\pi r}}_{\hookrightarrow \text{ environnement}} \times \underbrace{(i' l)}_{\hookrightarrow \text{ le fil étudié}}$$

$\Rightarrow$ champ magnétique

L'induction magnétique

- Le champ d'induction magnétique caractérise l'interaction d'un courant i avec un autre courant i' parcourant un conducteur de longueur l

Perméabilité magnétique

courant

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = \frac{F_m}{i'l} = \frac{\mu i}{2\pi r}}$$

Unité: tesla (T)

Champ d'induction magnétique

distance

C. Lafforgue

L’induction magnétique

- Le champ d’induction magnétique caractérise l’interaction d’un courant i avec un autre courant i' parcourant un conducteur de longueur l

Perméabilité magnétique

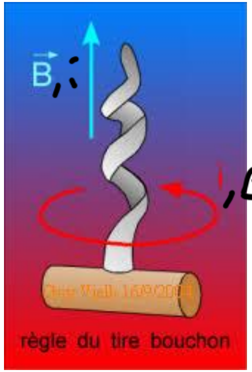
courant

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = \frac{F_m}{i'l} = \frac{\mu i}{2\pi r}}$$

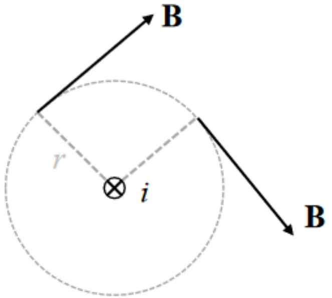
Unité: tesla (T)

Champ d’induction magnétique

distance



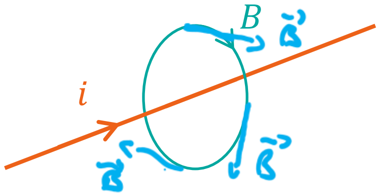
- Les lignes de champ tournent autour du conducteur
  - Sens défini par la règle du « tire-bouchon »

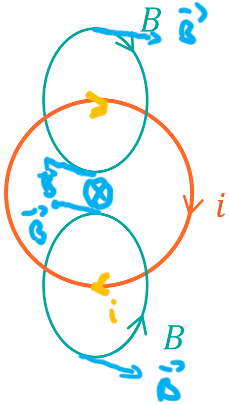


L’induction magnétique – Le solénoïde

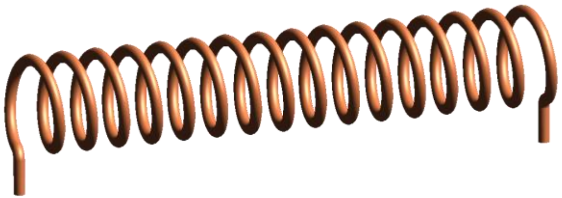
C. Lafforgue

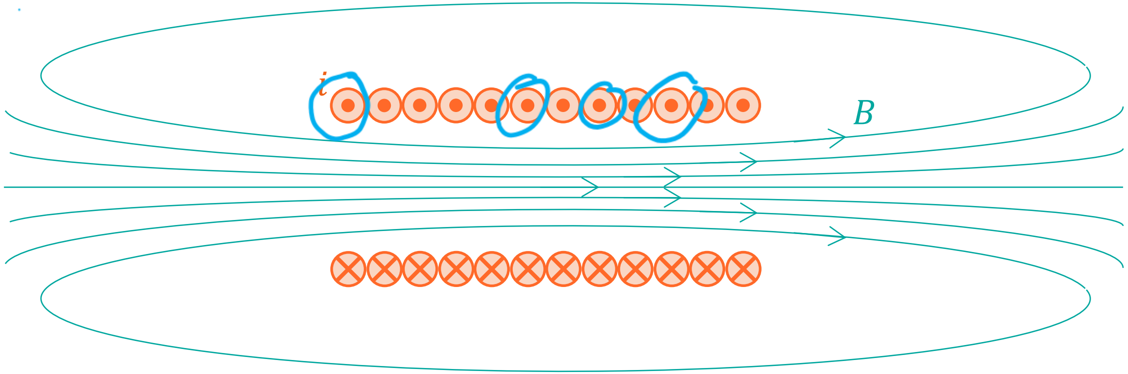
- Un fil a un champ qui « tourne » autour de lui
- Que se passe-t-il pour d’autres formes?





