

Cours 5: Condensateur, Circuit RC

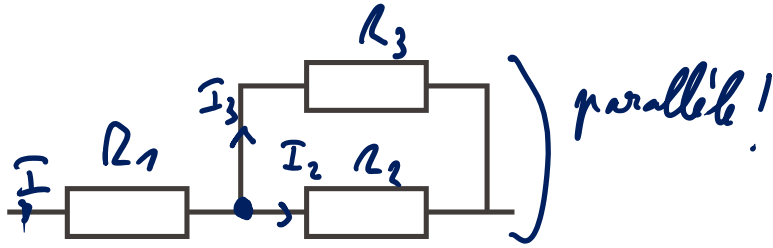
EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité
Automne 2025

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Rappels



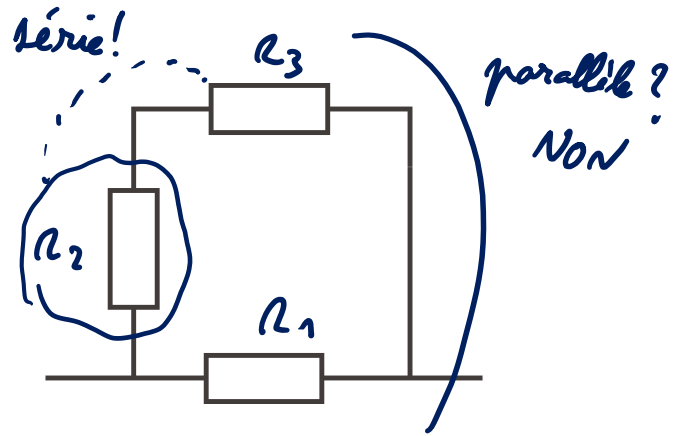
- Rappels - Série/parallèle



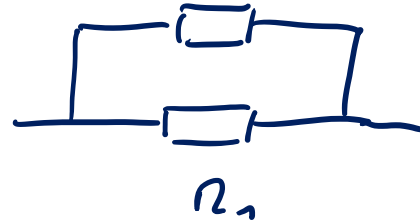
série? NON



série!

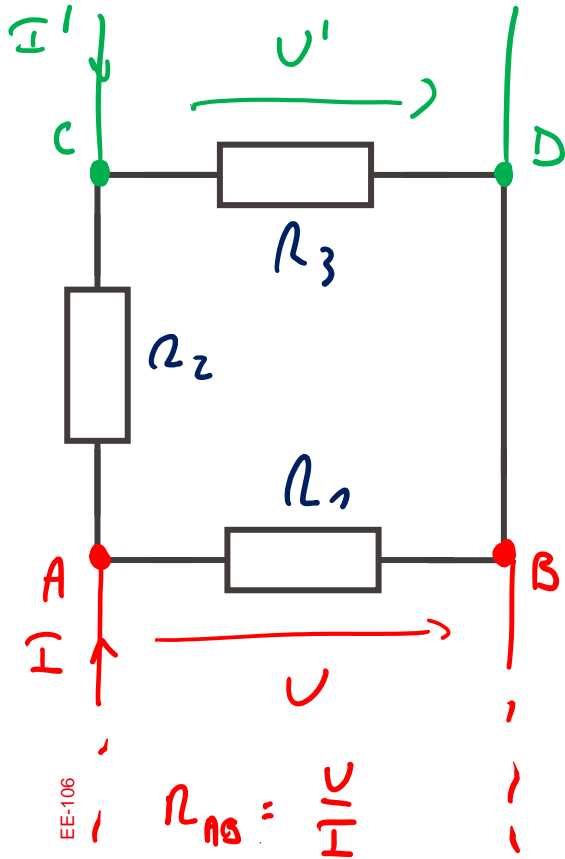


$$R_s = R_2 + R_3$$

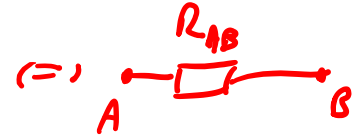
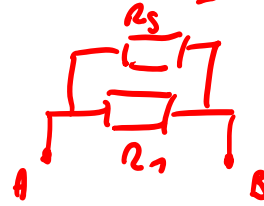


parallèle!

- Rappels - Résistance équivalente

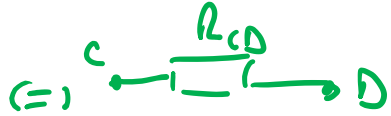
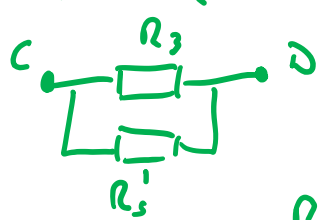


R_2 et R_3 en série

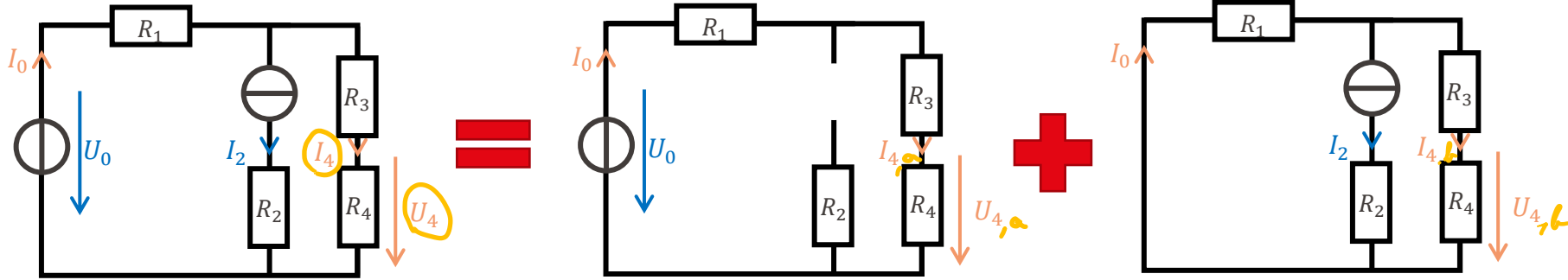


$$R_{AB} = \frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

R_1 et R_2 en série



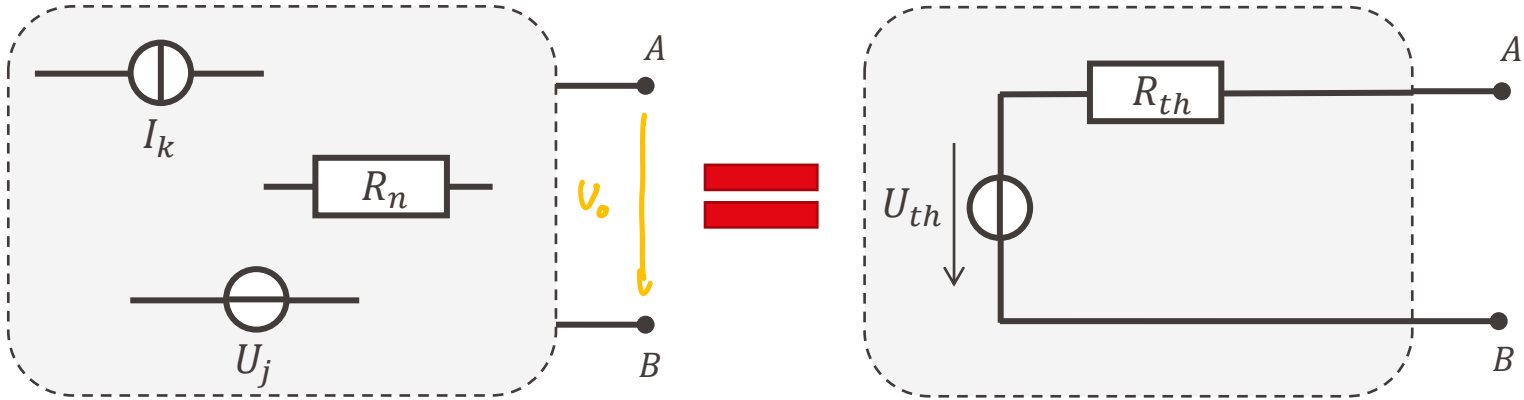
$$R_{CD} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$



$$U_4 = U_{4,a} + U_{4,b}$$

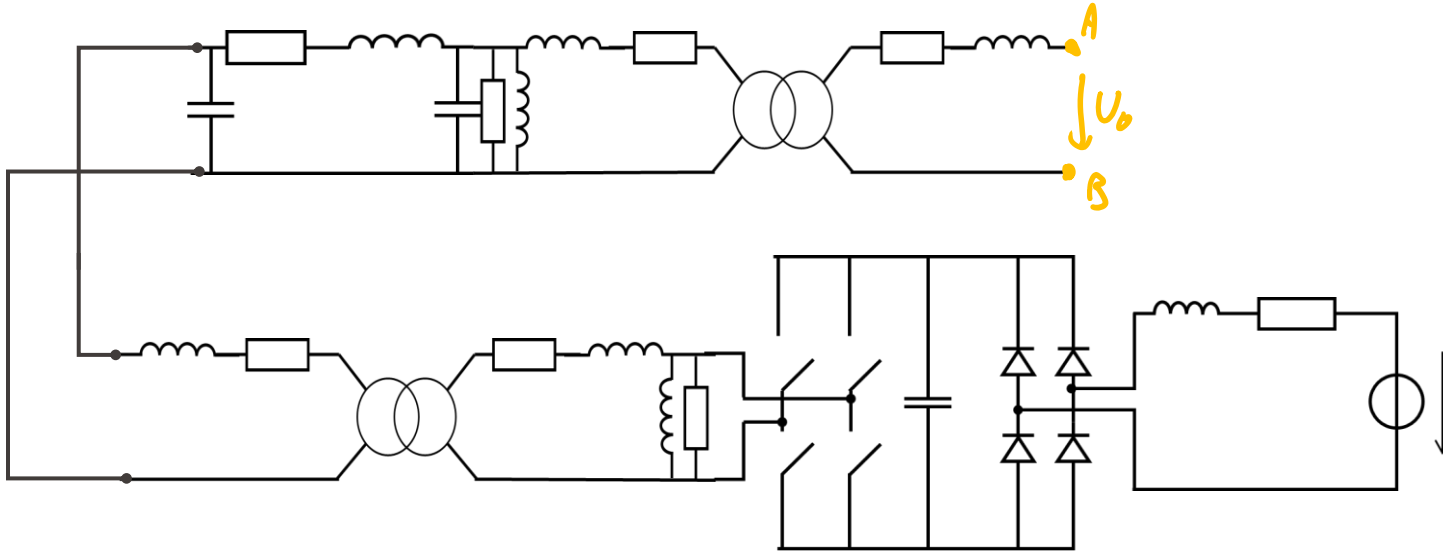
$$I_4 = I_{4,a} + I_{4,b}$$

- Rappels – Théorèmes de Thévenin et de Norton



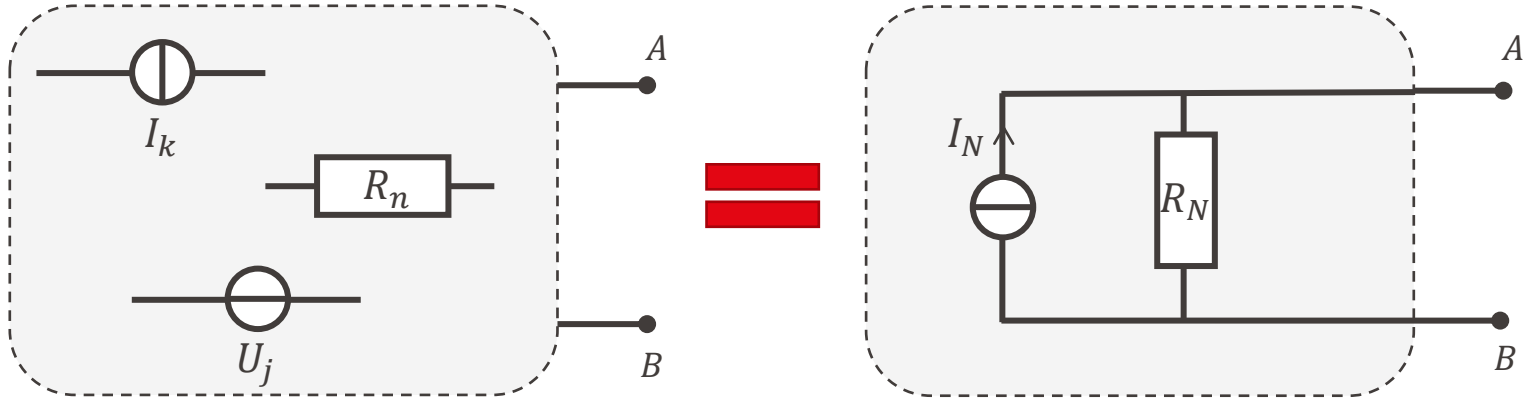
$$\begin{aligned} U_{th} &= U_0 \\ R_{th} &= R_{AB} \end{aligned}$$