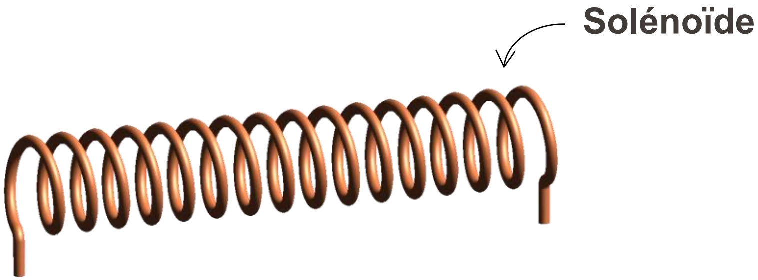
Solénoïde

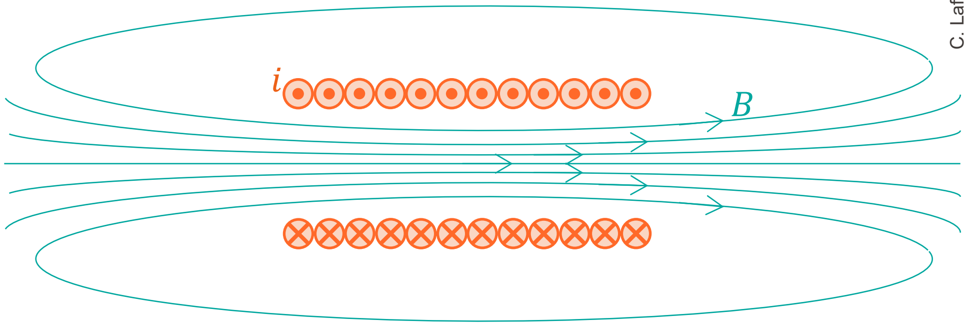




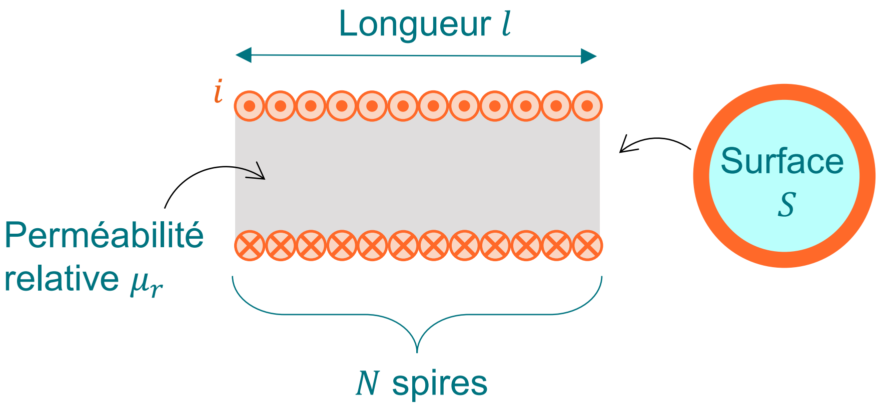
L'induction magnétique – Le solénoïde

C. Lafforgue



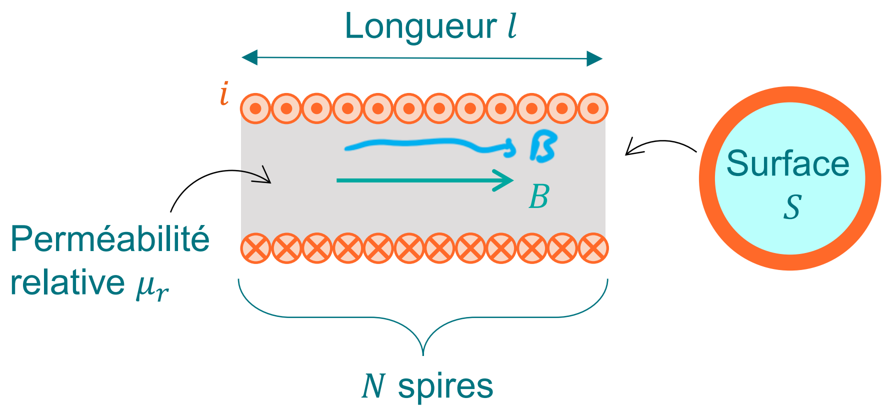


- Un solénoïde a des lignes de champ quasi-rectilignes
- Il est caractérisé par:
  - Sa longueur l
  - Son nombre de spire N
  - Sa surface (d'une spire) S
  - Le matériau de son cœur



L'induction magnétique – Le solénoïde

C. Lafforgue



$\phi_0 = B \times S$

$\phi_t = N\phi_0 = NBS$

$\phi_t = NS \times \frac{\mu N i}{l}$

$\phi_t = \frac{\mu N^2 S}{l} \times i$

Champ d'induction magnétique:

$$B = \frac{\mu N i}{l}$$

Unité: tesla (T)

Flux magnétique total:

$$\phi_t = NBS$$
$$\phi_t = Li$$

Unité: weber (Wb)

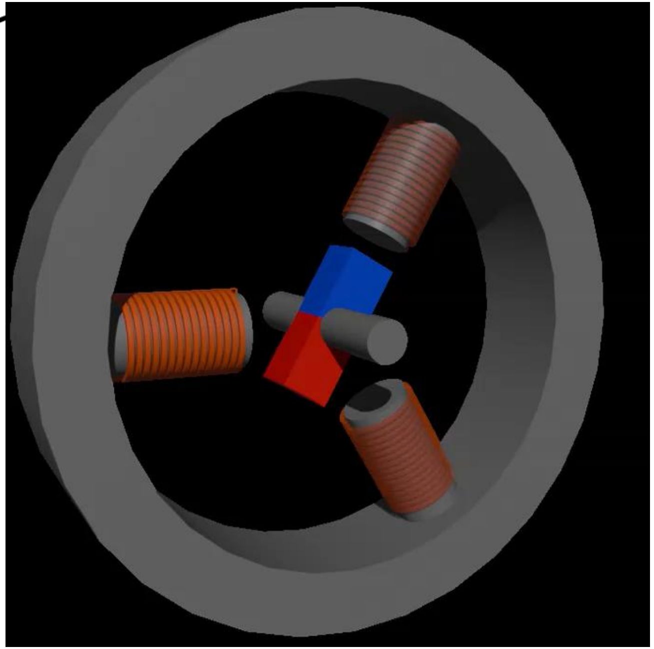
Inductance propre:

$$\boxed{L = \frac{\mu N^2 S}{l}}$$

Unité: henry (H)

L'induction magnétique – Le solénoïde

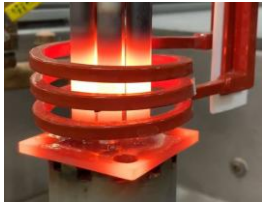
- Applications:
  - Machines électriques (moteurs, alternateurs)



C. Lafforgue

L’induction magnétique – Le solénoïde

- Applications:
  - Machines électriques (moteurs, alternateurs)
  - Communications (antennes)
  - Gestion de l’électricité (transformateurs, alimentations à découpage…)
  - Métallurgie (brasage)
  - …



Points clés

- Une inductance est un dipôle qui accumule de l'énergie magnétique en créant un flux lié au courant:

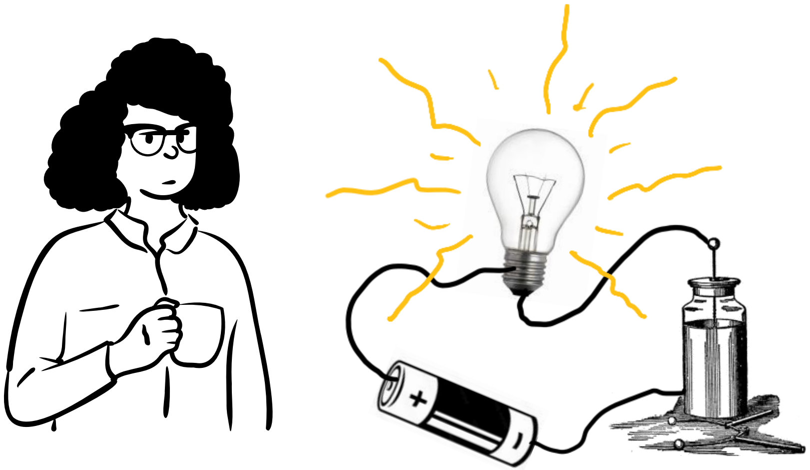
$$\boxed{\phi_t = Li}$$

- La bobine (solénoïde) est caractérisée par sn inductance propre:

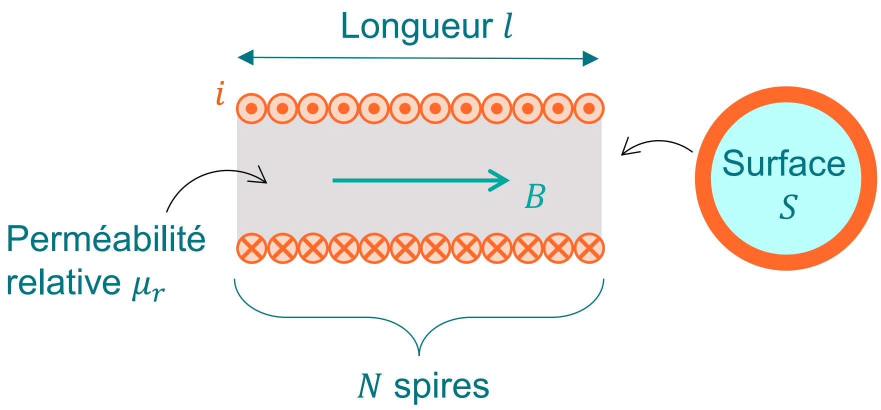
$$\boxed{L = \frac{\mu N^2 S}{l}}$$

- En régime statique, l'inductance se comporte comme un fil

Comportement dynamique



L'induction magnétique – Le solénoïde

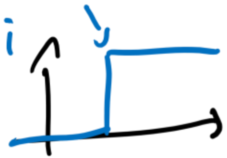


- De façon complémentaire au condensateur, les variations de flux magnétique créent une tension aux bornes de l'inductance (aussi appelée force électromotrice): c'est la **loi de Lenz**
- On en déduit:

$$u(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

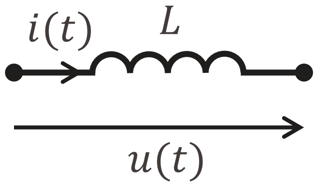
C. Lafforgue

L'inductance



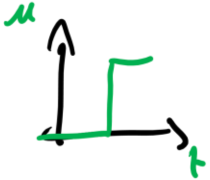
$\Rightarrow \frac{di}{dt} \to +\infty$

$\Rightarrow u(t) \to +\infty$



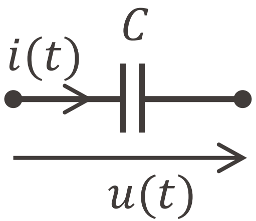
$$\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt}(t)}$$

Le condensateur



$\Rightarrow \frac{du}{dt} \to +\infty$

$\Rightarrow i(t) \to +\infty$

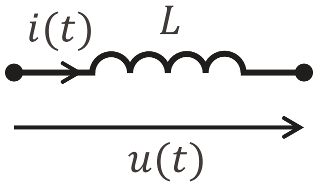


$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt}(t)}$$

L'inductance a un comportement complémentaire à celui du condensateur

Par le même résonnement que pour le condensateur, **le courant parcourant une inductance ne peut pas avoir de discontinuité**

L’inductance



$$\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt}(t)}$$

- En régime statique: $\frac{di}{dt} = 0$
- Donc $u(t) = 0$
- **L’inductance se comporte comme un fil en régime statique**

C. Lafforgue

L'inductance – Energie stockée

$$\frac{d(i(t)^2)}{dt}(t) = 2 \times i(t)\frac{di}{dt}(t)$$

- On peut calculer l'énergie en intégrant la puissance:

$$P(t) = u(t) \times i(t) = \frac{dW_L}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow W_L(T) = \int_0^T P(t)dt$$

$$W_L(T) = \int_0^T u(t) \times i(t)\,dt$$

et $u(t) = L\frac{di}{dt}(t)$

$$W_L(T) = \int_{(-\infty)\,0}^{T} u(t)i(t)dt$$

primitive : $\frac{1}{2}\frac{d(i(t)^2)}{dt}(t)$

$$\rightarrow W_L(T) = L\int_{(-\infty)\,0}^{T} i(t)\frac{di}{dt}(t)dt = \frac{1}{2}L\int_0^T \frac{d(i(t)^2)}{dt}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}L \times \left[i(t)^2\right]_0^T = \frac{1}{2}L\left(I^2 - 0^2\right)$$

$$\boxed{W_L(T) = \frac{1}{2}LI^2}$$

- L'inductance stocke de l'énergie magnétique

Points clés

- La tension dépend des variations de courant:

$$\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt}(t)}$$

- L'énergie accumulée pour un courant I est:

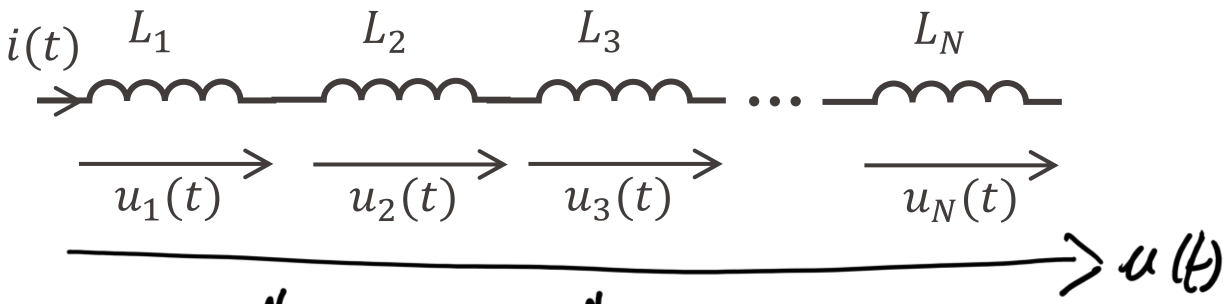
$$\boxed{W_L = \frac{1}{2}LI^2}$$

Agencement d'inductances

C. Lafforgue

$$u(t) = L_{eq} \frac{di}{dt}(t)$$

inductances en série



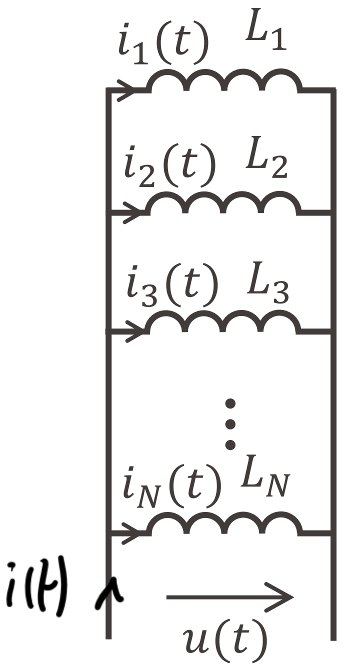
$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} L_n \frac{di}{dt}(t)$$

$$u(t) = \underbrace{\left[\sum_{n=1}^{N} L_n\right]}_{L_{eq}} \times \frac{di}{dt}(t)$$

Agencement d'inductances

C. Lafforgue

Inductances en parallèle



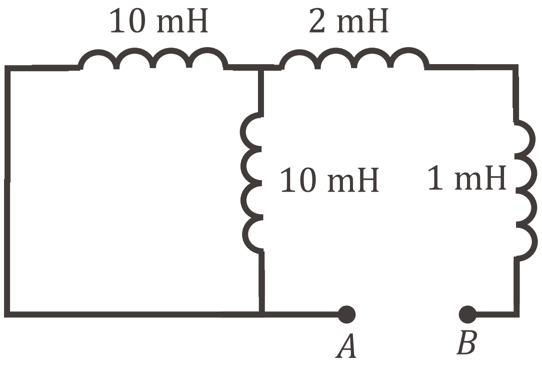
$$i(t) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t)$$

$$\frac{di}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{di_n}{dt}(t) \qquad \text{or} \qquad u(t) = L_n \frac{di_n}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{di_n}{dt}(t) = \frac{1}{L_n} u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(t) = \underbrace{\left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n}\right]}_{\frac{1}{L_{eq}}} \times u(t) \qquad \Rightarrow u(t) = L_{eq} \frac{di}{dt}(t)$$

Que vaut l'inductance équivalente vue des bornes A et B?