- Rappels – Théorèmes de Thévenin et de Norton



$$\begin{aligned} U_{th} &= U_0 \\ R_{th} &= R_{AB} \end{aligned}$$

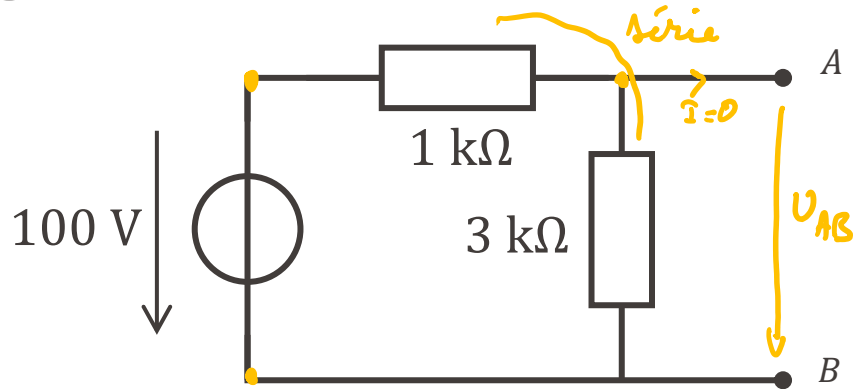
- Rappels – Théorèmes de Thévenin et de Norton



$$\begin{aligned} I_N &= I_{CC} \\ R_N &= R_{AB} \end{aligned}$$



- Rappels – Que vaut la tension équivalente de Thévenin entre A et B?

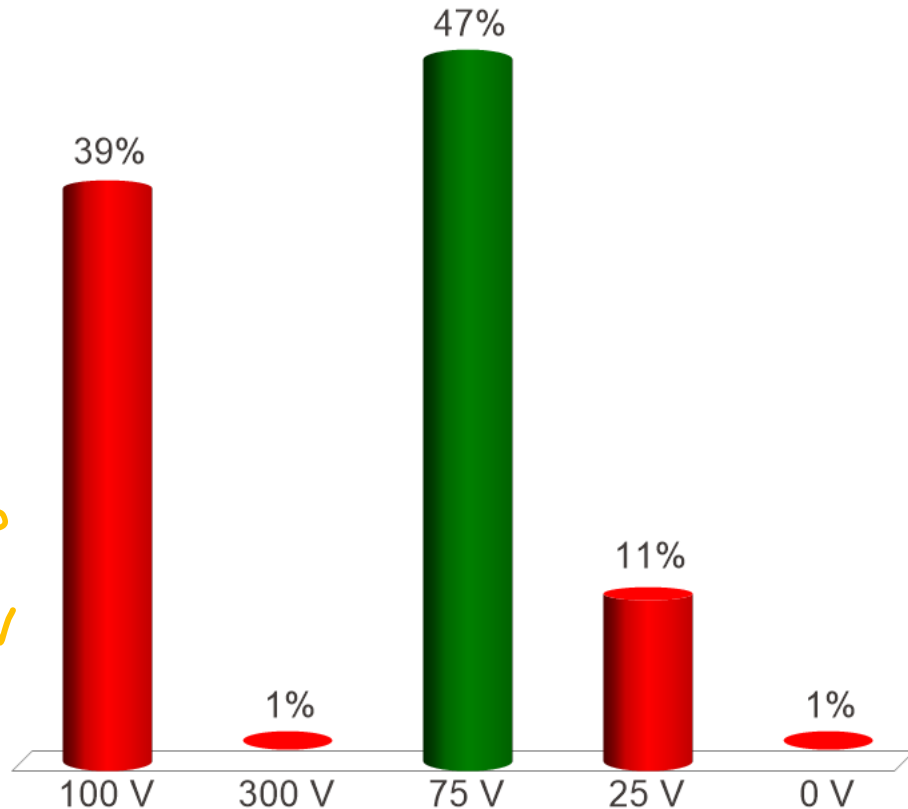


- A. 100 V
- B. 300 V
- C. 75 V
- D. 25 V
- E. 0 V

div. de tension:

$$U_{AB} = \frac{3 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} \times 100$$

$$= \frac{3}{4} \times 100 = 75 \text{ V}$$



- Décrire le comportement d'un condensateur plan
- Déterminer la relation courant-tension d'un condensateur
- Etudier un circuit en régime transitoire

Les condensateurs

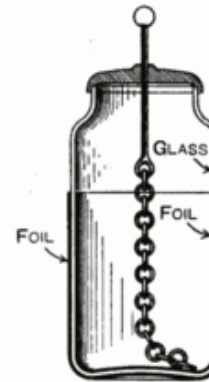


Symbole	Signification	Grandeur	Unité
	Condensateur	C (capacité)	farad (F)

- Le condensateur est un composant de base utilisé pour:
 - Le stockage d'énergie
 - Le filtrage de signaux parasites
 - La protection de systèmes électriques sensibles
 - ...
- C'est un dipôle passif



- 1745: Ewald Georg von Kleist et Pieter van Musschenbroek inventent la **bouteille de Leyde**, ancêtre du condensateur
- Deux conducteurs sont séparés par une paroi de verre (isolant)
- La bouteille de Leyde est utilisée pour faire des décharges électriques après lui avoir appliqué une tension électrique



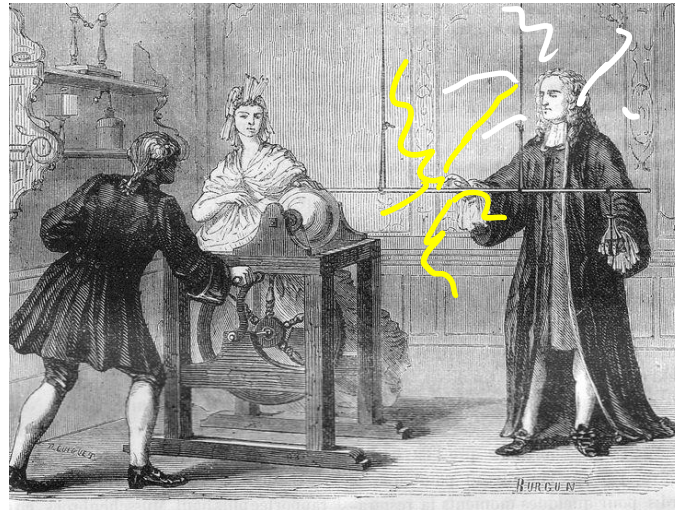
*Pieter van Musschenbroek
1692-1761
Physicien néerlandais*



*Ewald Georg von Kleist
1700-1748
Physicien allemand*



- 1745: Ewald Georg von Kleist et Pieter van Musschenbroek inventent la **bouteille de Leyde**, ancêtre du condensateur
- Deux conducteurs sont séparés par une paroi de verre (isolant)
- La bouteille de Leyde est utilisée pour faire des décharges électriques après lui avoir appliqué une tension électrique



Pieter van Musschenbroek
1692-1761
Physicien néerlandais

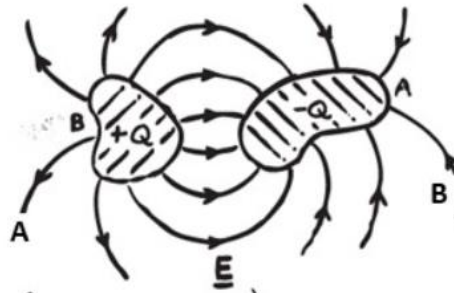


Ewald Georg von Kleist
1700-1748
Physicien allemand

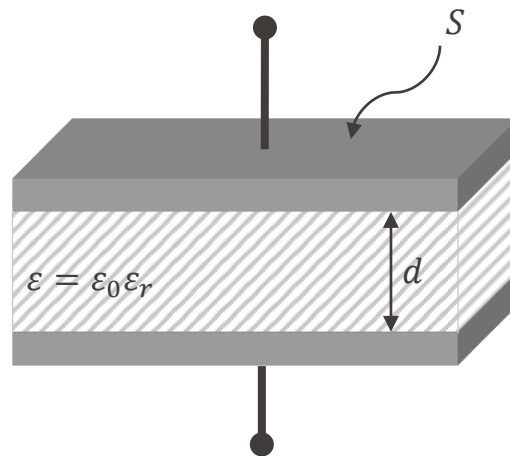


Le condensateur généralisé

- On considère deux surfaces conductrices
 - De forme quelconque
 - Isolées l'une de l'autre, fixes dans l'espace
- Les deux surfaces sont chargées, chacune avec une charge opposée
 - Une surface a une charge $+Q$, l'autre a une charge $-Q$
 - La séparation de charge a lieu lorsqu'une source de tension est connectée au condensateur

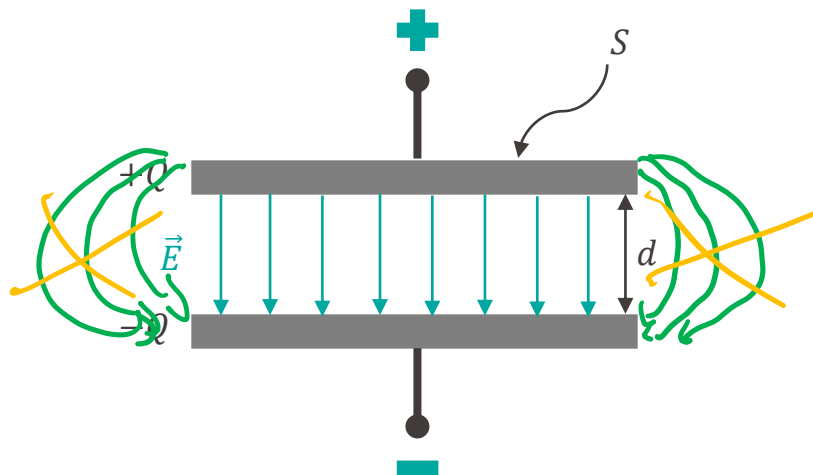


- Lorsque les deux surfaces chargées sont des plaques parallèles, on parle de **condensateur plan**
- Le condensateur est caractérisé par:
 - Une surface S
 - Une séparation d
 - Une permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$



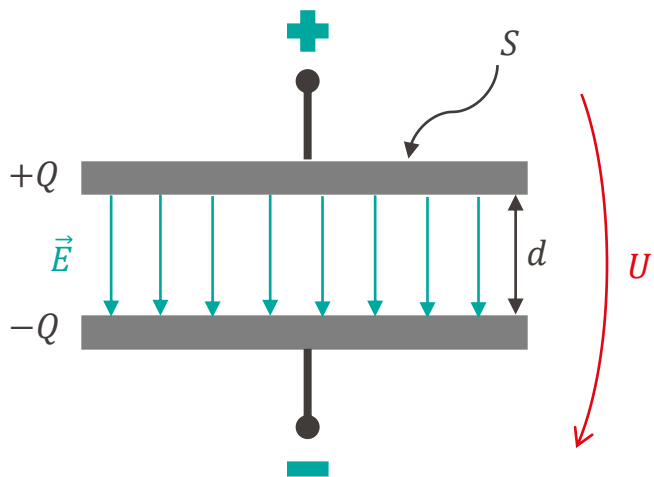
Le condensateur plan idéal

- On considère les plaques du condensateur « infiniment » grandes (les côtés des plaques sont très grands comparés à d)
 - Les effets de bords peuvent être négligés
 - Le champ électrique entre les plaques est homogène



Le condensateur plan idéal

cf cours 1.