A. $L_{eq} = 6.5\ \text{mH}$

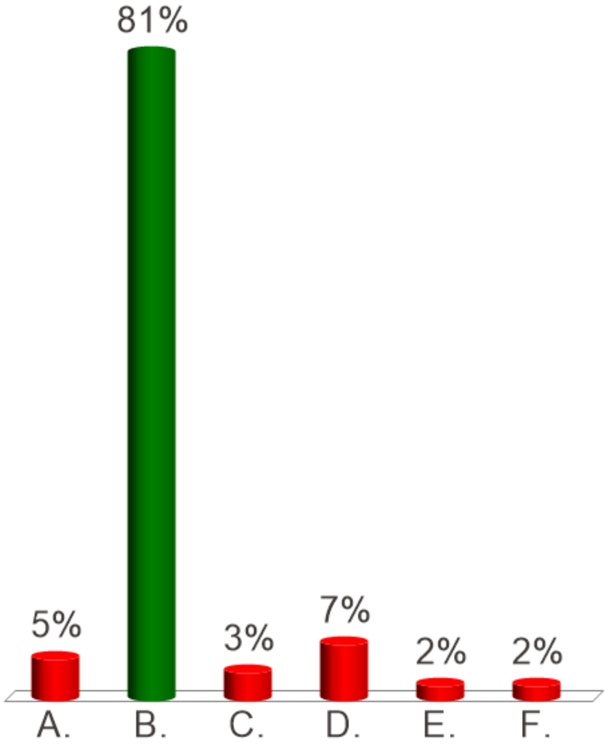
B. $L_{eq} = 8\ \text{mH}$

C. $L_{eq} = 1.88\ \text{mH}$

D. $L_{eq} = 23\ \text{mH}$

E. $L_{eq} = 3\ \text{mH}$

F. $L_{eq} = 7.12\ \text{mH}$

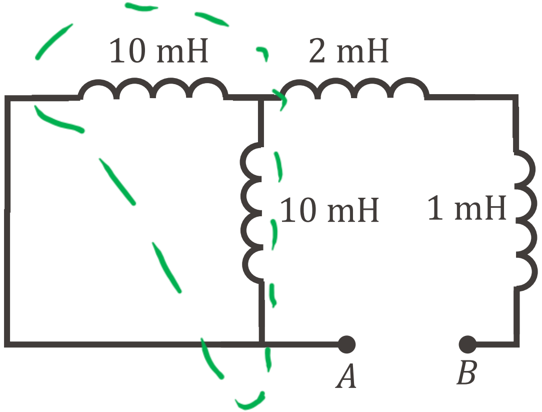


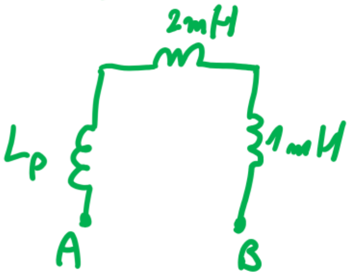
Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

Que vaut l'inductance équivalente vue des bornes A et B?

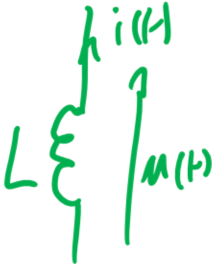
parallèle $L_p = 5\,mH$

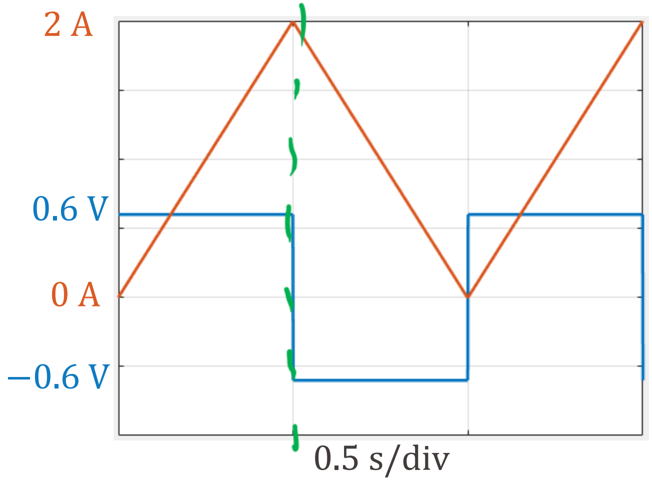




$\rightarrow L_{eq} = 5 + 2 + 1 = 8\,mH$

Que vaut l'inductance?





$$u(t) = L\frac{di}{dt}(t) \Rightarrow L = \frac{u(t)}{\left(\frac{di}{dt}(t)\right)}$$

$$\frac{di}{dt}(t) = \frac{2}{0{,}5} = 4\ \mathrm{A/s} \quad \text{et } u(t) = 0{,}6\ \mathrm{V}$$

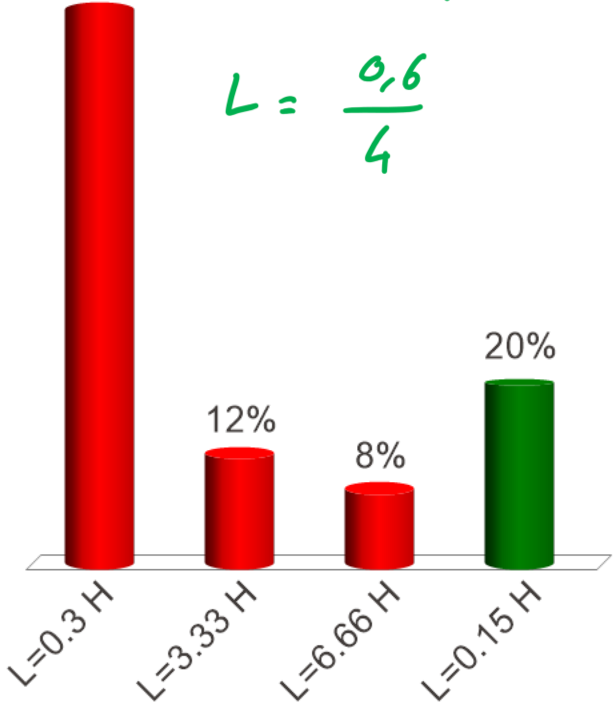
$$L = \frac{0{,}6}{4}$$

A. $L = 0.3$ H

B. $L = 3.33$ H

C. $L = 6.66$ H

✔ D. $L = 0.15$ H



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

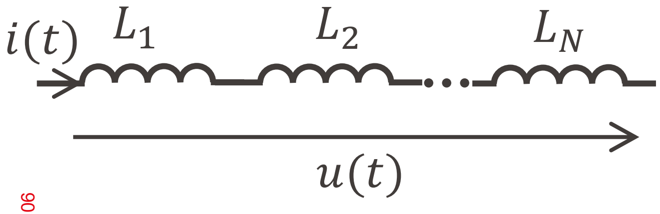
C. Lafforgue

Points clés

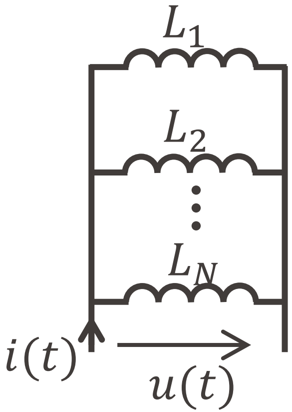
- Les circuits avec inductances ont un comportement dynamique (dépend du temps)

$$\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt}(t)}$$

- Des inductances en série s'ajoutent
  - Des inductances en série ont une inductance équivalente plus grande
- Pour des inductances en parallèle, les inverses des inductances s'ajoutent
  - Des inductances en parallèle ont une inductance équivalente plus petite



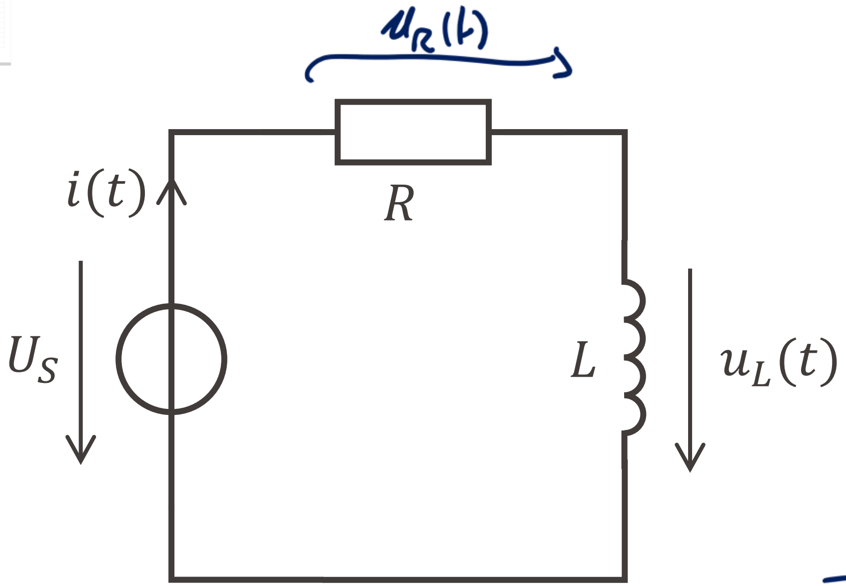
$$\boxed{L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n}$$



$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n}}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



loi des mailles :

$$U_S = u_R(t) + u_L(t)$$

loi d'Ohm : $u_R(t) = R\,i(t)$

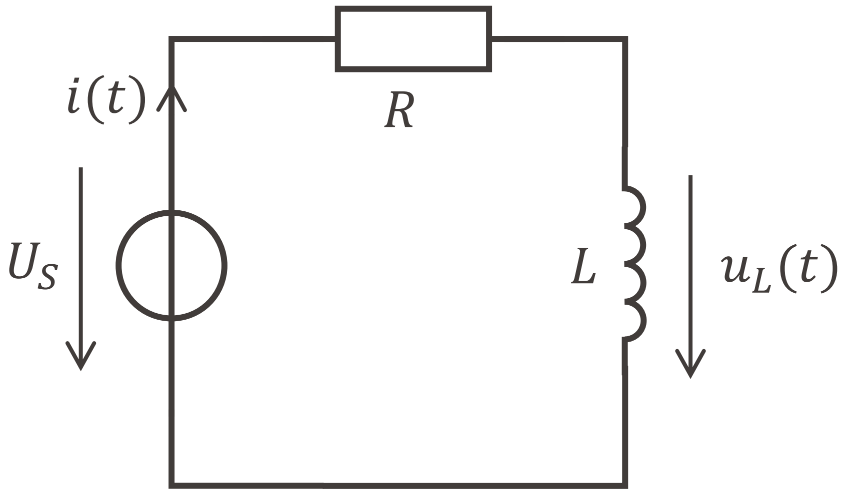
et $u_L(t) = L\,\dfrac{di}{dt}(t)$

$$\Rightarrow U_S = R\,i(t) + L\,\frac{di}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{1}{L}\,U_S$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Loi des mailles:

$$U_S = Ri(t) + u_L(t)$$

Relation caractéristique de l'inductance

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

Donc on obtient:

$$U_S = L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

Que vaut la constante de temps (en µs)?