- $\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$

- On peut aussi montrer que:

eq. de Maxwell-Gauss $\|\vec{E}\| = \frac{Q}{\epsilon S}$

th. de Green-Ostrogradski

- On en déduit:

$$Q = \frac{\epsilon S}{d} U$$

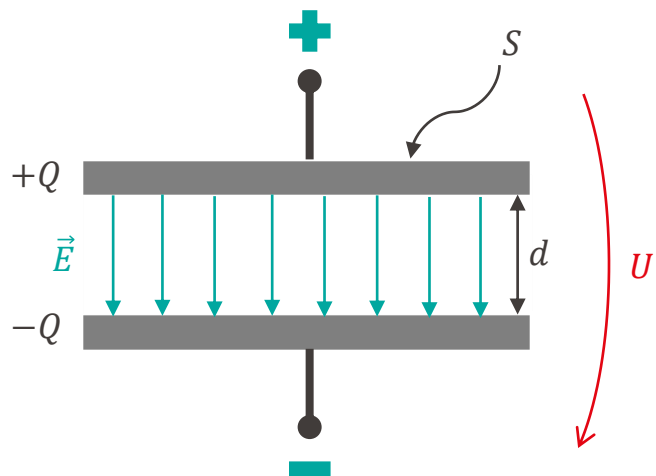
- On définit ainsi **la capacité** du condensateur plan:

$$Q = CU$$

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

Unité: farad (F)

Le condensateur plan idéal



Ordre de grandeur de la capacité?

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$



Calculer la capacité du condensateur

Ordre de grandeur de la capacité?

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

- $d = 1 \text{ mm}$
- $S = 1.13 \text{ cm}^2$
- $\epsilon = \epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
(air entre les plaques)

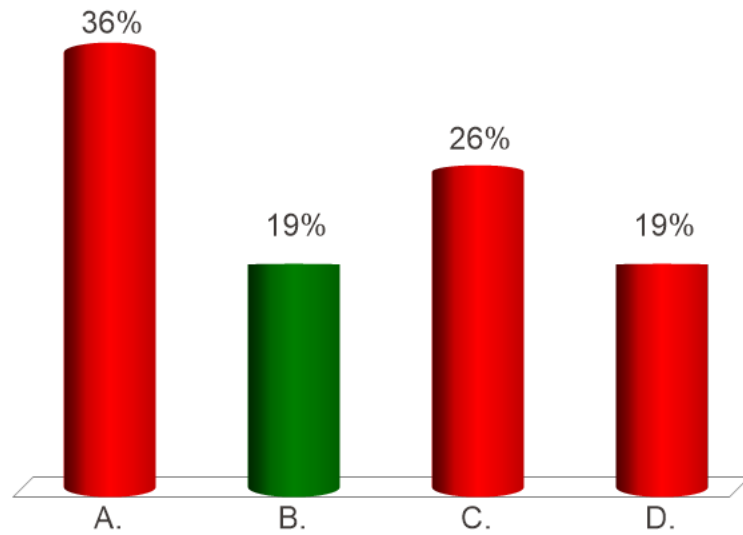
$$C = \frac{10 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 10^{-12} \text{ F}$$

A. $C = 10 \text{ nF}$

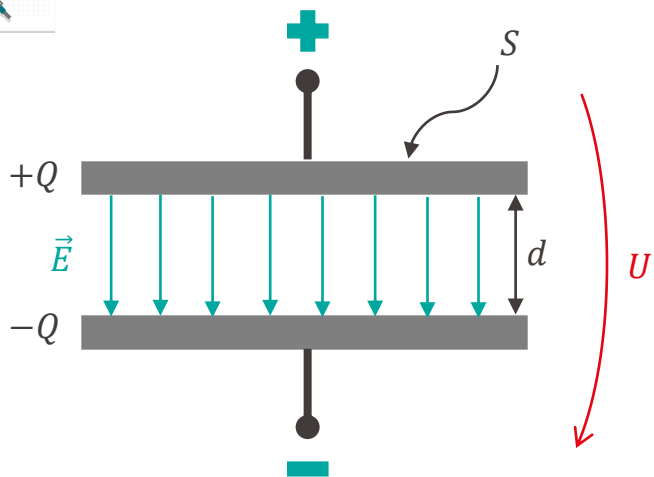
B. $C = 1 \text{ pF}$

C. $C = 10 \text{ pF}$

D. $C = 0.1 \text{ nF}$



Le condensateur plan idéal

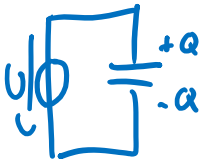


Ordre de grandeur de la capacité?

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

$$C \sim \mu\text{F} \rightarrow \text{mF}$$

- Lorsqu'il est connecté à une source de tension, le condensateur accumule des charges \Rightarrow il accumule de l'énergie électrostatique
 - Une fois chargé, la charge est fixe: $Q = \text{cste}$.
 - $i(t) = \frac{dQ}{dt}$ donc dans un condensateur chargé, le courant est nul



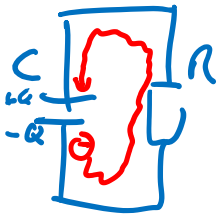
Un condensateur chargé est équivalent à un circuit ouvert

Autrement dit, en régime statique, un condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

En régime statique:



- Un condensateur chargé peut écouler ses charges en le branchant à un autre dipôle passif, par exemple une résistance
 - Le condensateur libère de l'énergie stockée en se déchargeant
 - L'énergie emmagasinée est égale au travail fourni pour se charger



$$dW_c = dq \cdot u$$

$$q = Cu \rightarrow u = \frac{q}{C}$$

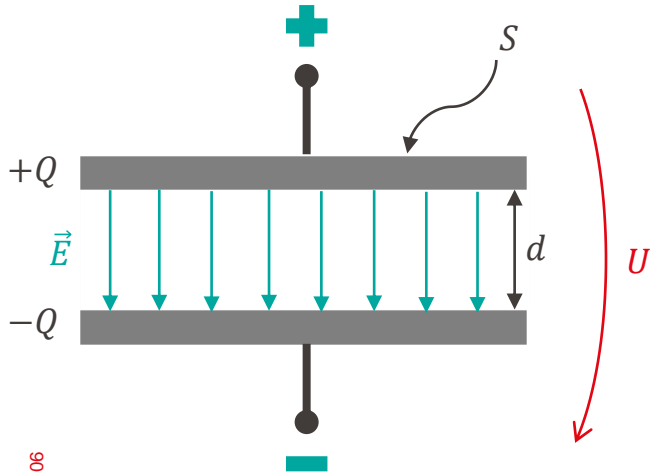
$$\hookrightarrow dW_c = \frac{1}{C} q \cdot dq$$

$$W_c = \int_0^Q \frac{1}{C} q \cdot dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{C} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^Q$$

$$W_c = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{or} \quad Q = CU \quad \leftarrow \text{tension initiale}$$

$$W_c = \frac{1}{2} CU^2$$

- Un condensateur chargé peut écouler ses charges en le branchant à un autre dipôle passif, par exemple une résistance
 - Le condensateur libère de l'énergie stockée en se déchargeant
 - L'énergie emmagasinée est égale au travail fourni pour se charger



$$W_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$W_c = \frac{1}{2} C U^2$$

- Un condensateur est un dipôle qui accumule de l'énergie électrostatique en condensant des charges proportionnellement à la tension:

$$Q = CU$$

- Le condensateur est caractérisé par sa **capacité**:

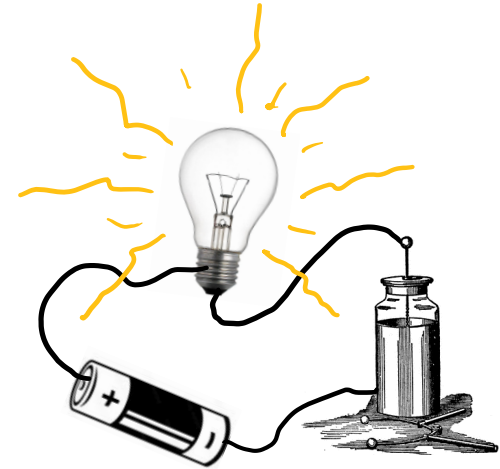
$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

- L'énergie accumulée pour une tension U est:

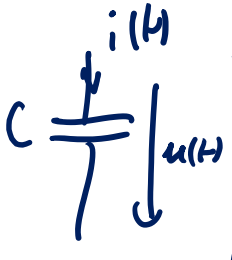
$$W_c = \frac{1}{2} CU^2$$

- En régime statique, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

Comportement dynamique



- On a vu qu'en régime continu $I = 0$ et que le condensateur chargé se comporte comme un circuit ouvert
- Que se passe-t-il pendant la charge du condensateur?

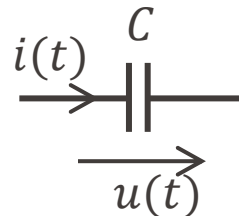


Hand-drawn diagram of a capacitor with current $i(t)$ and voltage $u(t)$ indicated.

$$\left. \begin{array}{l} i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \\ q(t) = Cu(t) \end{array} \right\} \Rightarrow i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

- On a vu qu'en régime continu $I = 0$ et que le condensateur chargé se comporte comme un circuit ouvert
- Que se passe-t-il pendant la charge du condensateur?

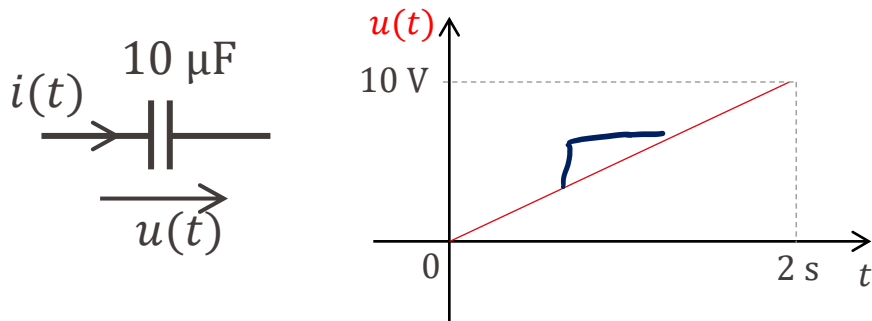
$$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$$



- Un courant transitoire peut exister!

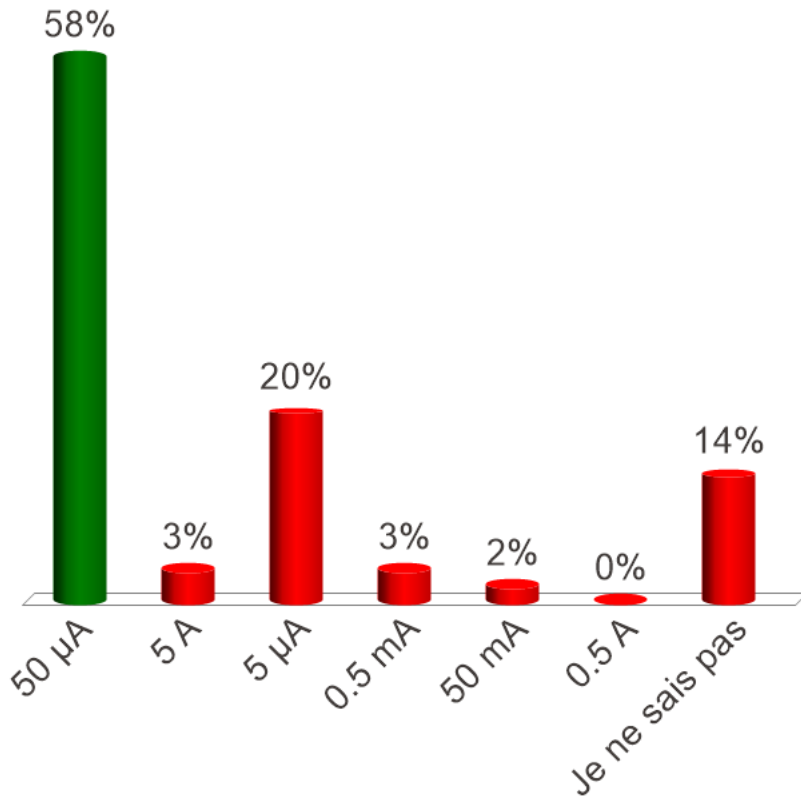


Que vaut le courant i pour le profil de tension donné?

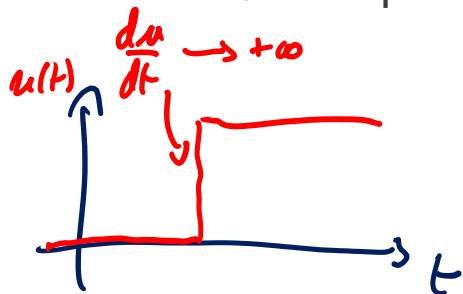


- A. $50 \mu\text{A}$
- B. 5 A
- C. $5 \mu\text{A}$
- D. 0.5 mA
- E. 50 mA
- F. 0.5 A
- G. Je ne sais pas

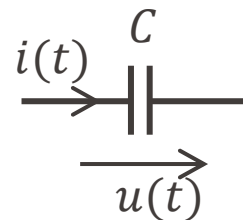
$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \frac{du(t)}{dt} \\
 &= 10 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \\
 &= 50 \cdot 10^{-6} \text{ A}
 \end{aligned}$$



- Que se passe-t-il pendant la charge du condensateur?