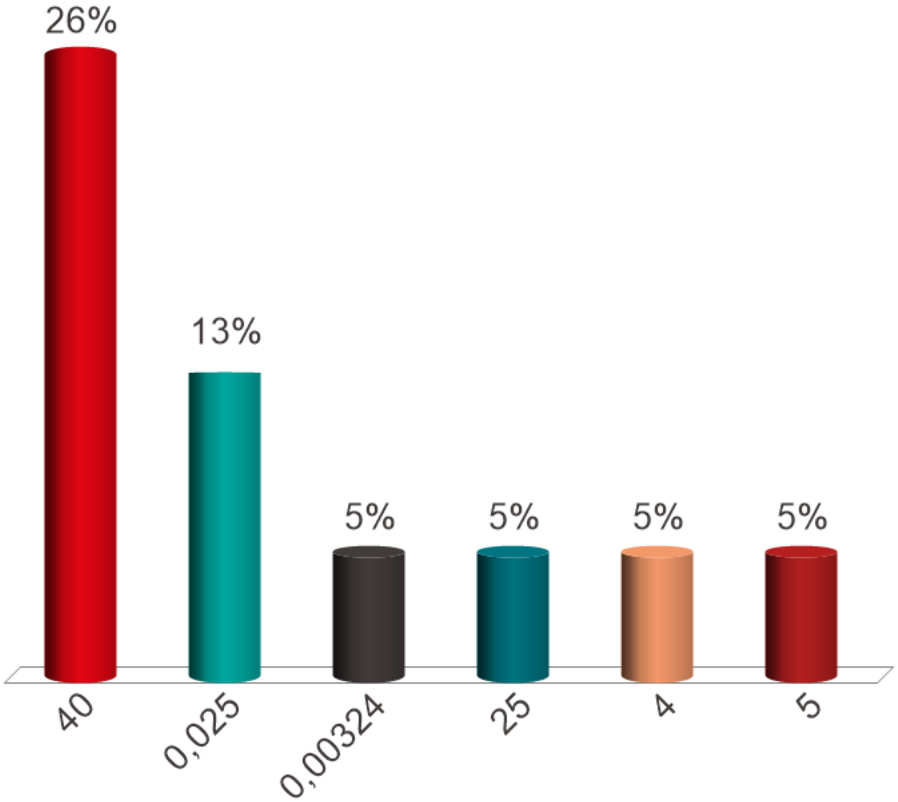
C. Lafforgue

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

$R = 9\ \Omega$
$L = 360\ \mu H$
$U_s = 0.5\ V$

$\tau = \frac{L}{R}$

Rank	Responses
1	40
2	0,025
3	0,00324
4	25
5	4
6	5



Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S}$$

Circuit RL

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S}$$

$\tau = \frac{L}{R}$

C.I. : $i(0) = 0\,A$

$0 = \frac{U_S}{R} + A$

$\Rightarrow A = -\frac{U_S}{R}$

$i(t) = A e^{-t/\tau} + I_p$

I_p solution particulière constante

$\Rightarrow \frac{R}{L} I_p = \frac{1}{L} U_S$ donc $I_p = \frac{U_S}{R}$

$i(t) = \frac{U_S}{R} + A e^{-t/\tau}$

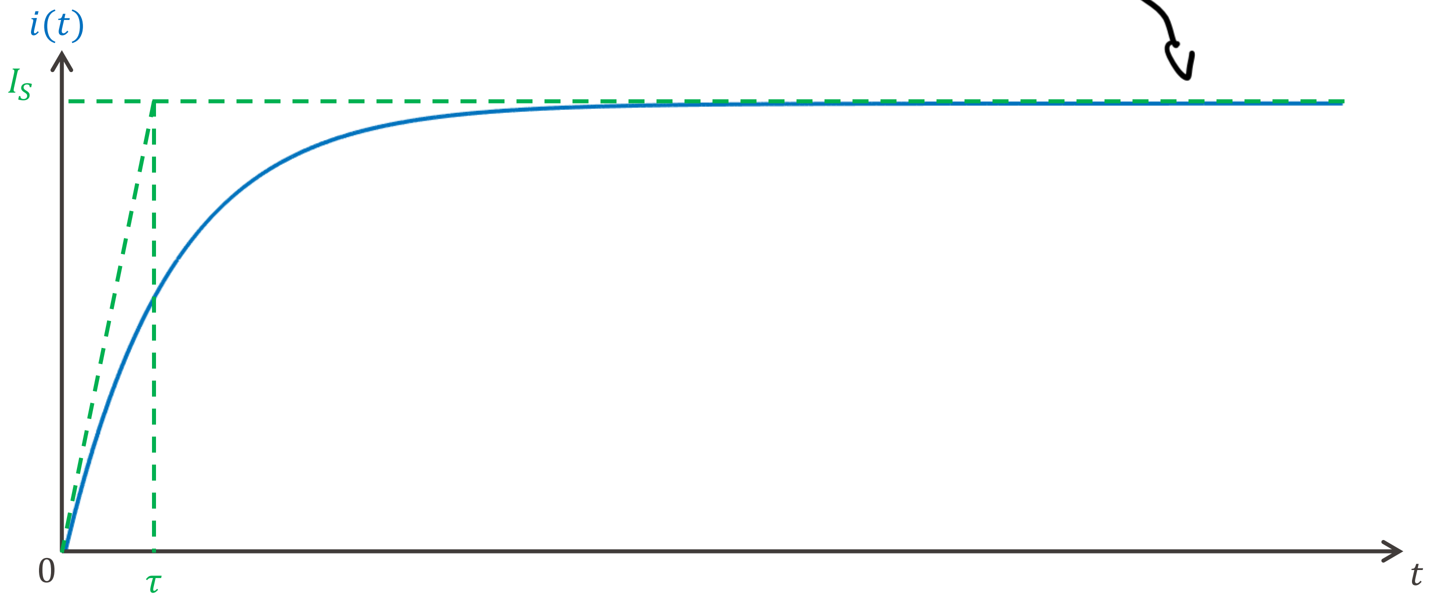
$\Rightarrow i(t) = \frac{U_S}{R} - \frac{U_S}{R} e^{-t/\tau} = \frac{U_S}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Circuit RL

C. Lafforgue

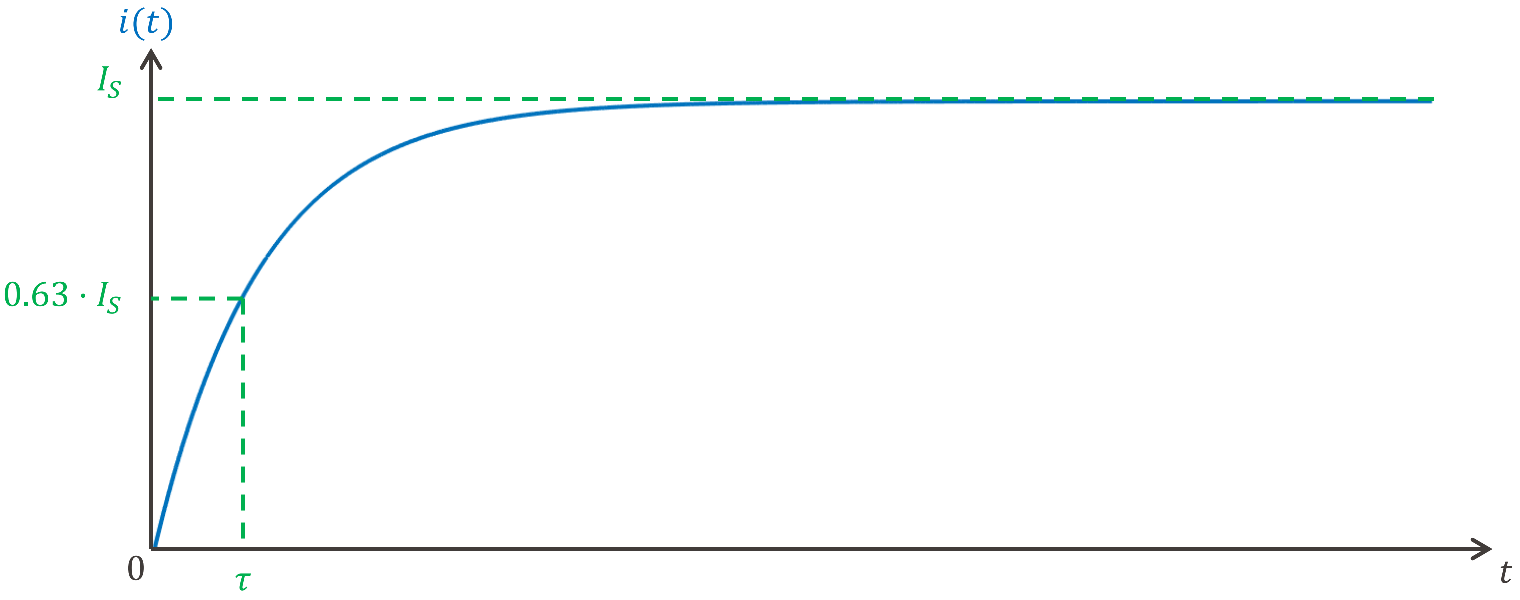
$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$I_s = \frac{U_s}{R}$



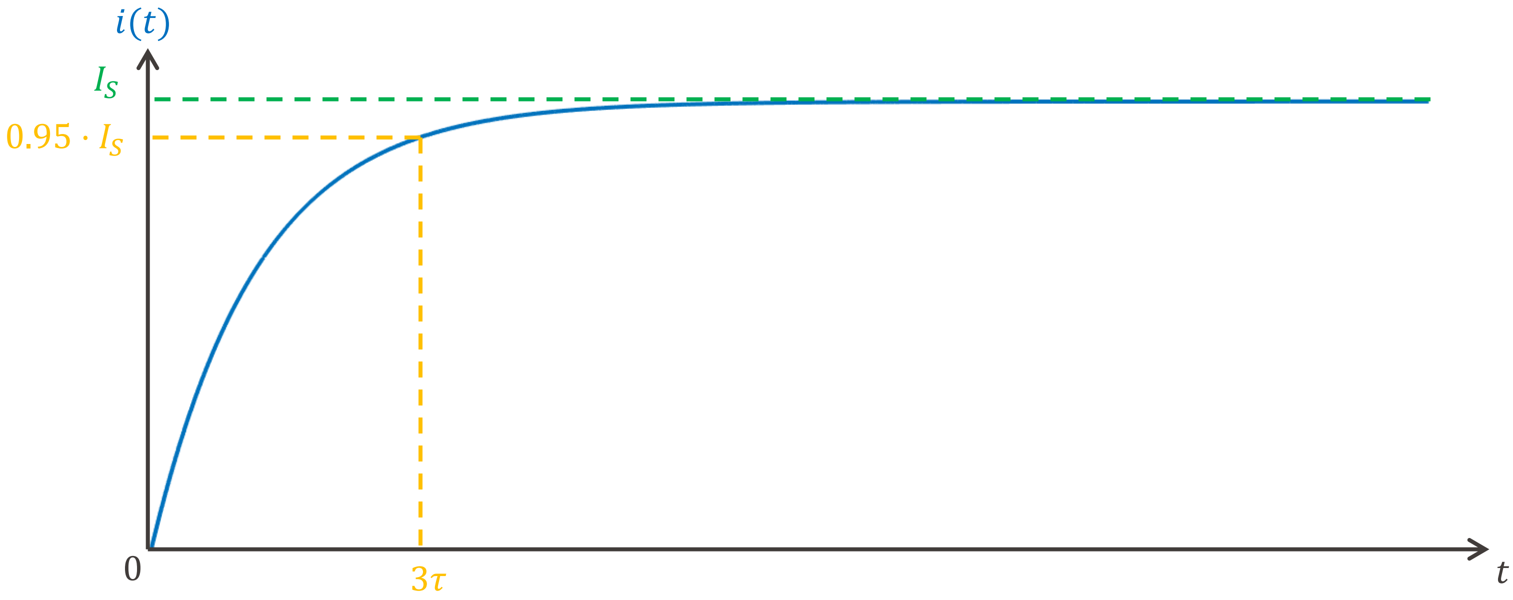
Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



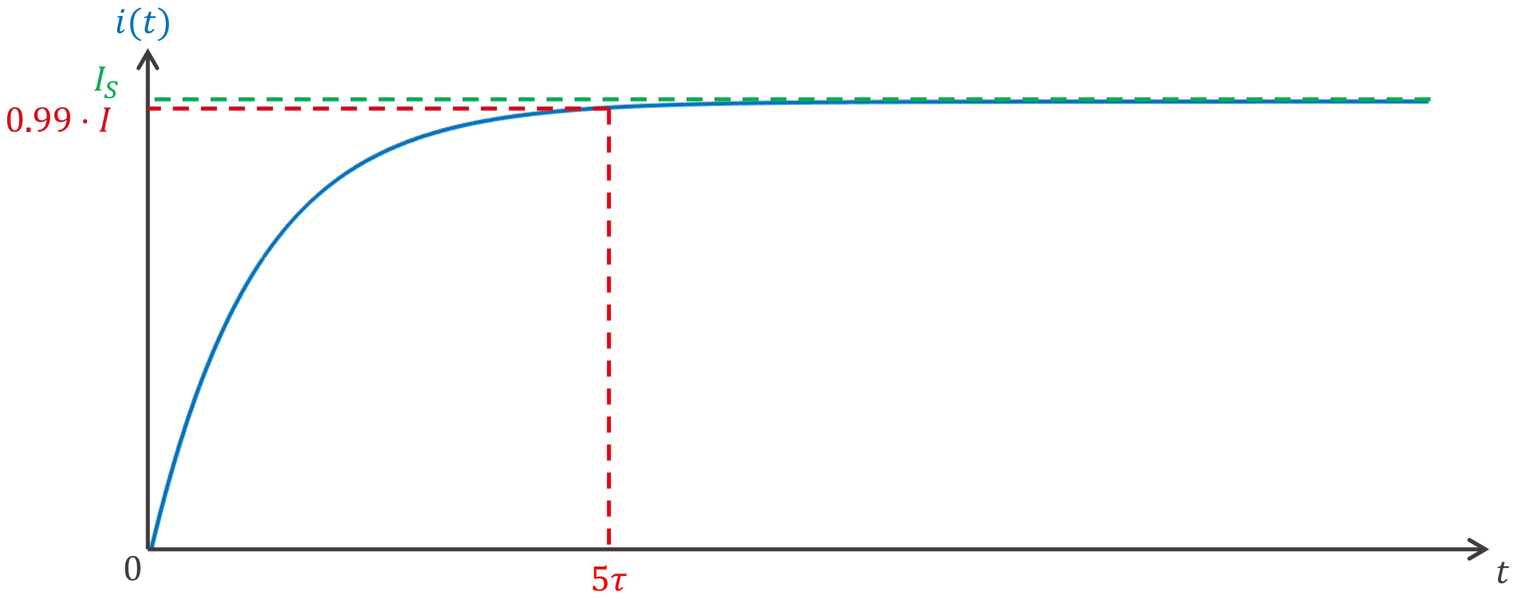
Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Points clés

- Dans un circuit RL, les grandeurs électriques de l'inductance évoluent avec une constante de temps donnée par:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

- La solution transitoire d'un circuit RL est de type exponentiel.

- Une condition initiale est nécessaire pour définir la solution du problème.

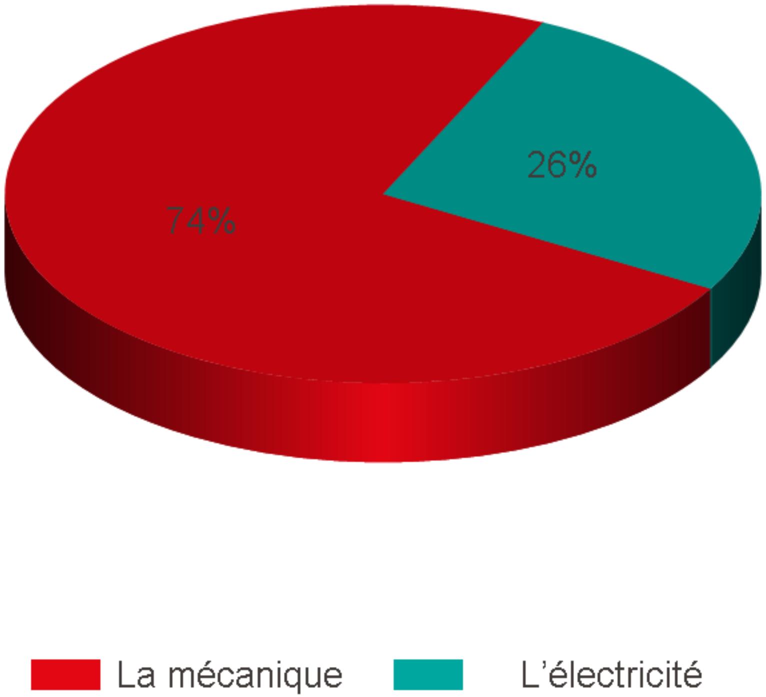
- Dans un circuit RL série, le régime transitoire du courant est de la forme:

$$\boxed{i_L(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Vous préférez quoi?