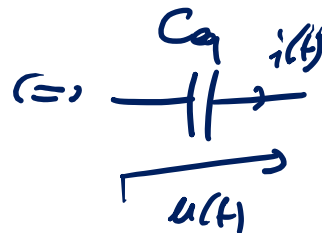
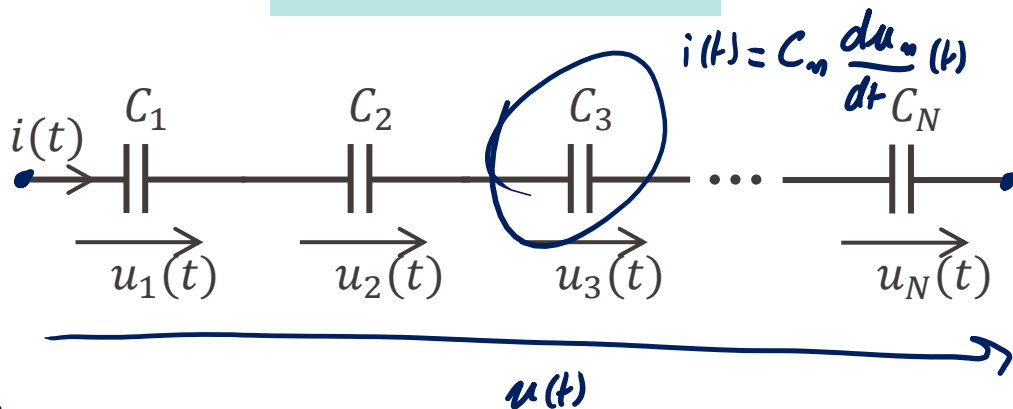


$$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$$



- **Remarque:** le courant ne peut pas être infini, donc la tension aux bornes du condensateur est continue.

Condensateurs en série



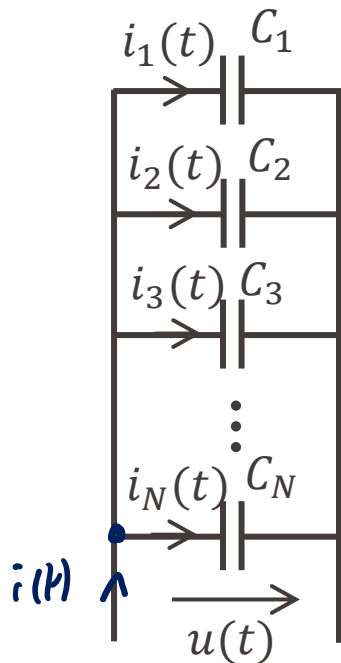
$$u(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t)$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \sum_{n=1}^N \frac{du_n}{dt}(t) = \sum_{n=1}^N \frac{i(t)}{C_n} = \underbrace{\left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right]}_{\frac{1}{C_{eq}}} \cdot i(t)$$

$$i(t) = C_{eq} \frac{du}{dt}(t)$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{1}{C_{eq}} i(t)$$

Condensateurs en parallèle



$$i(t) = \sum_{n=1}^N i_n(t) = \sum_{n=1}^N C_n \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = \left[\sum_{n=1}^N C_n \right] \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

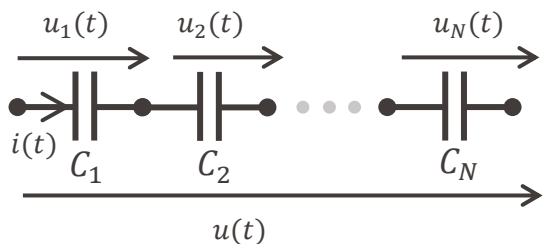
$$i(t) = C_{eq} \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$C_{eq} \quad i(t) \quad u(t) \quad (\Rightarrow)$$

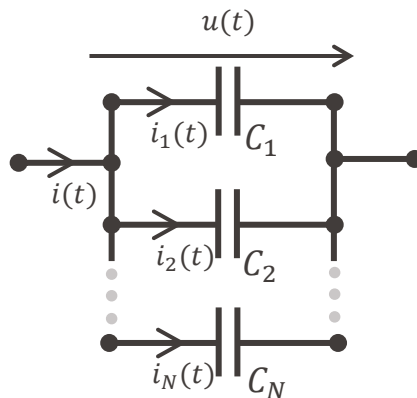
- Les circuits avec condensateurs ont un comportement dynamique (dépend du temps)

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

- Des condensateurs en parallèle s'ajoutent
 - Des résistances en parallèle ont une capacité équivalente plus grande
- Pour des condensateurs en série, les inverses des capacités s'ajoutent
 - Des condensateurs en série ont une capacité équivalente plus petite

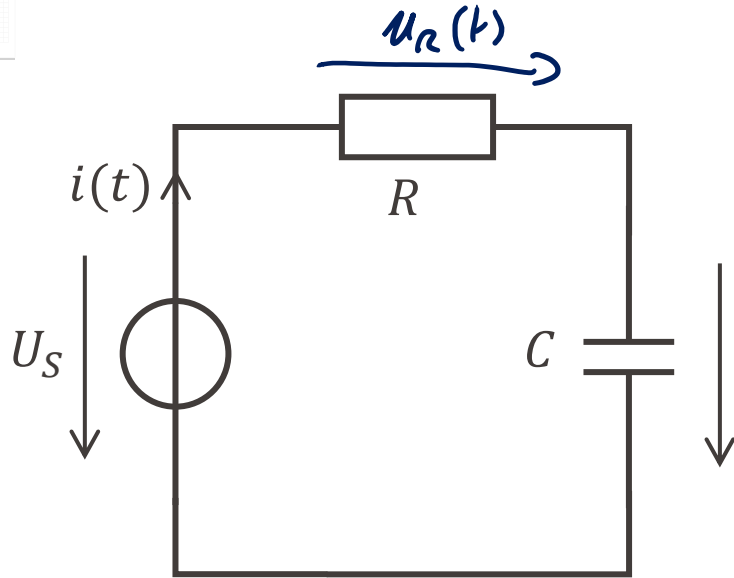


$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}$$



$$C_{\text{eq}} = \sum_{n=1}^N C_n$$

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



loi des mailles:

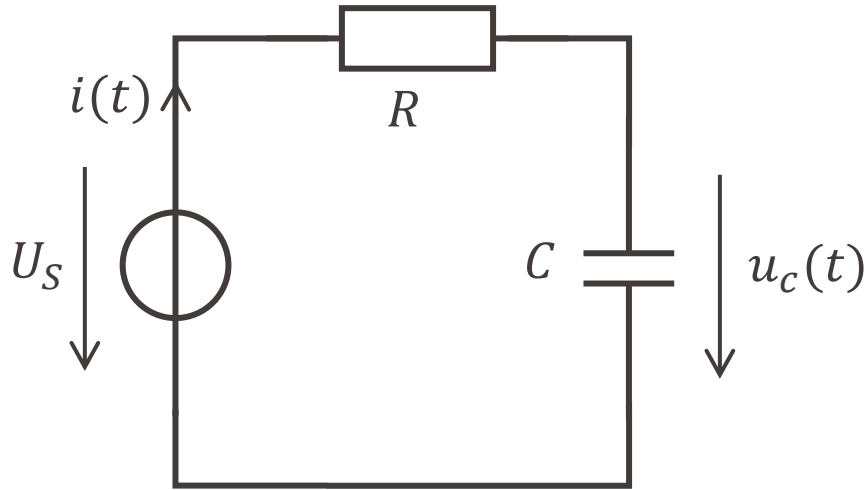
$$U_s = u_R(t) + u_C(t)$$

loi d'Ohm : $u_R(t) = R i(t)$

or $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$

$$\Rightarrow U_s = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



Loi des mailles:

$$U_S = Ri(t) + u_c(t)$$

Relation caractéristique du condensateur::

$$i(t) = \frac{C du_c}{dt}(t)$$

Donc on obtient:

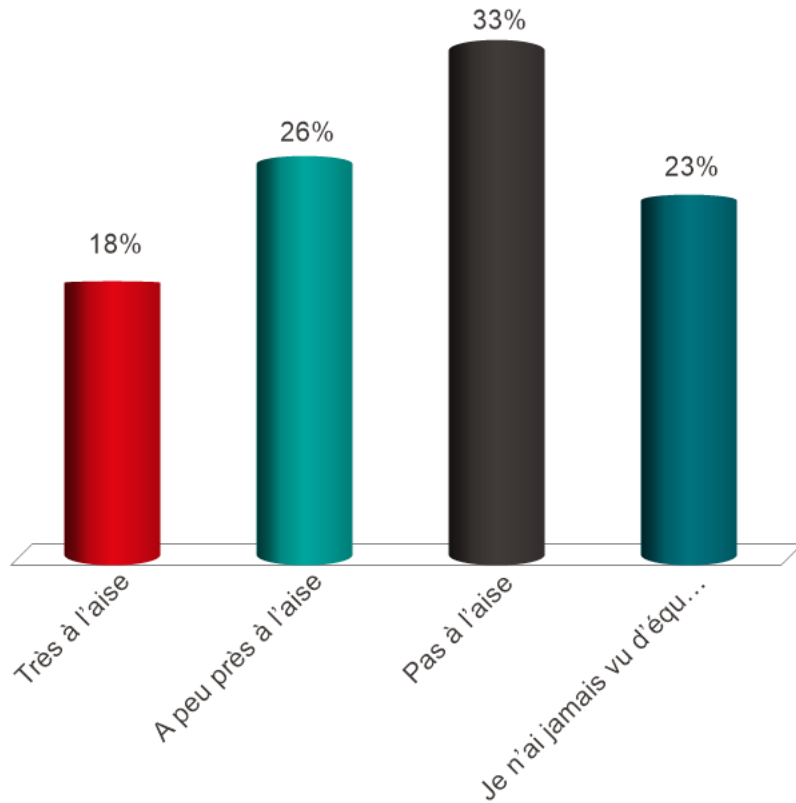
$$U_S = RC \frac{du_c}{dt} + u_c(t)$$

$$\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}U_S$$



Comment vous sentez-vous avec les équations différentielles?

- A. Très à l'aise
- B. A peu près à l'aise
- C. Pas à l'aise
- D. Je n'ai jamais vu d'équations différentielles



Point sur les équations différentielles d'ordre 1

- Définition de la fonction exponentielle: solution de l'équation différentielle

$$\frac{dg}{dz}(z) = g(z)$$

- La fonction exponentielle s'écrit $g(z) = e^z$
- Propriété:

*e = constante de Néper
≈ 2,7*

- Si $h(z) = Ae^{kz}$ alors $\frac{dh}{dz}(z) = kAe^{kz} = k \cdot h(z)$

$$\frac{dh}{dz}(z) = k \cdot h(z)$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

- On souhaite déterminer une fonction $x(t)$ régie par une équation différentielle linéaire d'ordre 1:

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- Ici, τ est une constante de temps (nécessaire pour que l'équation soit physiquement correcte)
- X_0 est une constante, correspondant à la source dans notre cas

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{dh}{dz}(z) &= k h(z) \\ h(z) &= A e^{kz} \end{aligned} \right.$$

- 1. On résout l'équation homogène:

$$\frac{dx_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx_h}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau}x_h(t)$$

- Les solutions d'une telle équation sont des fonctions exponentielles:

$$x_h(t) = A e^{-t/\tau}$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1



$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 1. On résout l'équation homogène:

$$\frac{dx_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1



$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 1. On résout l'équation homogène:

$$\frac{dx_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0$$



$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 2. On cherche une solution particulière. L'équation accepte une solution sous la forme d'une constante ($\frac{dx_p}{dt} = 0$):

$$x(t) = x_p$$

$$x_p = X_0$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = 0$$

$$0 + \frac{1}{\tau}x_p = \frac{1}{\tau}X_0$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1



$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 3. On additionne la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + X_0$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 3. On additionne la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + X_0$$

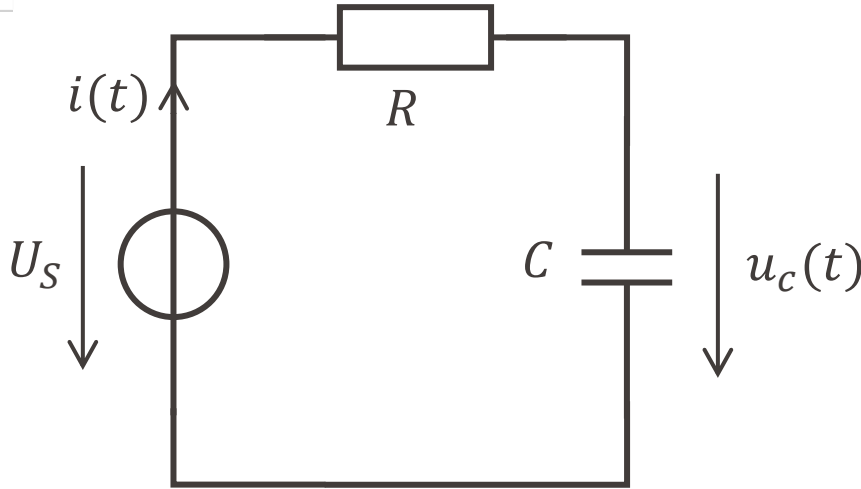
$$x(0) = Ae^0 + X_0 = A + X_0$$

- On obtient une famille de solutions. Le comportement total est déterminé par la condition initiale.

Circuit RC – charge du condensateur

- On modélise un circuit dépendant du temps t :

$$\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} u_c(t) = \frac{1}{\tau} U_S$$



Condition initiale:
 $u_c(0) = 0 \text{ V}$

$$\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{1}{RC} U_S$$

τ

$$u_c(t) = A e^{-t/\tau} + U_S$$

$$u_c(0) = 0 \text{ V} \quad (\Leftrightarrow) \quad A + U_S = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad A = -U_S$$

$$\Rightarrow u_c(t) = -U_S e^{-t/\tau} + U_S$$

$$u_c(t) = U_S(1 - e^{-t/\tau})$$

Circuit RC – charge du condensateur

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} U_S e^{-t/\tau}$$

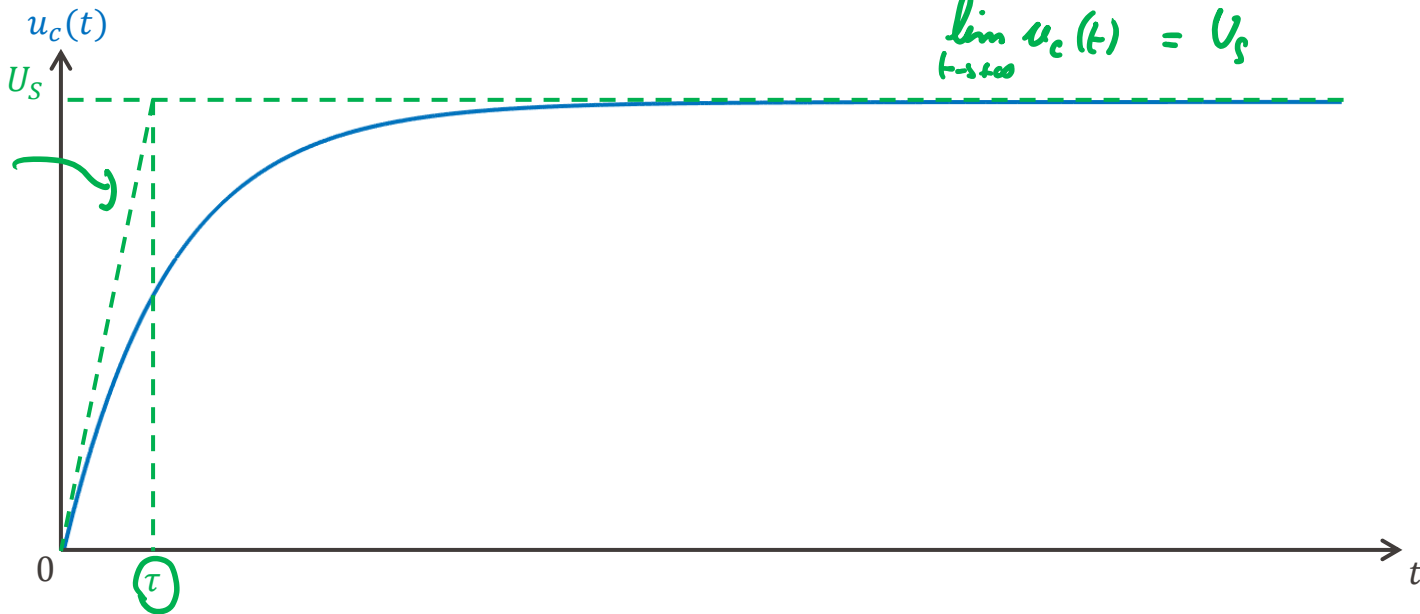
$$u_c(t) = U_S(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = RC$$

$$\frac{du_c(0)}{dt} = \frac{U_S}{\tau}$$

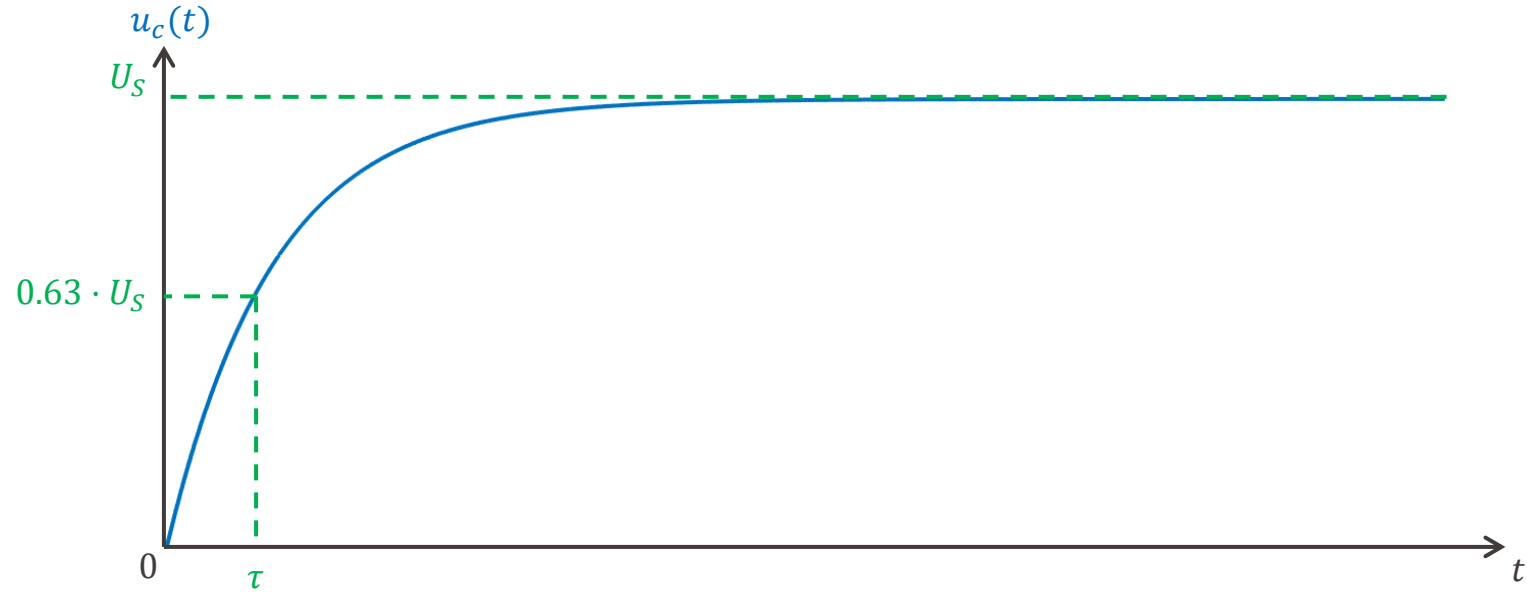
$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_c(t) = U_S$$

$$y = \frac{U_S}{\tau} t$$



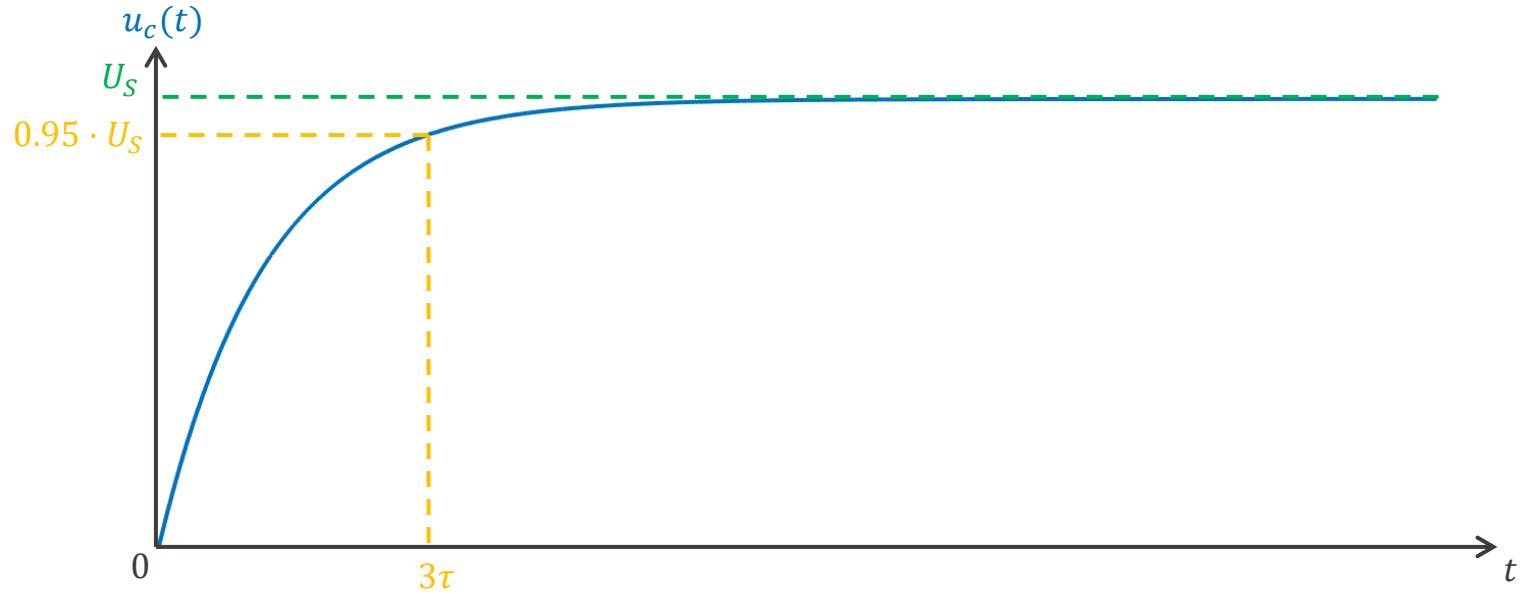
Circuit RC – charge du condensateur

$$u_c(t) = U_S(1 - e^{-t/\tau})$$

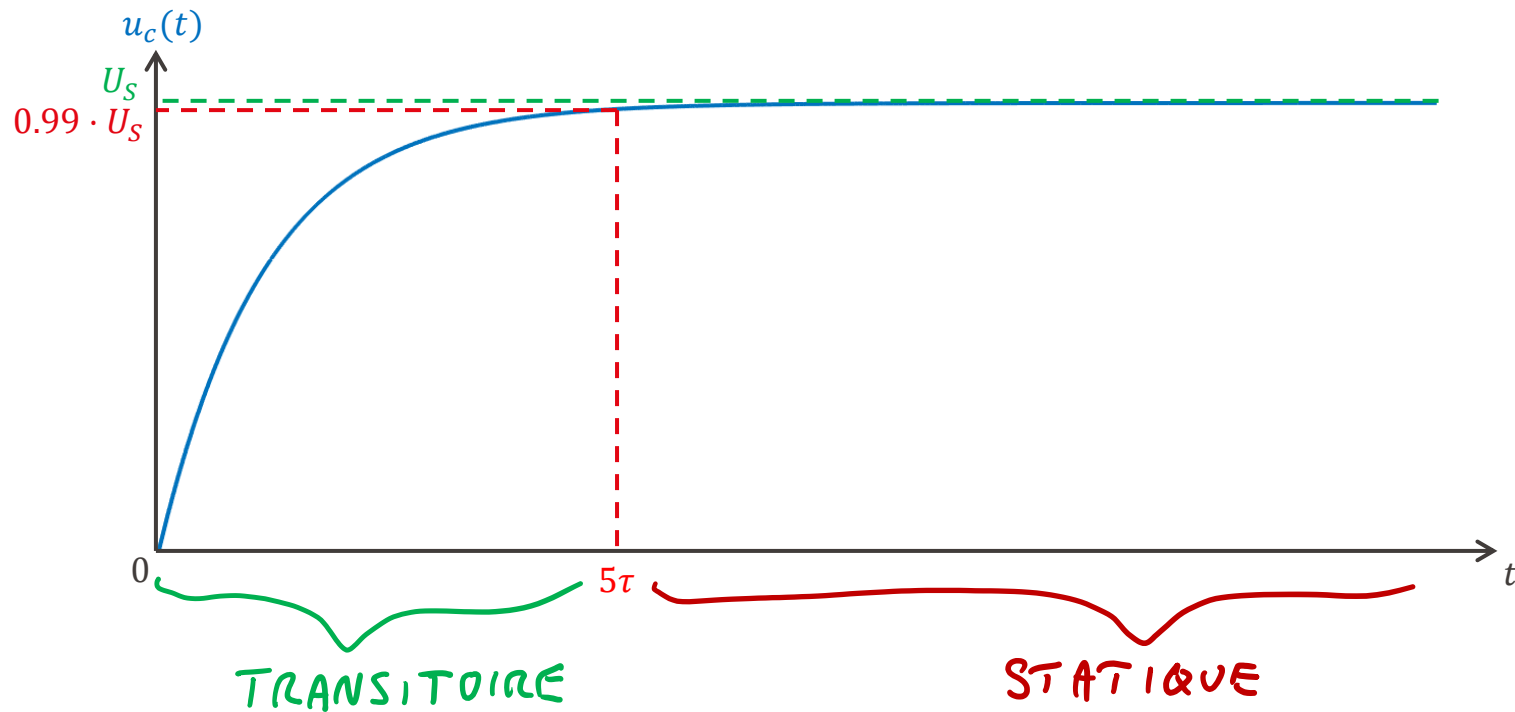


Circuit RC – charge du condensateur

$$u_c(t) = U_S(1 - e^{-t/\tau})$$



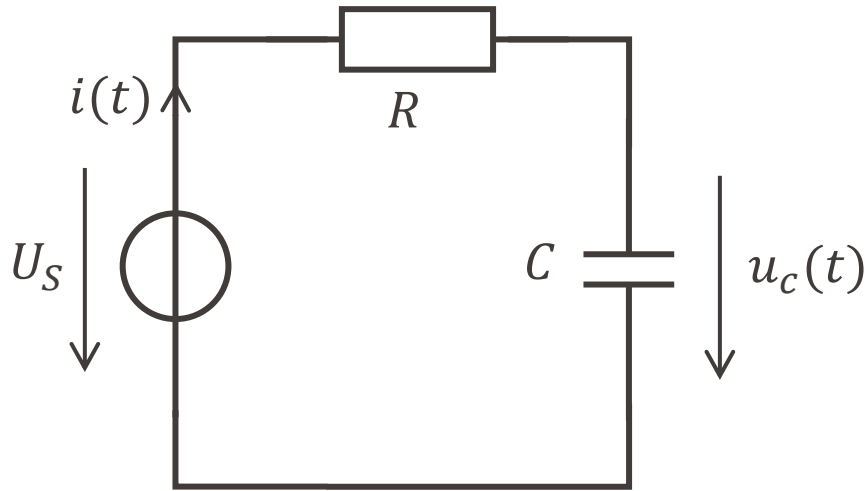
$$u_c(t) = U_S(1 - e^{-t/\tau})$$



Circuit RC – charge du condensateur

- On modélise un circuit dépendant du temps t :

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$



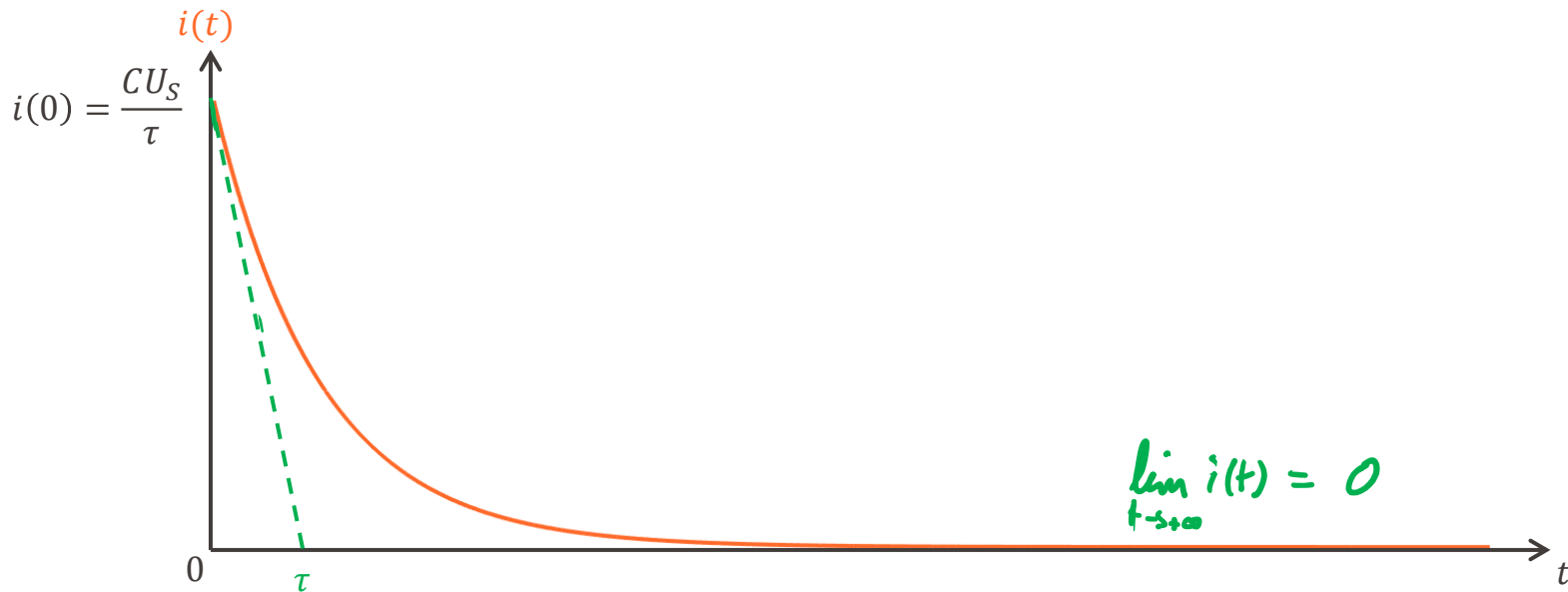
$$u_c(t) = U_S(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Condition initiale:
 $u_c(0) = 0 \text{ V}$

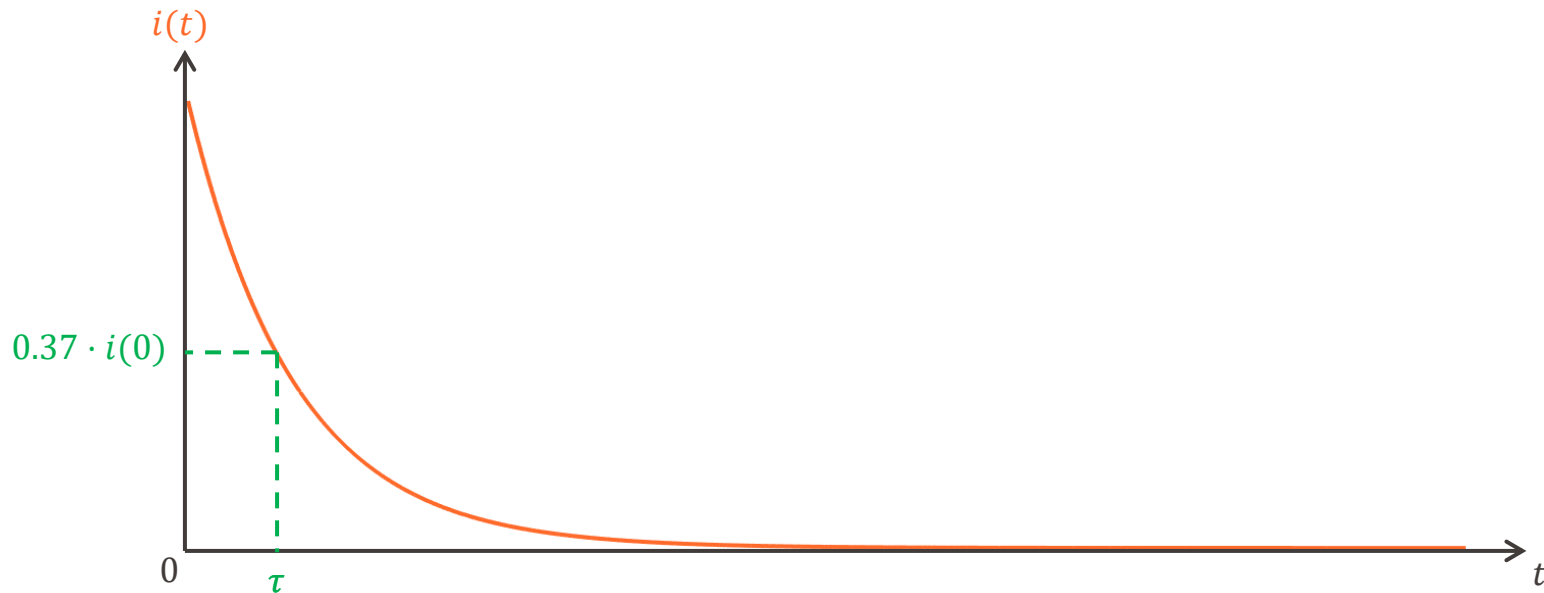
Circuit RC – charge du condensateur

$$i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}$$



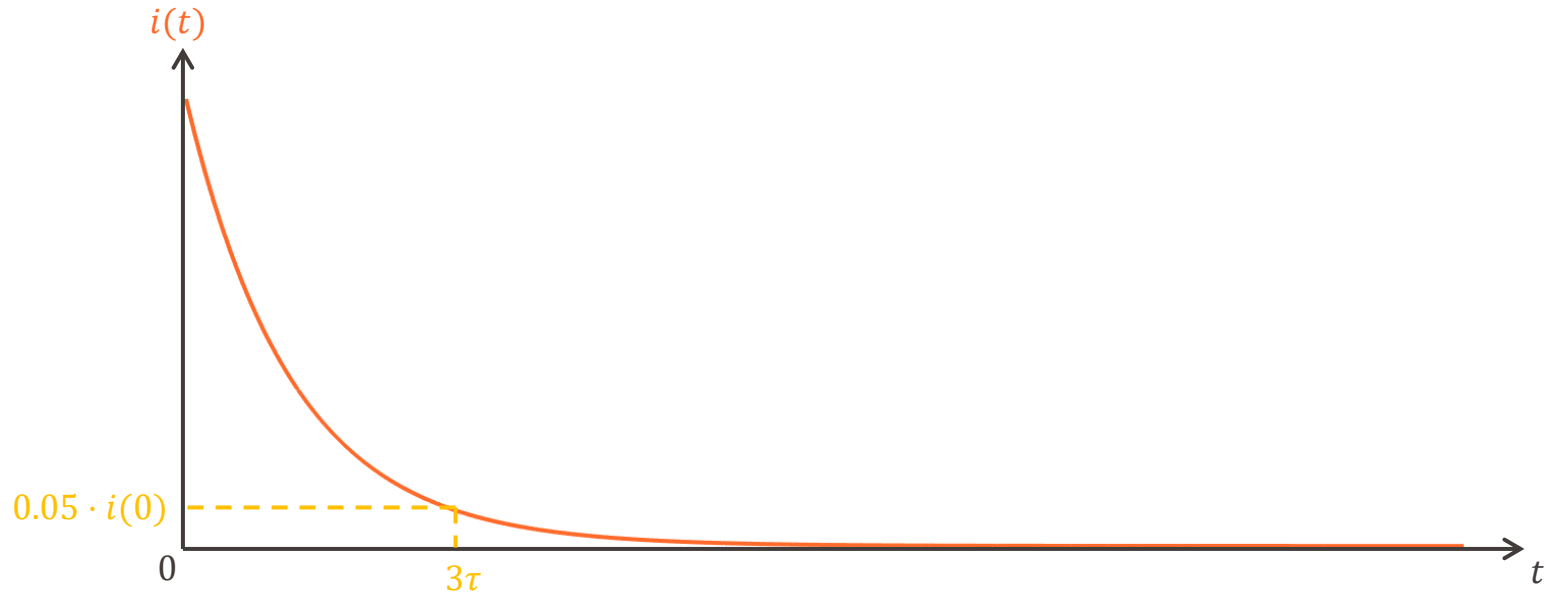
Circuit RC – charge du condensateur

$$i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}$$



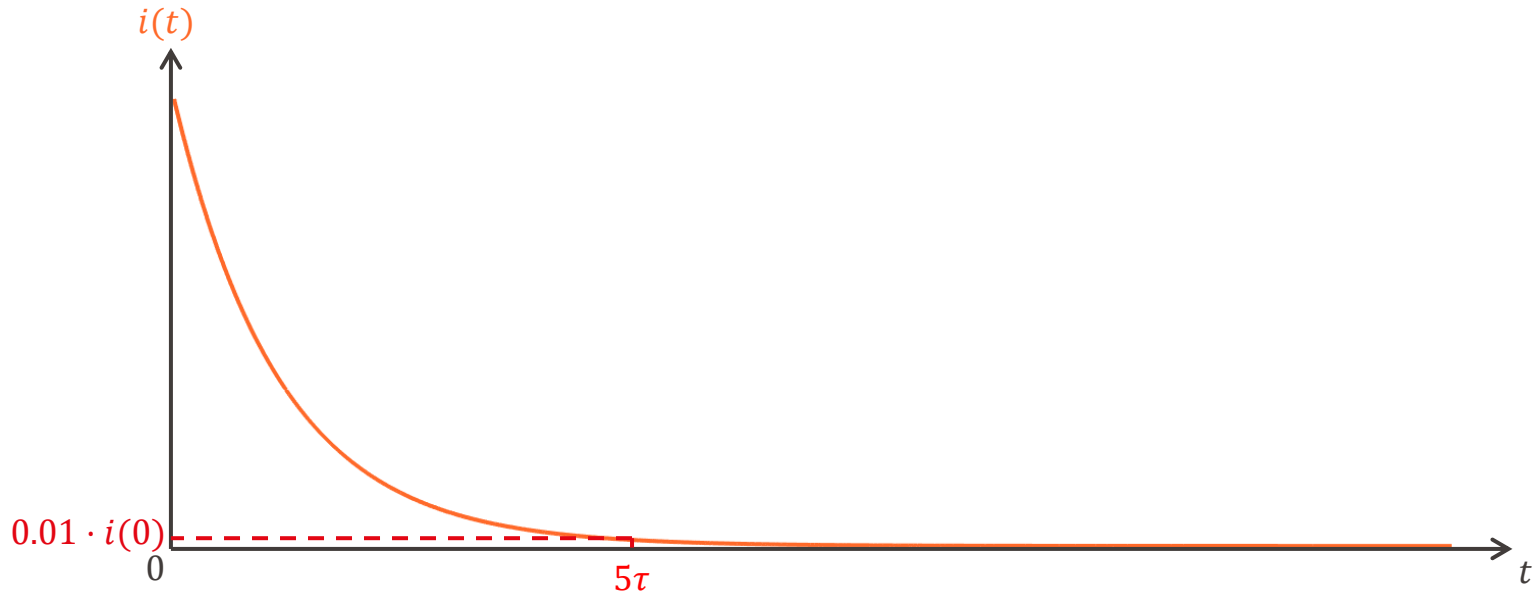
Circuit RC – charge du condensateur

$$i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}$$

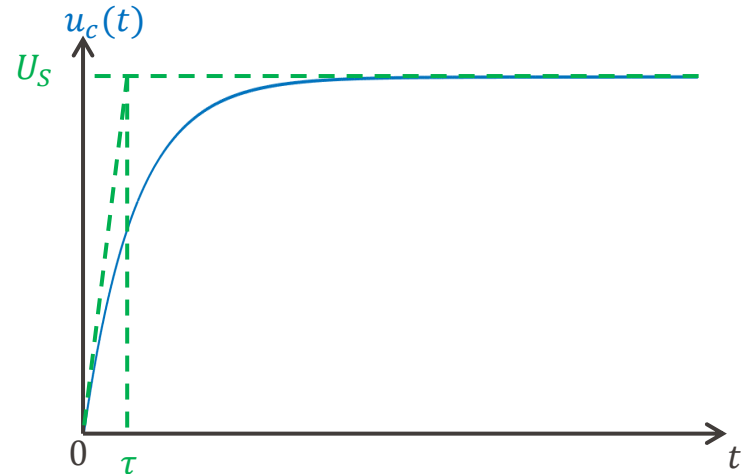
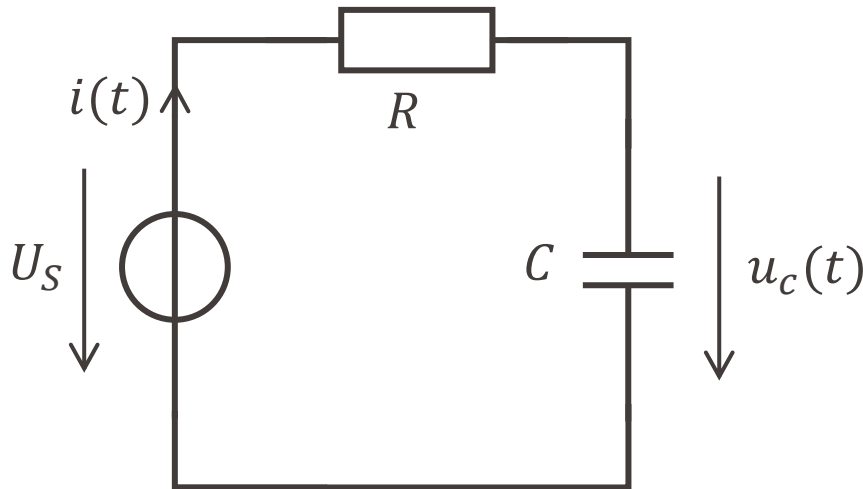


Circuit RC – charge du condensateur

$$i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}$$

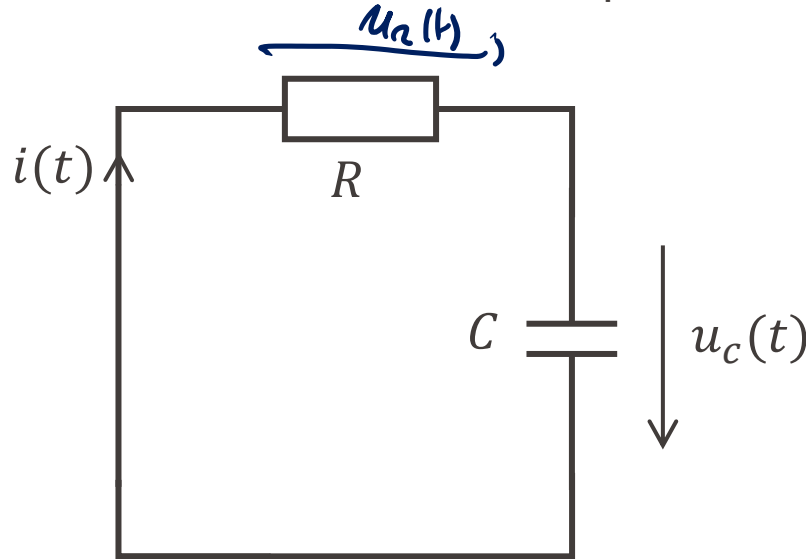


- Lorsque l'on alimente le circuit avec une source de tension, le condensateur se charge
 - La tension du condensateur tend vers une constante
 - Le condensateur est considéré chargé après 5τ (99% de la valeur finale)
 - Le courant tend vers 0 A, correspondant au régime statique



Circuit RC – décharge du condensateur

- On modélise un circuit dépendant du temps t :



Condition initiale:
 $u_c(0) = U_0$

loi des mailles :

$$u_R(t) + u_C(t) = 0$$

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C(t) = 0 \quad ; \quad \tau = RC$$

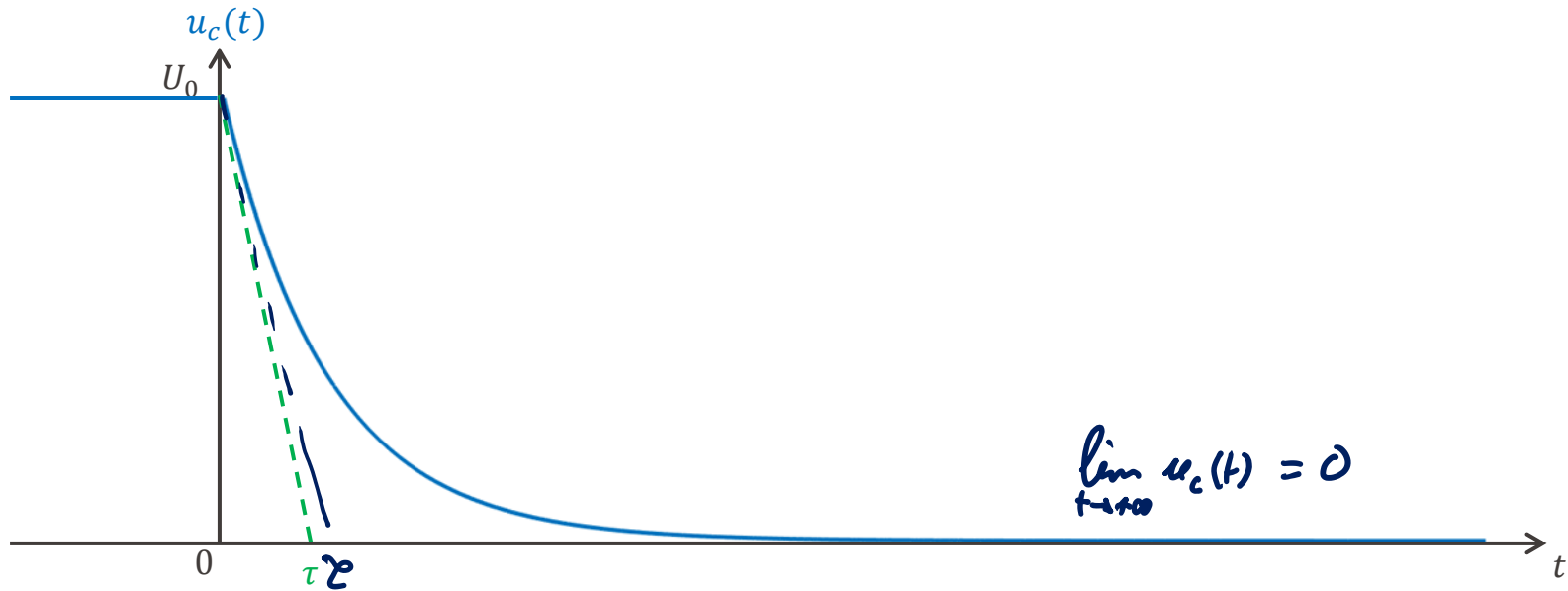
$$\Rightarrow u_C(t) = A e^{-t/\tau}$$

$$u_C(0) = U_0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = A$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

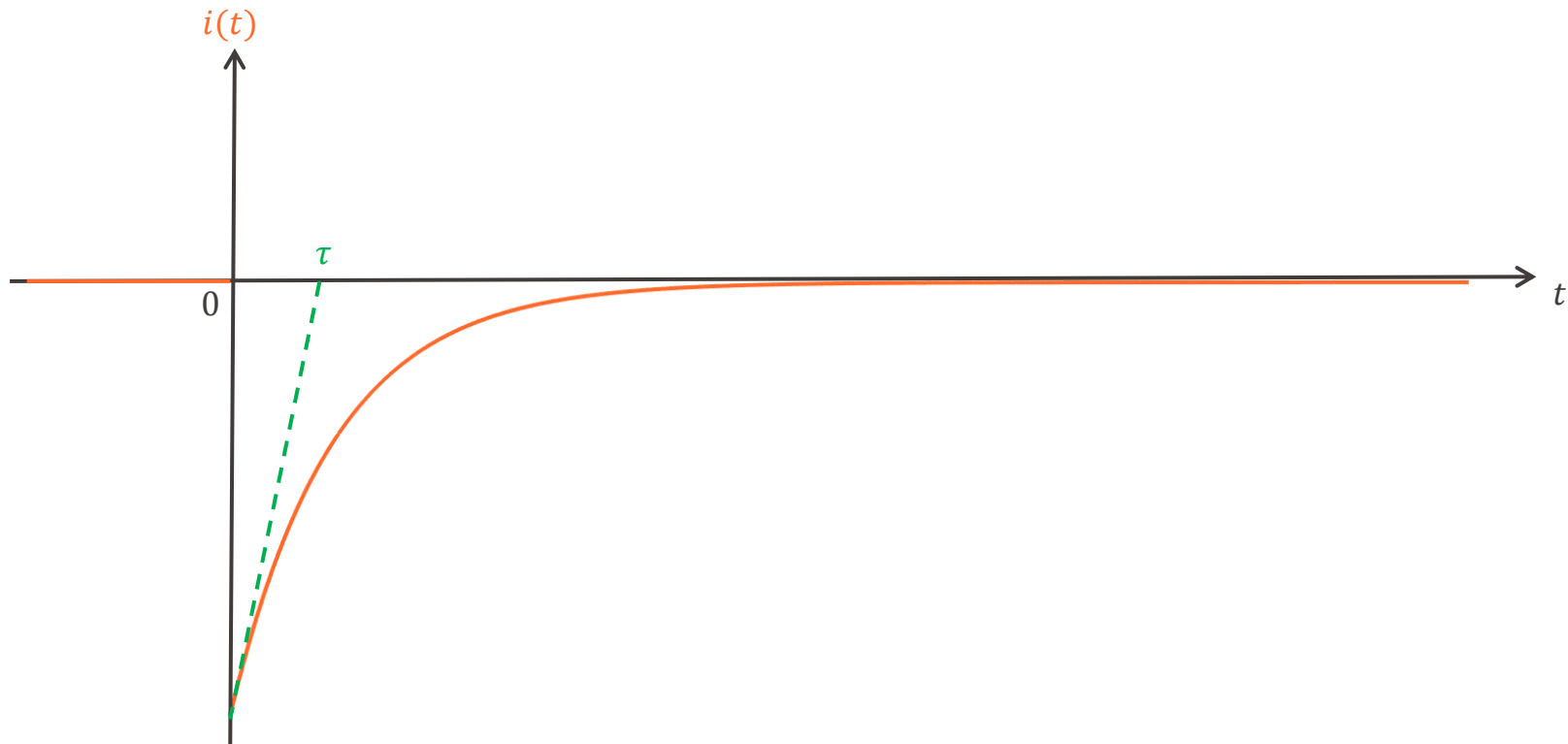
Circuit RC – décharge du condensateur

$$u_c(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

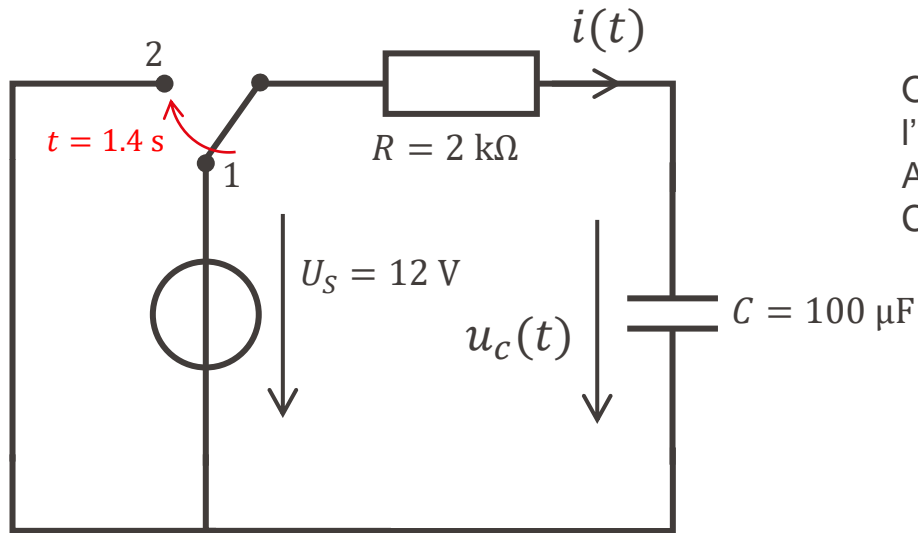


Circuit RC – décharge du condensateur

$$i(t) = -\frac{CU_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$



Circuit RC – exemple



On considère le condensateur initialement déchargé et l'interrupteur est en position 1.

A $t = 1.4$ s, on bascule l'interrupteur en position 2.

Calculons $u_c(t)$ et $i(t)$

$$u_c(t) = U_s (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = RC = 200 \text{ ms}$$

Circuit RC – exemple

on ferme l'interrupteur (à partir de $t = 1,4 \text{ s}$)



$$t' = t - 1,4 \text{ s}$$

$$u_c(t') = A e^{-t'/\tau}$$

$$t' = 0 \rightarrow u_c = u_c(1,4 \text{ s})$$

$$\tau = 200 \text{ ms} \rightarrow 5\tau = 1 \text{ s} \ll 1,4 \text{ s}$$

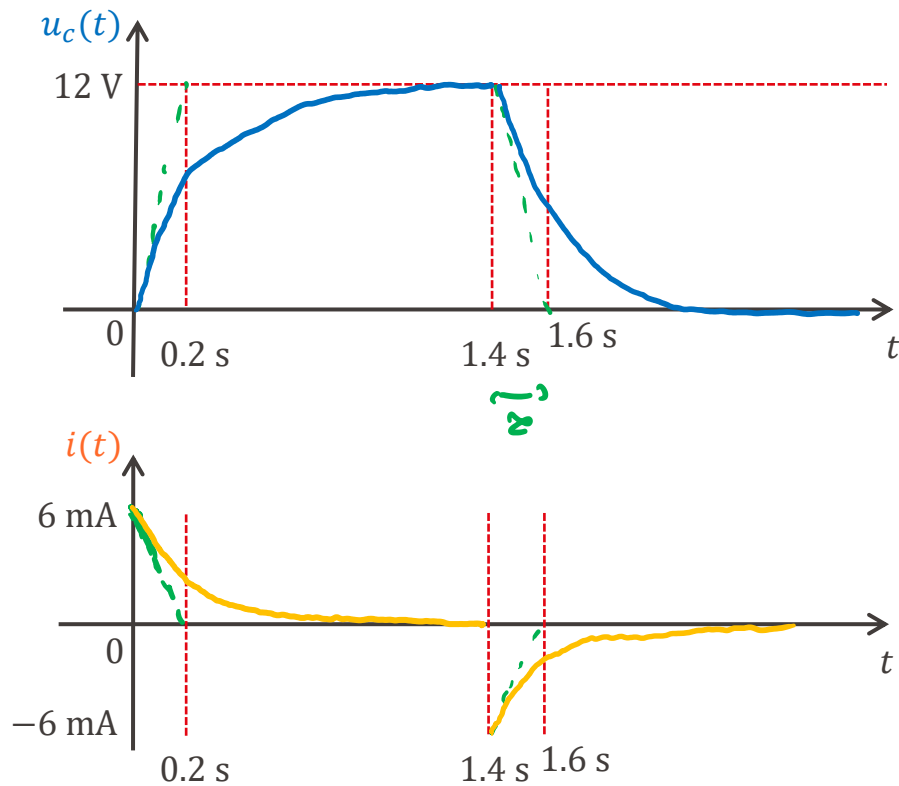
$$\rightarrow u_c(t'=0) = u_c(t=1,4 \text{ s}) \approx U_s$$

$$u_c(t) = U_s e^{-t'/\tau}$$

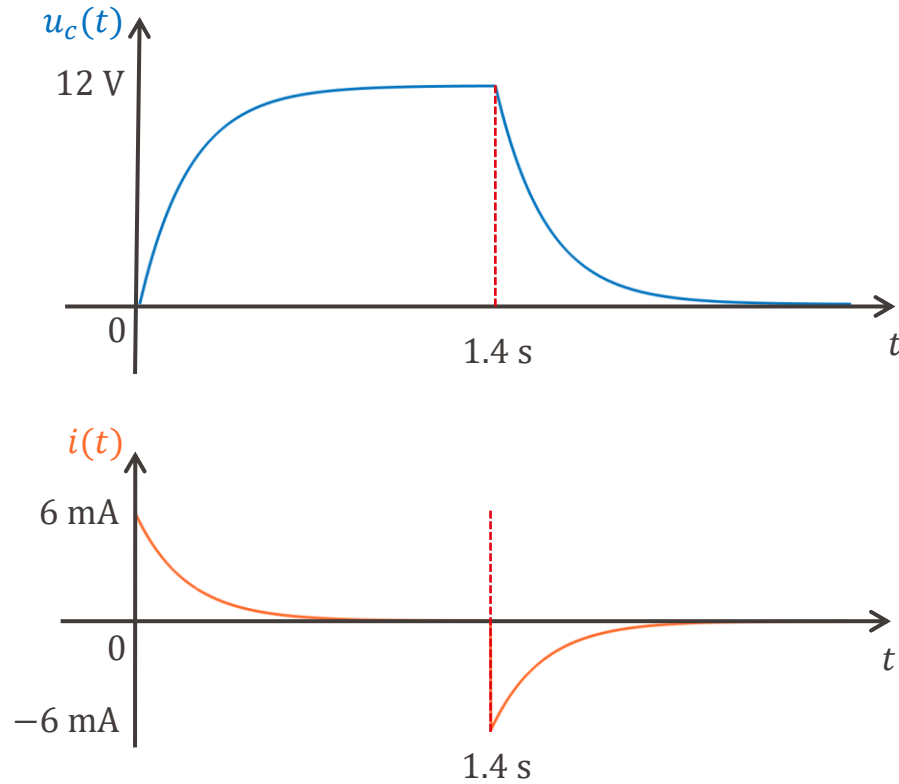
Circuit RC – exemple

Circuit RC – exemple

Circuit RC – exemple



Circuit RC – exemple



- Un condensateur est un dipôle qui accumule de l'énergie électrostatique en condensant des charges proportionnellement à la tension:

$$Q = CU$$

- Le condensateur est caractérisé par sa **capacité**:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

- L'énergie accumulée pour une tension U est:

$$W_c = \frac{1}{2} CU^2$$

- En régime statique, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

Pour aller plus loin

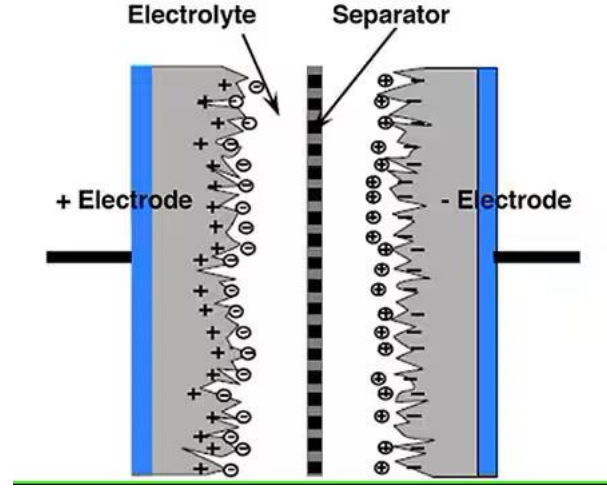


- Aujourd'hui, il existe des condensateurs particuliers utilisés pour des applications nécessitant de fortes densités de puissance et d'énergie
 - Recharge rapide de véhicules électriques
 - Démarrage de moteurs
 - ...

- Il s'agit des supercondensateurs
 - Délivrent plus de courant que les condensateurs conventionnels
 - Plus grande durée de vie que les batteries
 - Charges/décharges rapides comparativement aux batteries

- Ils ont des capacités entre le F et le kF!

Pour aller plus loin





- Utilisés pour des recharges rapides
 - Exemple: système de recharge rapide pour bus électriques TOSA à Genève



Pour aller plus loin



- Utilisés pour récupérer de l'énergie lors de freinages
 - Exemple: système de récupération pour fonctions « start & stop » (i-ELOOP Mazda)
 - Exemple: alimentation ponctuelle d'excavatrice (6120B H FS Cat)

■ i-ELOOP System Components