A. La mécanique

B. ❤ L'électricité ❤



Pour aller plus loin

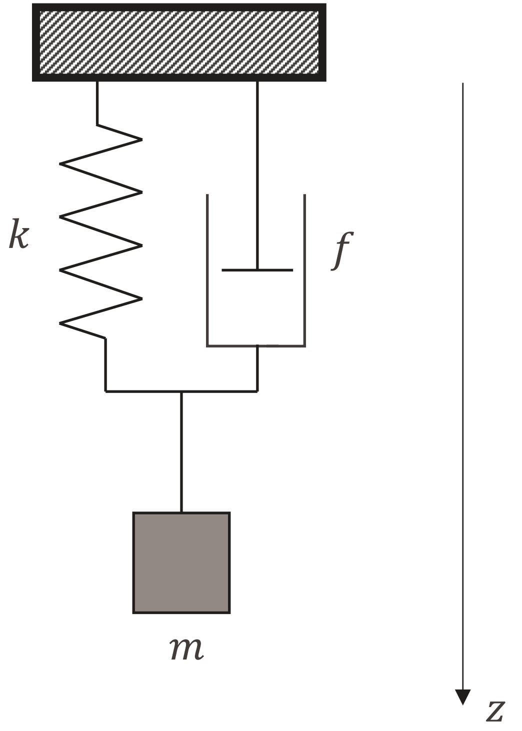
- Faisons un peu de mécanique…
- Forces subies par chaque composant:
  - Ressort: $F_r = k\Delta z \Rightarrow v = \frac{1}{k}\frac{dF_r}{dt}$ $= \frac{d\Delta z(t)}{dt}$

    u $\qquad\qquad \dot{i}$

    $\frac{1}{k} = C \qquad \Rightarrow i = C\frac{du}{dt}$
  - Amortisseur: $F_a = fv$

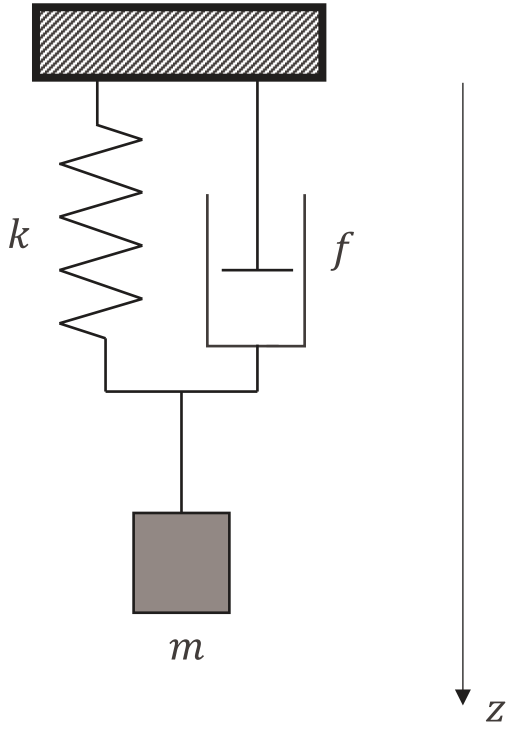
    $u = Ri$
  - Masselotte: $F_m = ma = m\frac{dv}{dt}$

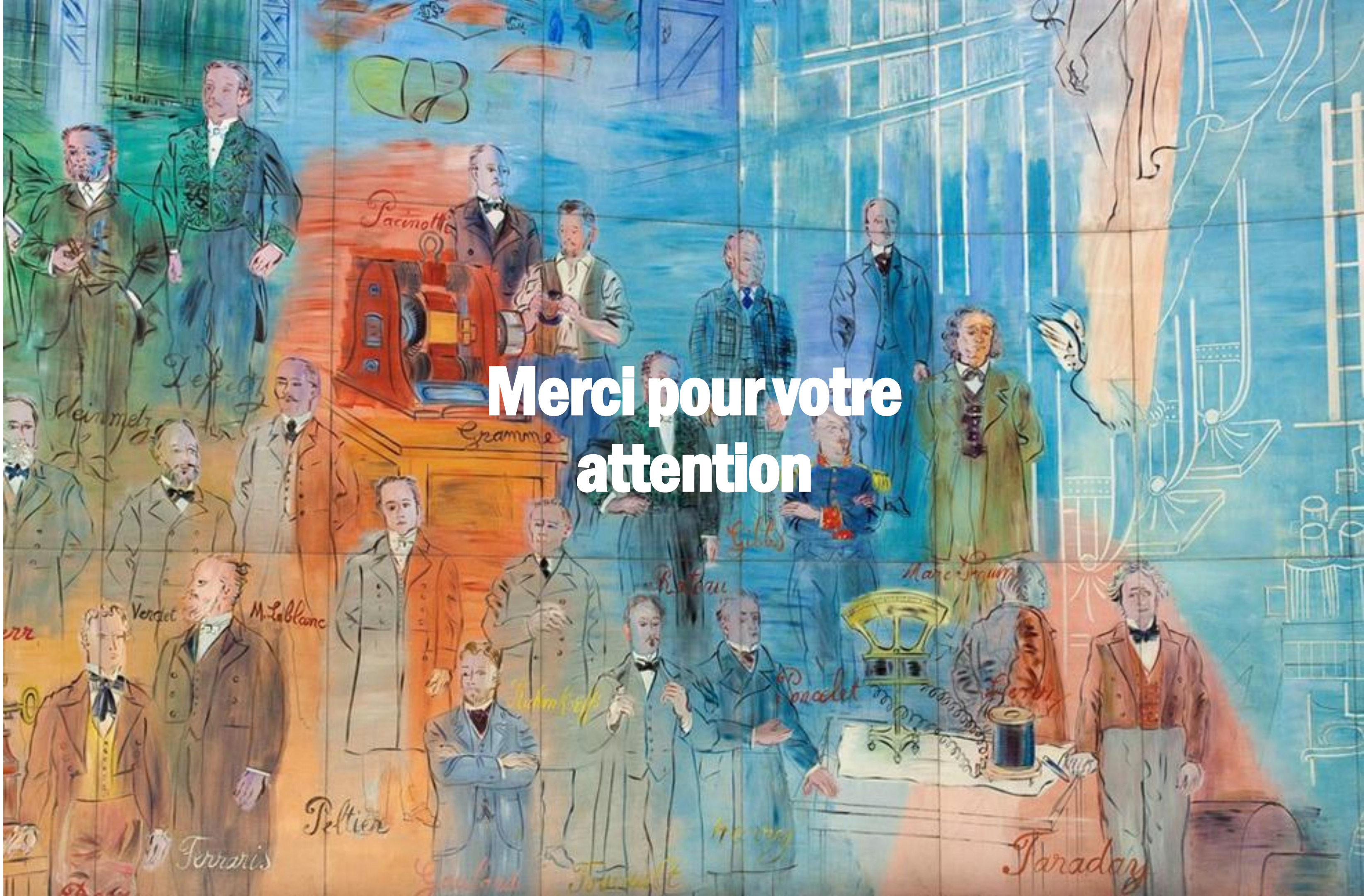
    $u = L\frac{di}{dt}$



Pour aller plus loin

- Le courant est relatif à une vitesse de déplacement
- La tension est relative à une force
- Un condensateur stocke de l'énergie potentielle, liée à la tension
  - Un ressort stocke aussi de l'énergie potentielle, liée à la force de rappel
- Une inductance stocke de l'énergie magnétique, liée au courant
  - Une masse en mouvement stocke de l'énergie cinétique, liée à la vitesse





Merci pour votre attention

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris