



R. Dufy - Musée d'art moderne, Paris

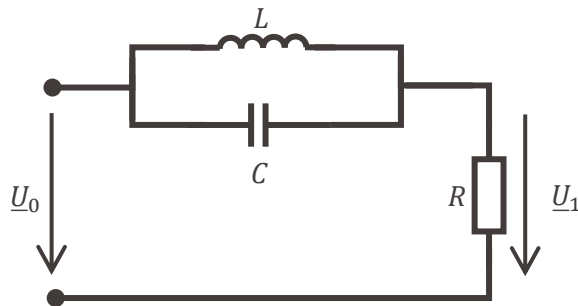
Cours 11: Diagramme de Bode, puissance

EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité
Automne 2025

Rappels



- Les grandeurs dans le circuit dépendent de la fréquence



$$\underline{U}_1 = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R + jL\omega - RLC\omega^2} \underline{U}_0$$

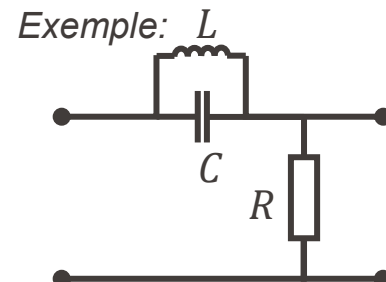
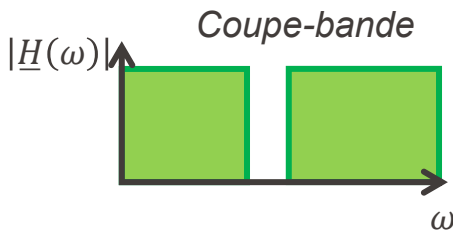
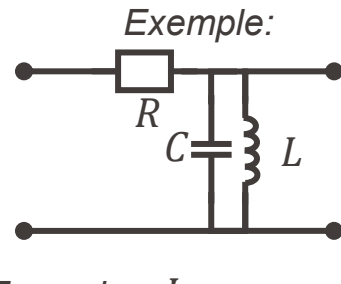
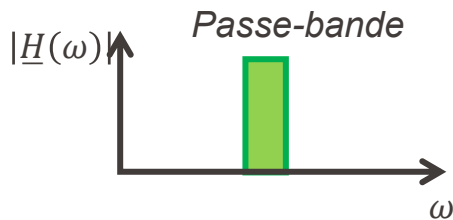
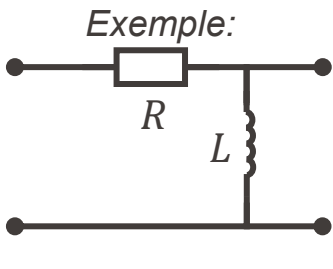
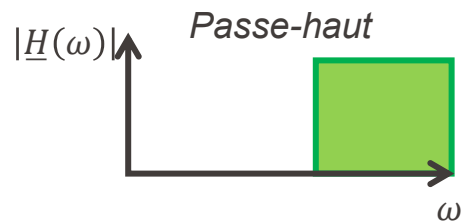
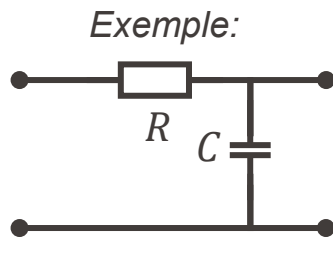
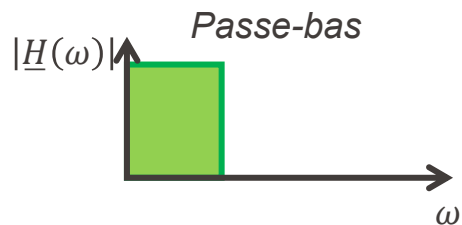
- Cette propriété est utilisée pour réaliser des filtres
 - Systèmes qui permettent de sélectionner/rejeter des signaux en fonction de leur fréquence

- L'étude des filtres consiste en:
 - Définir sa fonction de transfert

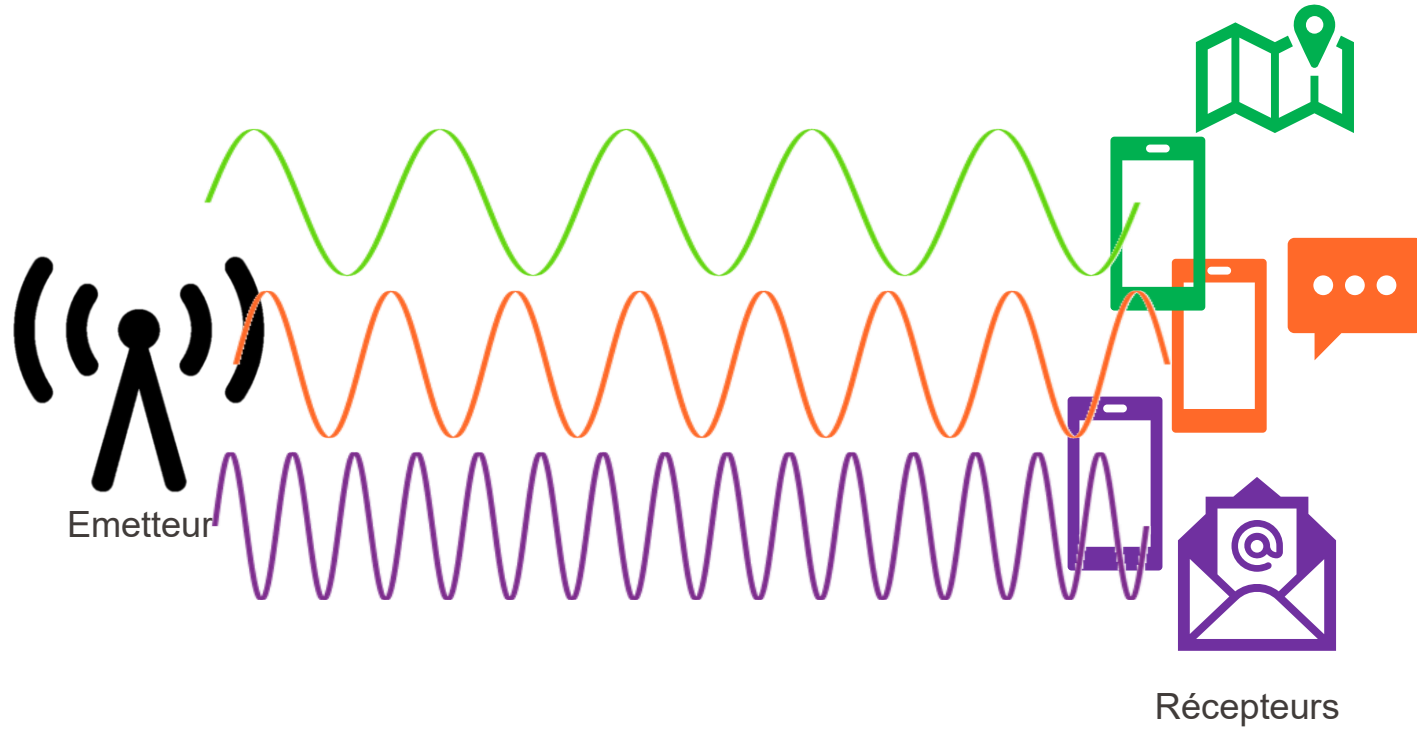
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{sortie}}(\omega)}{\underline{U}_{\text{entrée}}(\omega)}$$

- Etudier et tracer l'évolution de $|\underline{H}(\omega)|$ et $\arg(\underline{H}(\omega))$ en fonction de la fréquence du signal d'entrée

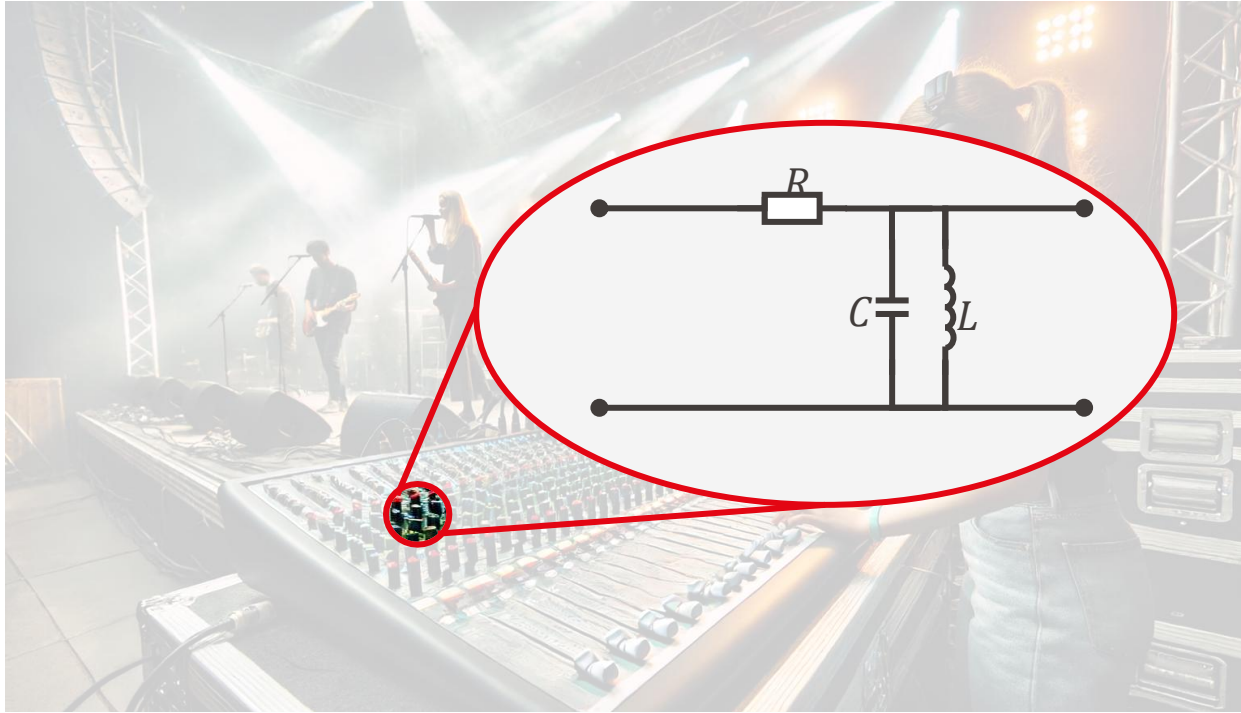
- On a vu 4 familles de filtres:

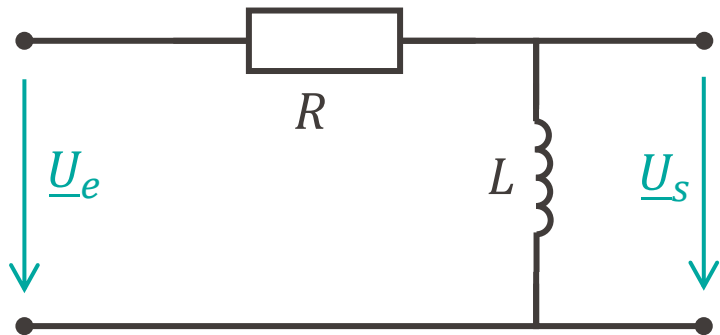


Exemple: communications



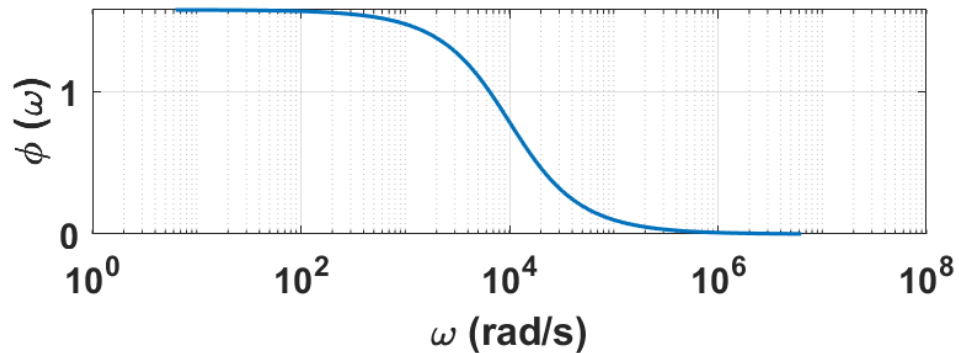
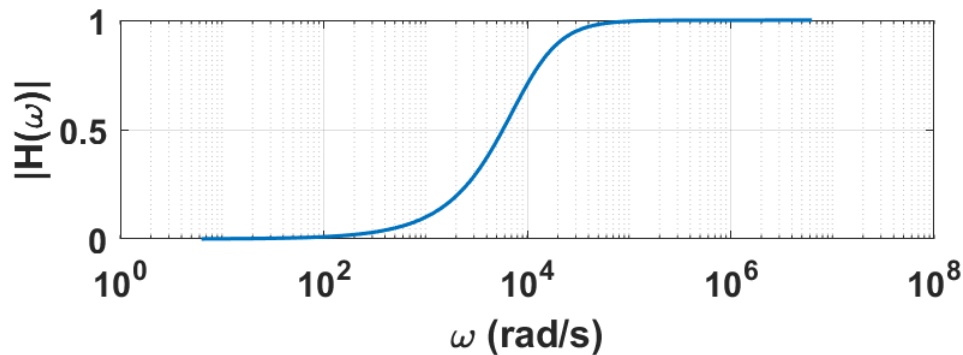
Exemple: ingénierie du son





$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$L = 100 \text{ mH}$$



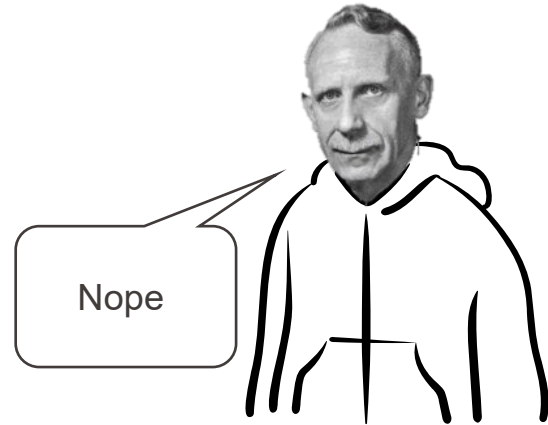
$$\underline{H}(\omega) = \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 + j \frac{L}{R} \omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = \frac{\frac{L}{R} \omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R} \omega\right)^2}} \\ \phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L}{R} \omega\right) \end{cases}$$

Diagramme de Bode

$$\underline{H}(\omega) = \frac{0.56(1 + j723\omega)^2(52.7 + j63\omega)(13 + j563\omega)}{(1 + j85.5\omega)(-78.6 - j41\omega)(j\omega)^4}$$



Tu veux bien tracer $|\underline{H}(\omega)|$?



Nope

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées
- Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système
 - Il permet une résolution graphique simplifiée
 - Il sert à visualiser rapidement le gain et la phase en fonction de la fréquence
 - Il se trace en échelle logarithmique



Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Il est plus aisé et rapide d'étudier les fonctions de transfert en échelle logarithmique
 - On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)

 - Il est défini sur le gain: $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|\underline{H}(\omega)|)$



Diagramme de Bode – Tracé en échelle logarithmique

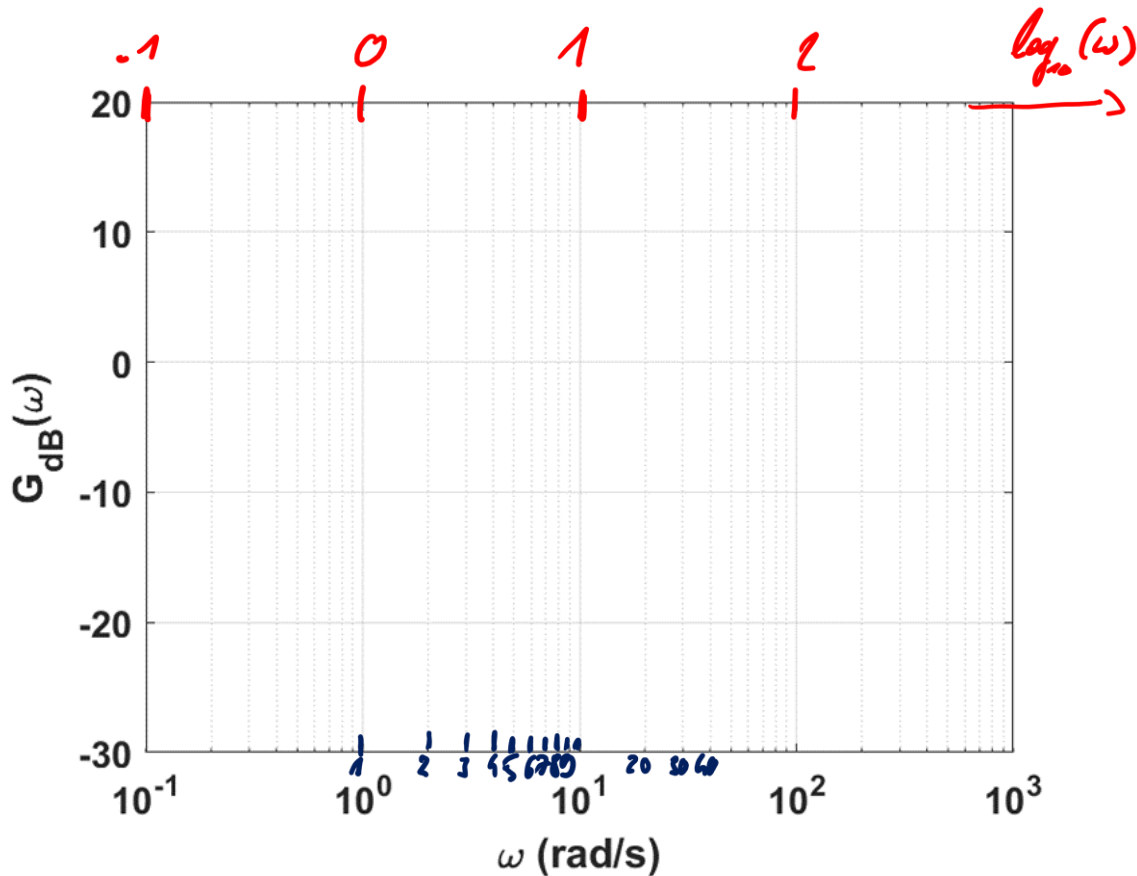


Diagramme de Bode - Exemple

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

Diagramme réel

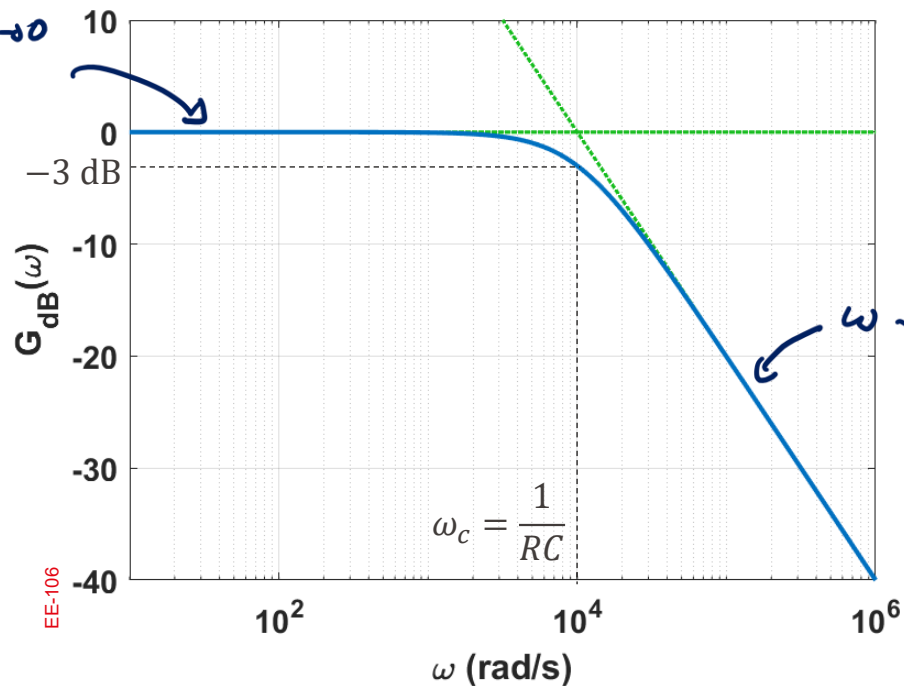
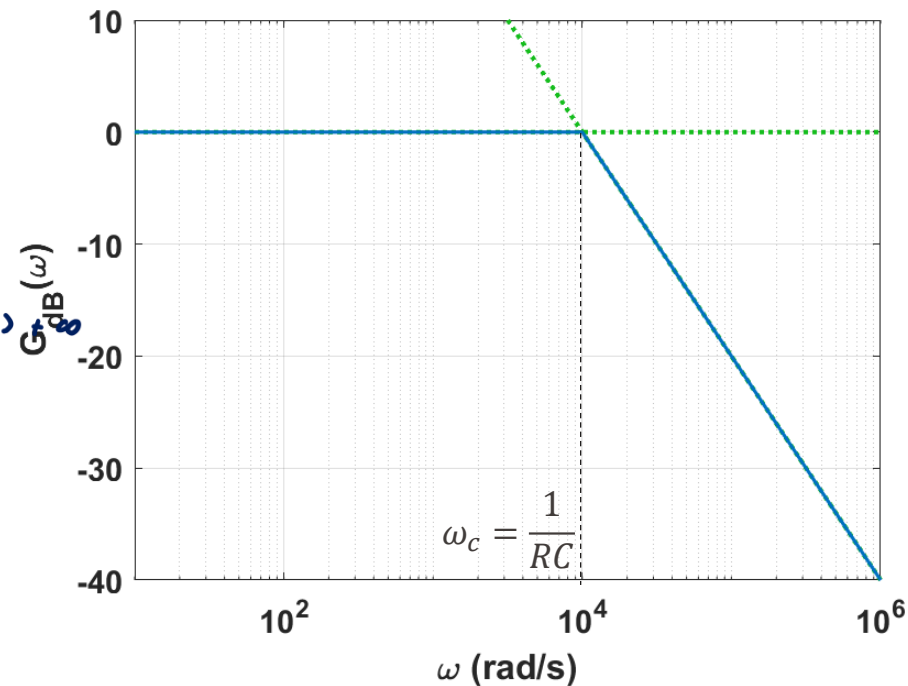


Diagramme asymptotique



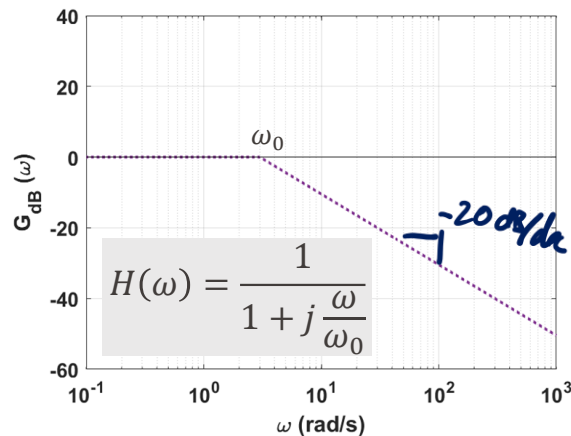
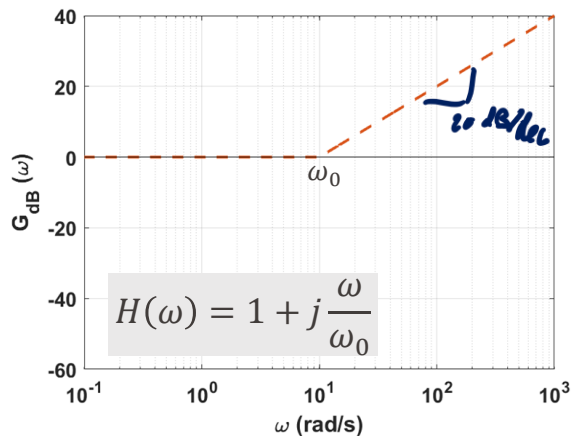
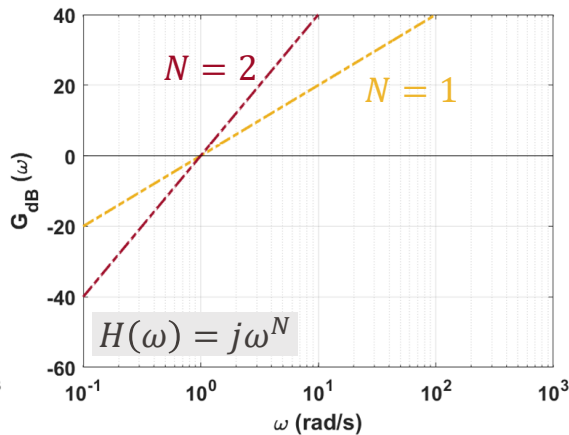
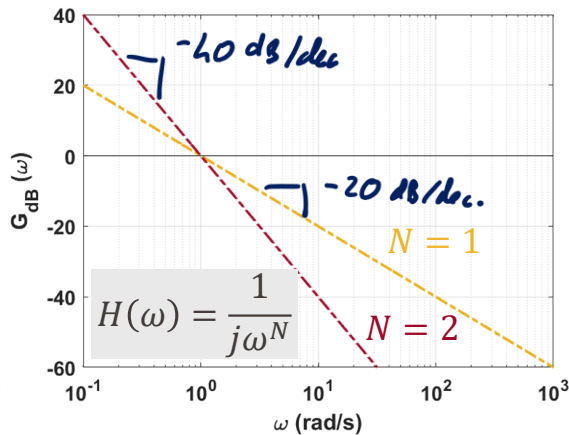
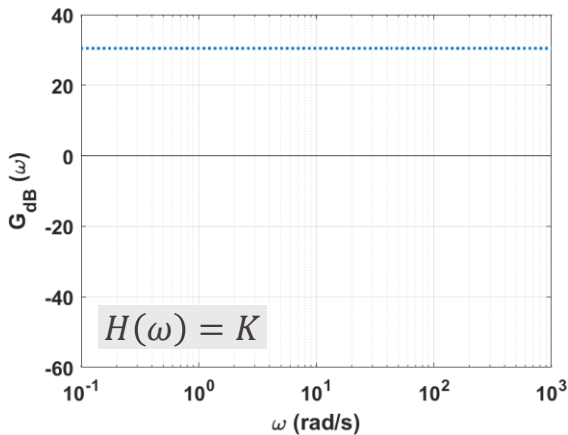
- On s'intéresse ici aux fonctions de transfert de la forme:

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n}\right)}{(j\omega)^N \left(1 + j \frac{\omega}{\omega'_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega'_2}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega'_n}\right)}$$

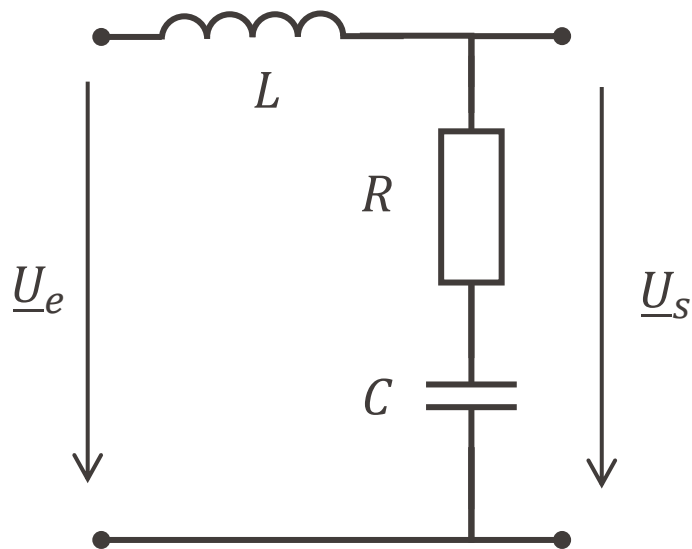
- Pour tracer le gain de ces fonctions, il suffit de connaître quelques formes simples:

$$K ; \frac{1}{(j\omega)^N} ; \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right) ; \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Diagramme de Bode – Constante K



Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$\begin{aligned} R &= 10 \Omega \\ C &= 100 \text{ mF} \\ L &= 200 \text{ mH} \end{aligned}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega - 0.02\omega^2}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{1}}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

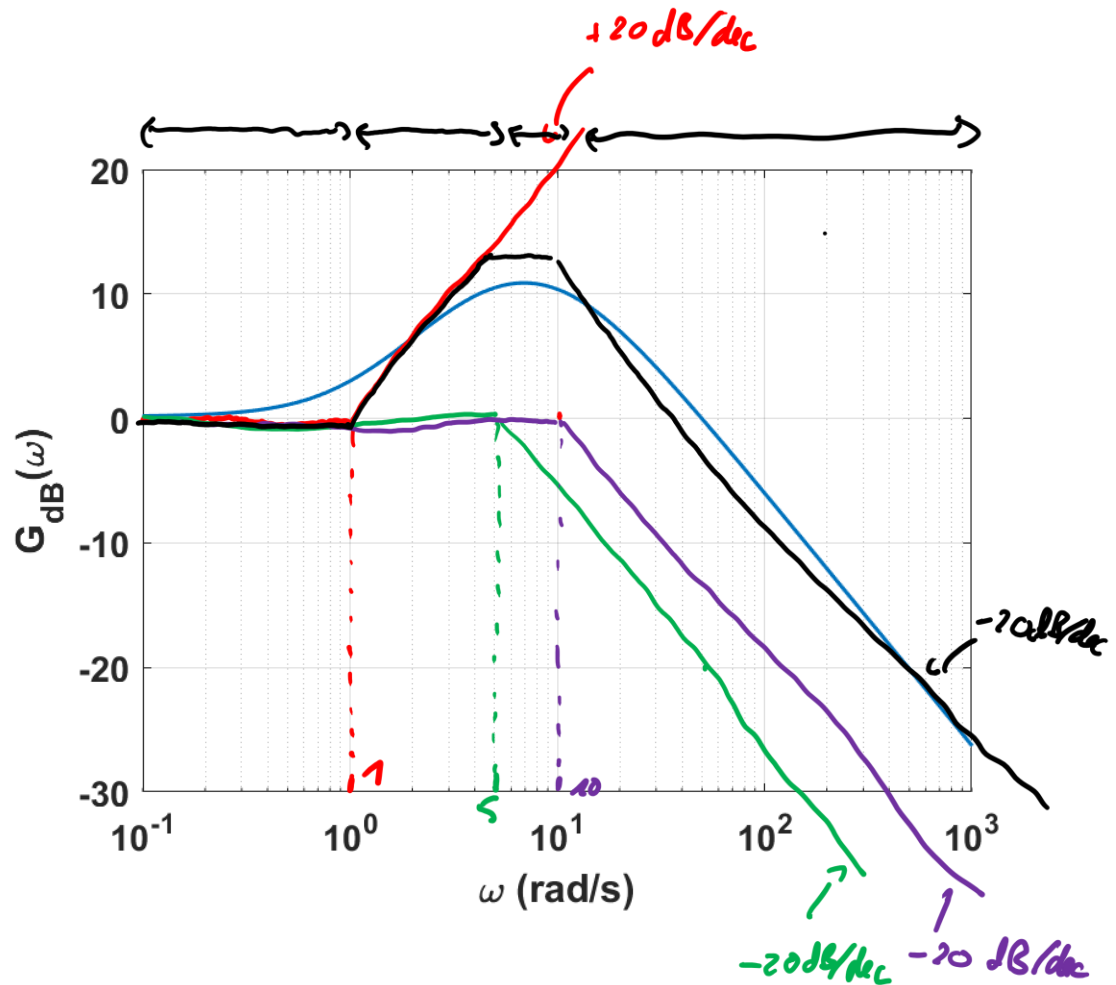
$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log_{10} \left(\left| 1 + j\frac{\omega}{1} \right| \right) \\ &\quad + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j\frac{\omega}{5} \right|} \right) \\ &\quad + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j\frac{\omega}{10} \right|} \right) \end{aligned}$$

Exemple

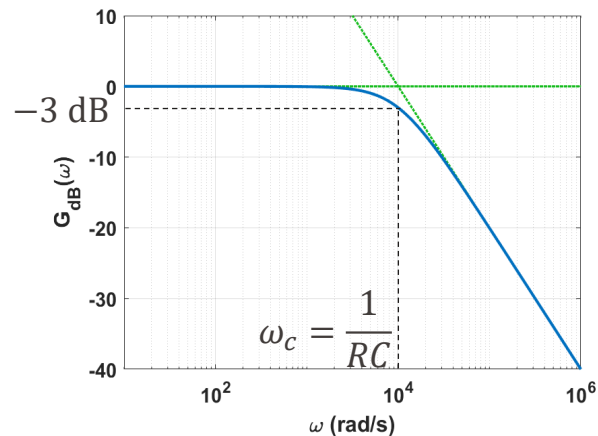
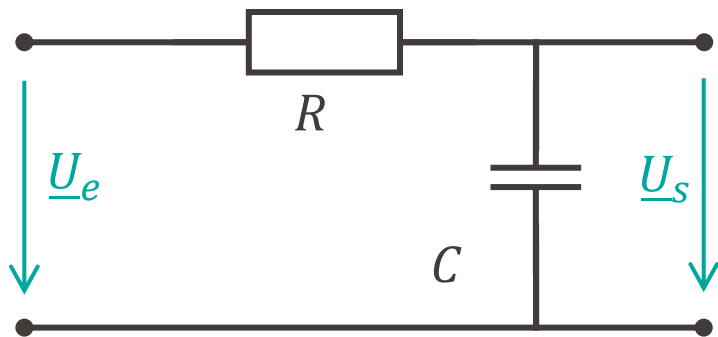
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left(\left| 1 + j \frac{\omega}{1} \right| \right) \quad \text{✗}$$

$$+ 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{5} \right|} \right) \quad \text{✗}$$

$$+ 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|} \right) \quad \text{✗}$$

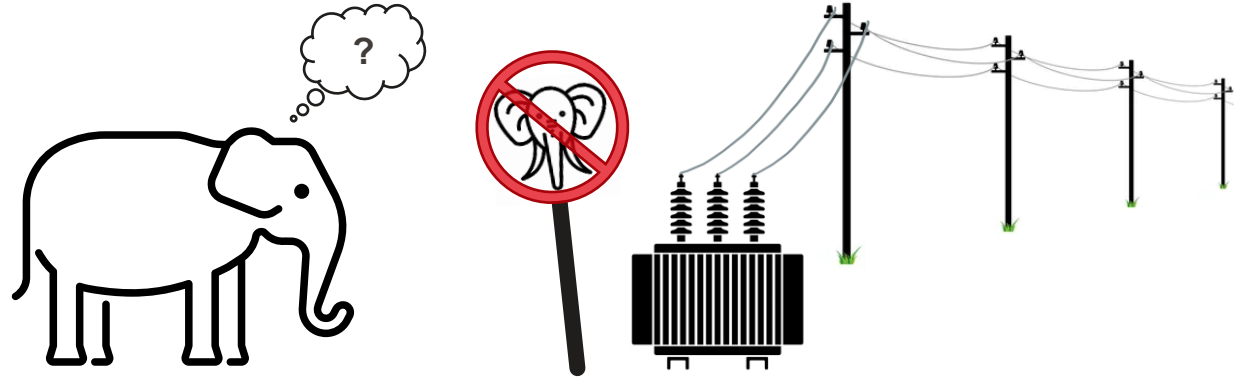


- Le diagramme de Bode est un outil graphique pour étudier un système en régime permanent sinusoïdal
 - On trace le gain et la phase en échelle logarithmique
- On peut facilement tracer un diagramme asymptotique
 - Uniquement en traçant des droites
- On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)



Puissance en régime permanent sinusoïdal

■ EE-106



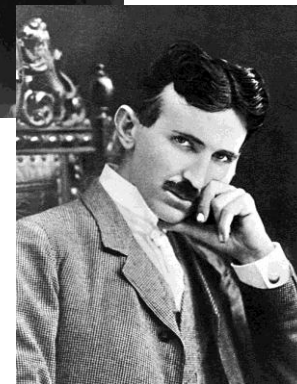
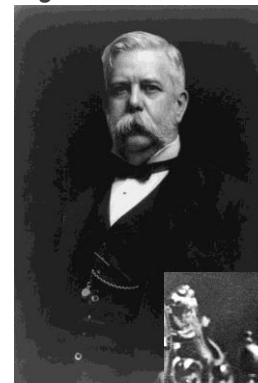


Thomas Edison
1847-1931
Ingénieur américain

**Distribution d'électricité
continue (DC)**

VS

George Westinghouse
1846-1914
Ingénieur américain



**Distribution d'électricité
alternative (AC)**

Nikola Tesla
1856-1943
Ingénieur américain

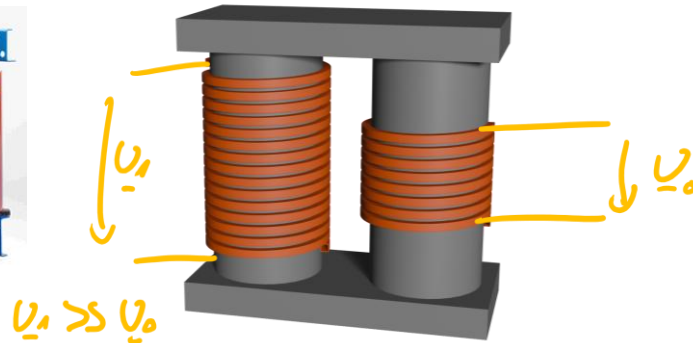
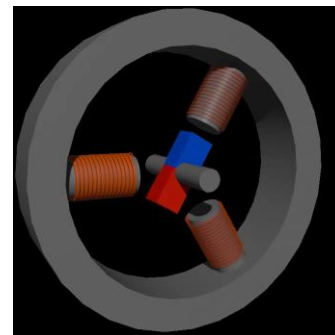
Distribution d'électricité alternative (AC)

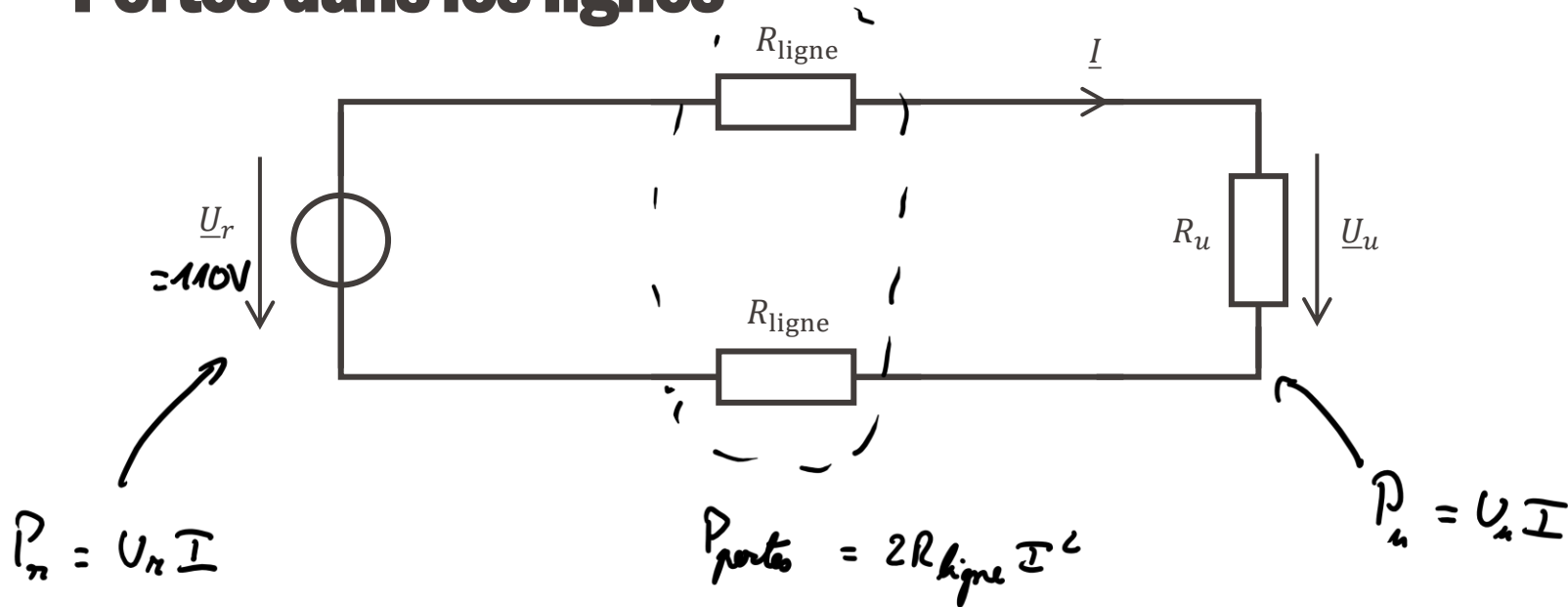
Basée sur les brevets de Tesla
et Westinghouse:

Machines électriques alternatives
(machine synchrone)
→ Production de courant
alternatif fiable



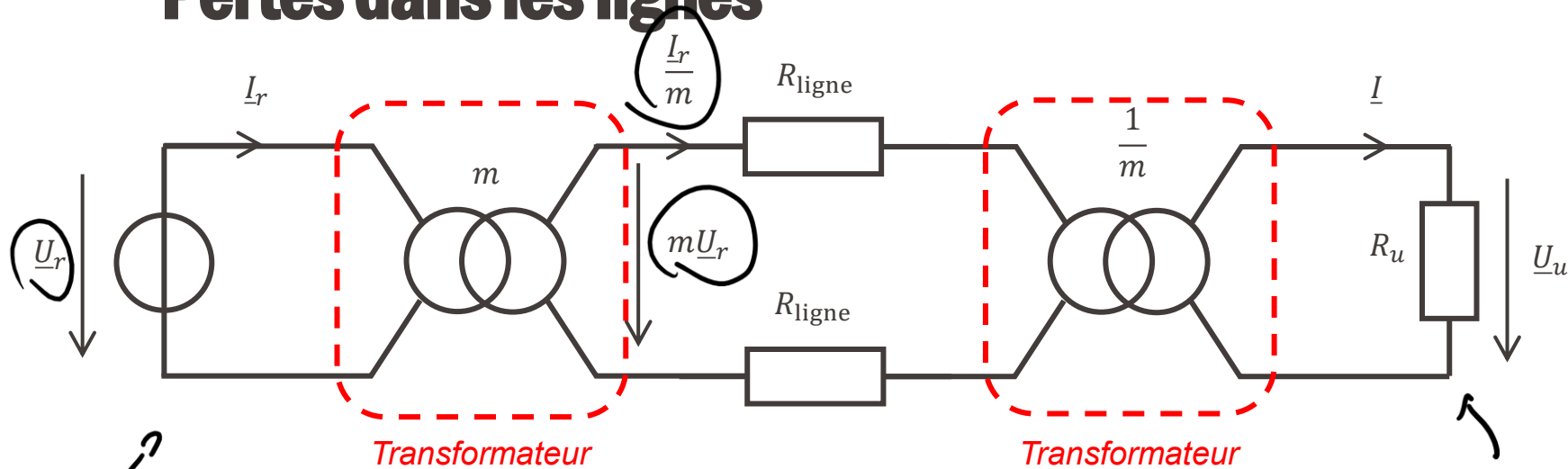
Transformateurs électriques
→ Transport plus efficace (haute
tension, faible courant)





$$P_u = P_r - P_{perdes}$$

$$\begin{array}{l}
 R_{ligne} = 25 \Omega \\
 R_u = 5 \Omega
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 I = 2 \text{ A} \\
 : P_{perdes} = 200 \text{ W} \\
 P_u = 20 \text{ W}
 \end{array}
 \right.$$



$$P_r = U_r I_r$$

$$P_{\text{pertes}} = 2R_{\text{ligne}} \left(\frac{I_r}{m} \right)^2 \quad \text{et } I_r = I$$

$$= \frac{2R_{\text{ligne}} I^2}{m^2}$$

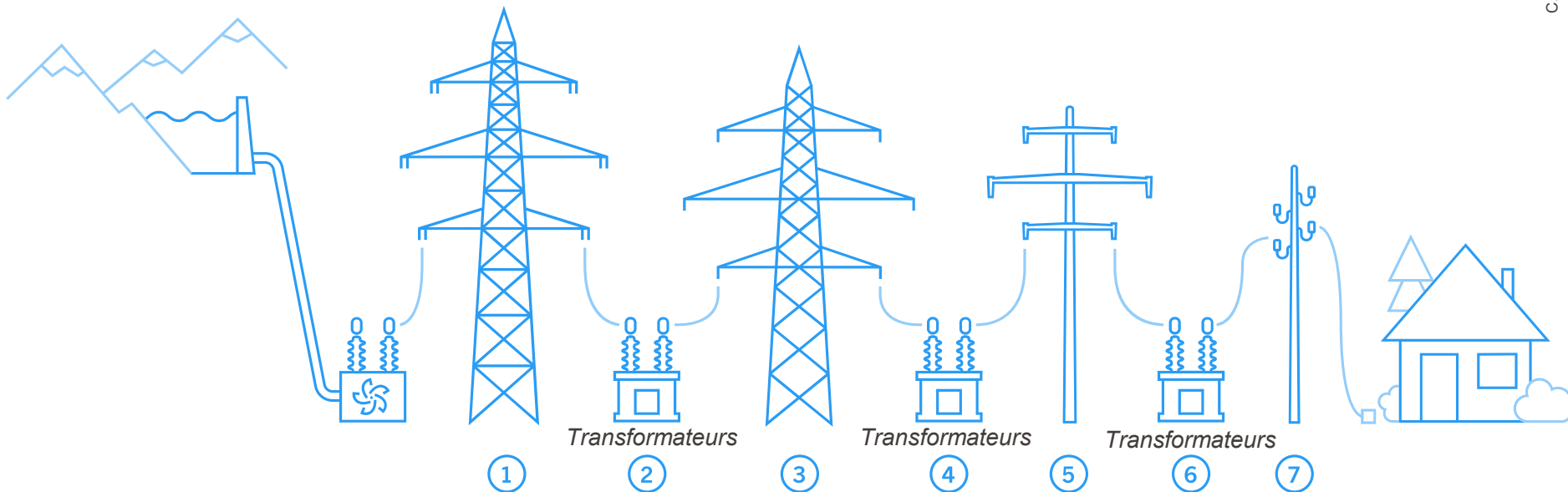
$$P_u = U_u I$$

$$R_{\text{ligne}} = 25 \Omega$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$$m = 100$$

$$\Rightarrow P_{\text{pertes}} = \frac{200}{100^2} = \frac{200}{10000} \text{ W}$$



1) Réseau très haute tension

Transport de l'électricité depuis les grandes centrales et l'étranger

Tension: 380/220 kV

3) Réseau haute tension

Transport de l'électricité suprarégional

Tension: de 36 kV à 220 kV

5) Réseau moyenne tension

Transport de l'électricité régional

Tension: de 1 kV à 36 kV

7) Réseau basse tension

Acheminement domestique

Tension: 220/400 V

- Les transformateurs permettent d'augmenter la tension et de réduire le courant
 - Moins de pertes dans les lignes sur les longues distances!

- Les transformateurs fonctionnent **uniquement en régime alternatif (AC)**

- Mais les hautes tensions sont effectivement dangereuses
 - Solutions: mettre les lignes hors de portée (sous terre par exemple)

1903: exécution publique de Topsy l'éléphant par la Edison electric illumination company de Brooklyn...

1880: invention de la chaise électrique à la demande de Thomas Edison...

Pourquoi?

Pour discréditer Tesla et Westinghouse et protéger les entreprises de courant DC



Puissance instantanée

- En régime statique, on a vu: $|P = UI|$
- On définit la puissance instantanée: $p(t) = u(t)i(t)$
- Avec $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \alpha)$ et $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$:

$$p(t) = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$$

$$\begin{cases} \hat{U} = \sqrt{2}U \\ \hat{I} = \sqrt{2}I \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} = \frac{2UI}{2} = UI$$

$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

val.
efficace

Constante

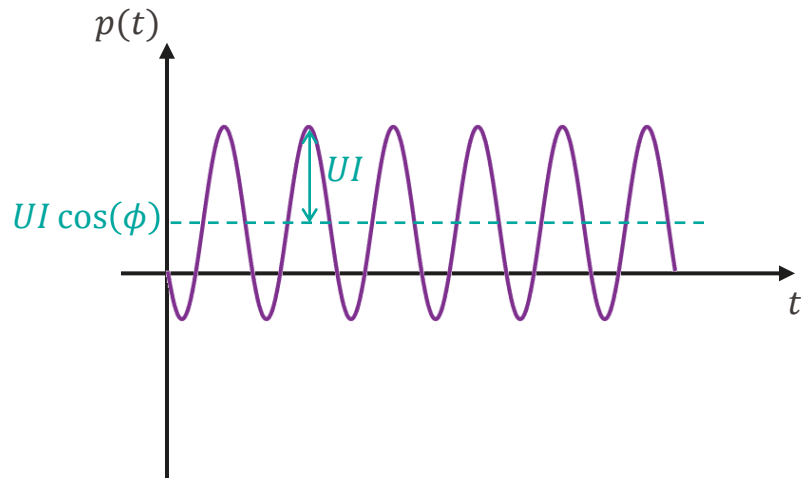
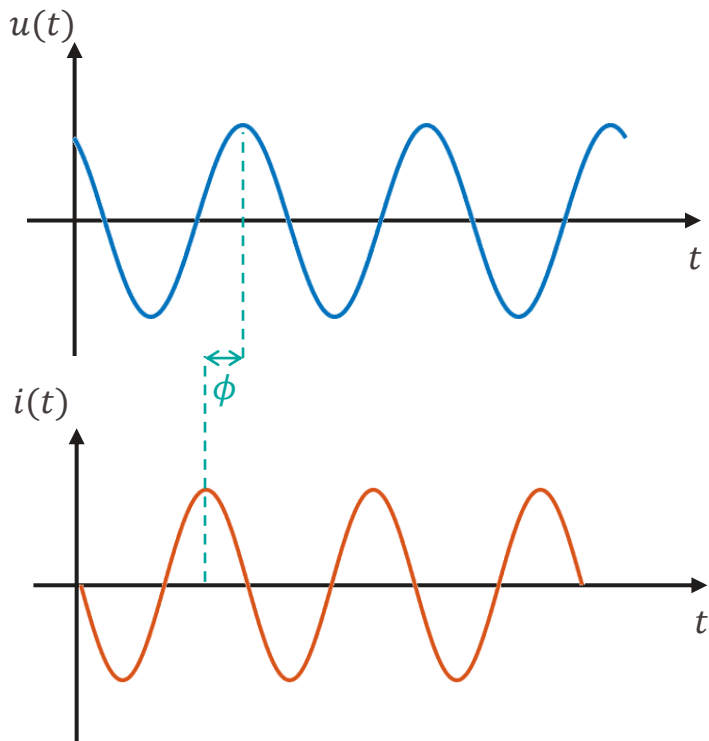
Sinusoïde de fréquence 2ω

phase

$$p(t) = UI \cos(\phi) + UI \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$

$$| \phi = \alpha - \beta$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$



Puissance instantanée

- La puissance moyenne dépend du déphasage
- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI

- La puissance moyenne dépend du déphasage
- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI
- On peut décomposer la puissance instantanée en deux parties:
 - Une partie toujours positive (puissance consommée)
 - Une partie alternative (à valeur moyenne nulle)

$$p(t) = UI \cos(\phi) + UI \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$

$$\Leftrightarrow p(t) = UI \cos(\phi) + UI [\cos(2\omega t + 2\alpha) \cos(\phi) + \sin(2\omega t + 2\alpha) \sin(\phi)]$$

$$\Leftrightarrow p(t) = UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

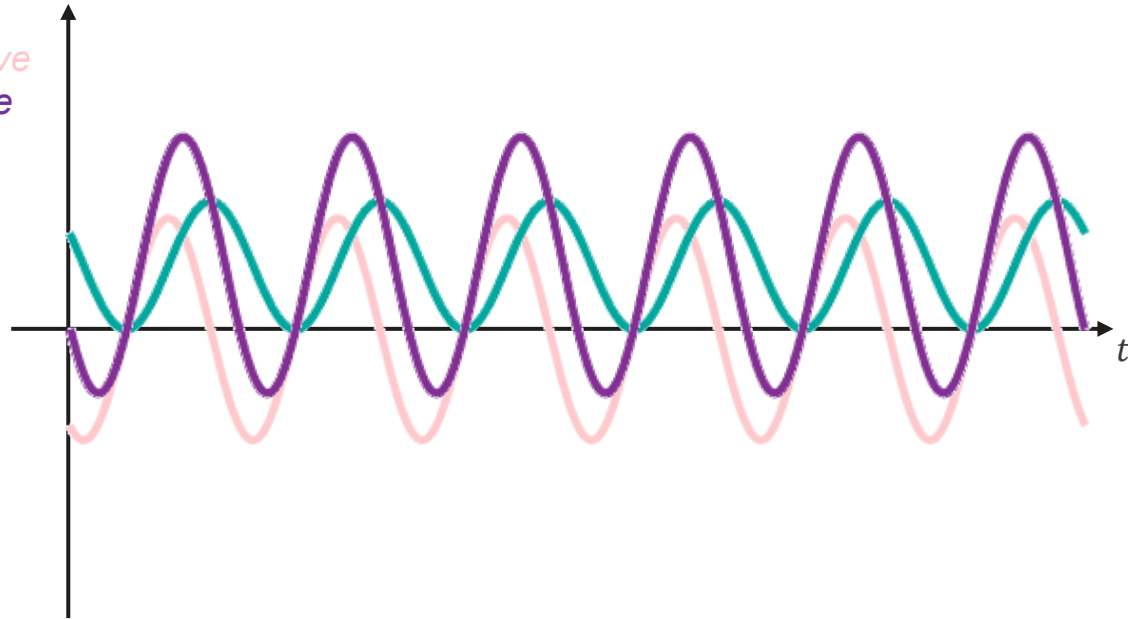
Composante pulsée

Composante alternative

Puissance instantanée

$$p(t) = UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Composante pulsée
Composante alternative
Puissance instantanée



$$p(t) = \underbrace{UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance active P** la valeur moyenne de la puissance instantanée
- En régime sinusoïdal, on a donc:
$$P = UI \cos(\phi)$$
- L'unité est le watt (W)
- Elle correspond à l'énergie convertible en travail ou en chaleur
 - Elle est maximale pour $\phi = 0$
 - Elle est nulle pour $\phi = \pm\pi/2$

Puissance réactive

$$p(t) = UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Composante pulsée
Composante alternative

- On appelle **puissance réactive Q** l'amplitude de composante alternative

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$Q = UI \sin(\phi)$$

[V] [A]

- L'unité est le volt-ampère réactif (VAR)
- Elle correspond une énergie non convertible
 - Elle est maximale pour $\phi = \pm\pi/2$
 - Elle est nulle pour $\phi = 0$

Puissance apparente

$$p(t) = \underbrace{UI \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance apparente** S l'amplitude de des fluctuations de la puissance instantanée par rapport à sa valeur moyenne

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$S = UI$$

- L'unité est le volt-ampère (VA)

$$\left. \begin{array}{l} P = UI \cos(\varphi) \\ Q = UI \sin(\varphi) \end{array} \right\}$$

- Elle est liée à P et Q par:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- On définit la puissance complexe par:

$$\underline{S} = P + jQ$$

- On peut aussi écrire:

$$\underline{S} = UI \cos(\phi) + jUI \sin(\phi) = UI e^{j\phi}$$

- Cette grandeur contient toutes les informations sur la puissance instantanée:
 - $\text{Re}(\underline{S}) = P$; $\text{Im}(\underline{S}) = Q$
 - $|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$
 - $\arg(\underline{S}) = \phi$

* = complexe conjugué

- Enfin, on a aussi:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\alpha} I e^{-j\beta} = UI e^{j(\alpha-\beta)} = UI e^{j\phi}$$

- Pour une impédance \underline{Z} :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

$$\underline{S} = \underline{Z} I^2 = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

- En posant $\underline{Z} = R + jX$:

$$\underline{S} = \overbrace{RI^2}^{\text{effet Joule}} + jXI^2$$



Que vaut la puissance apparente?

$$S = UI = \frac{240}{2}$$

$$u(t) = 20 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

\hat{u} ✓

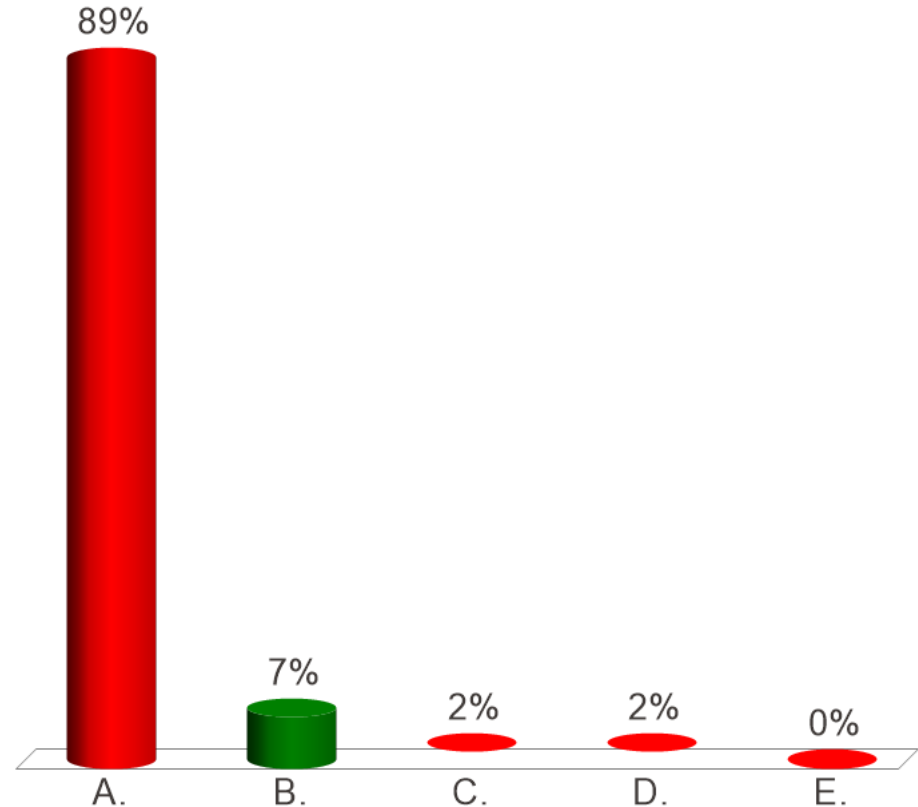
A. $S = 240 \text{ VA}$

✓ B. $S = 120 \text{ VA}$

C. $S = 207.8 \text{ VA}$

D. $S = 103.9 \text{ VA}$

E. $S = 60 \text{ VA}$





Que vaut la puissance active?

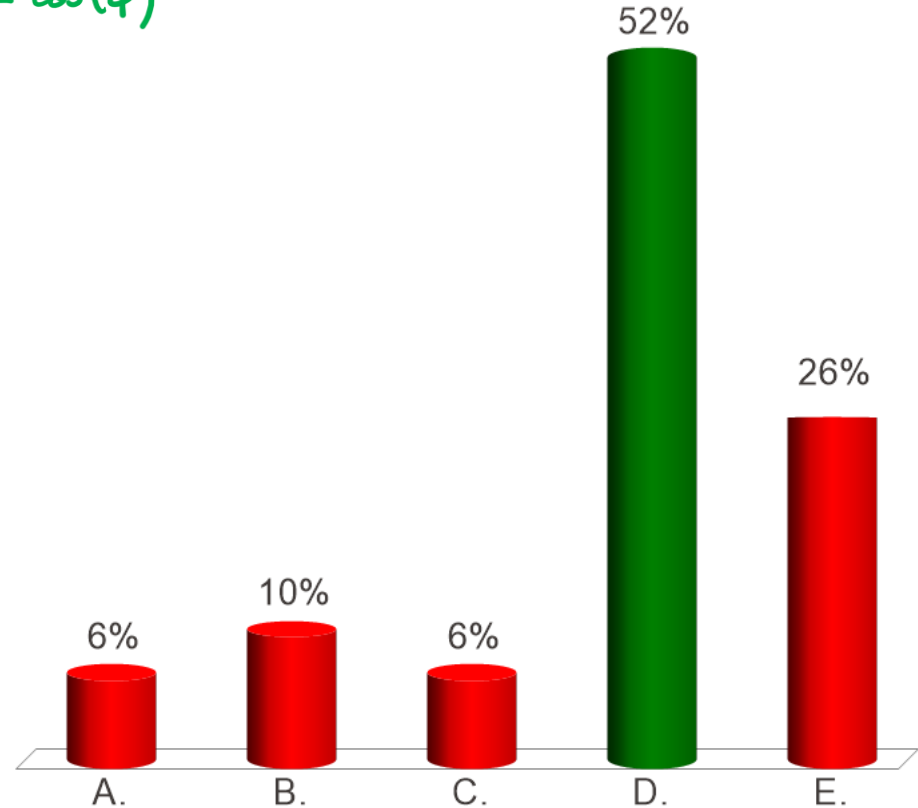
$$u(t) = 20 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P = \overbrace{UI}^{120} \cos(\phi)$$

$$\phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

- A. $P = 240 \text{ W}$
- B. $P = 120 \text{ W}$
- C. $P = 207.8 \text{ W}$
- ✓ D. $P = 103.9 \text{ W}$
- E. $P = 60 \text{ W}$





Que vaut la puissance réactive?

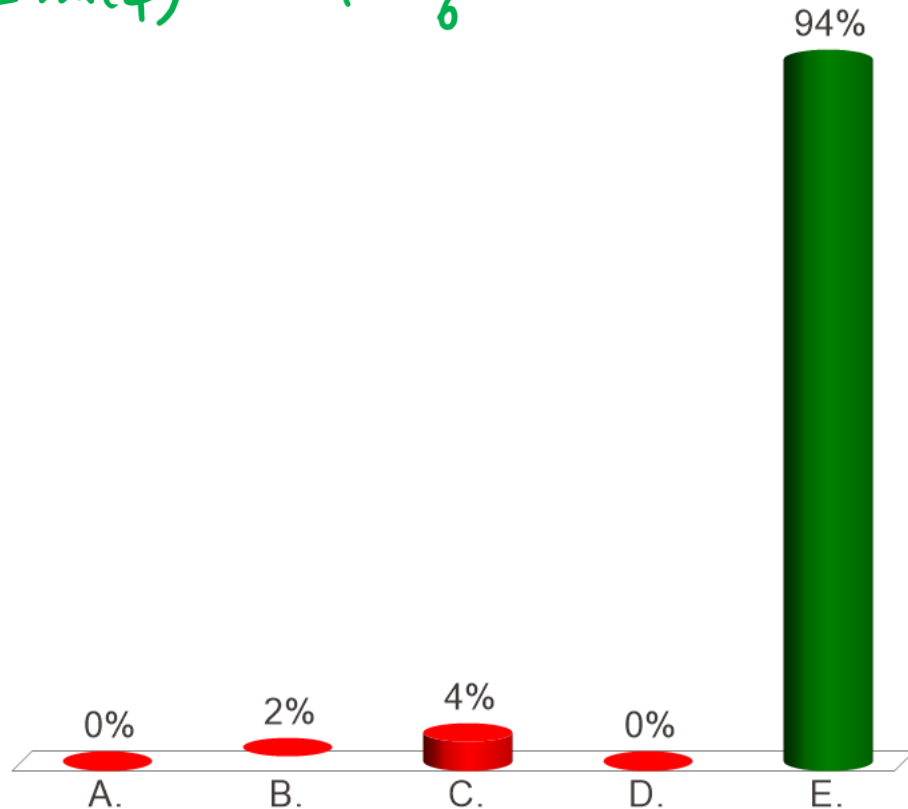
$$u(t) = 20 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12 \cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

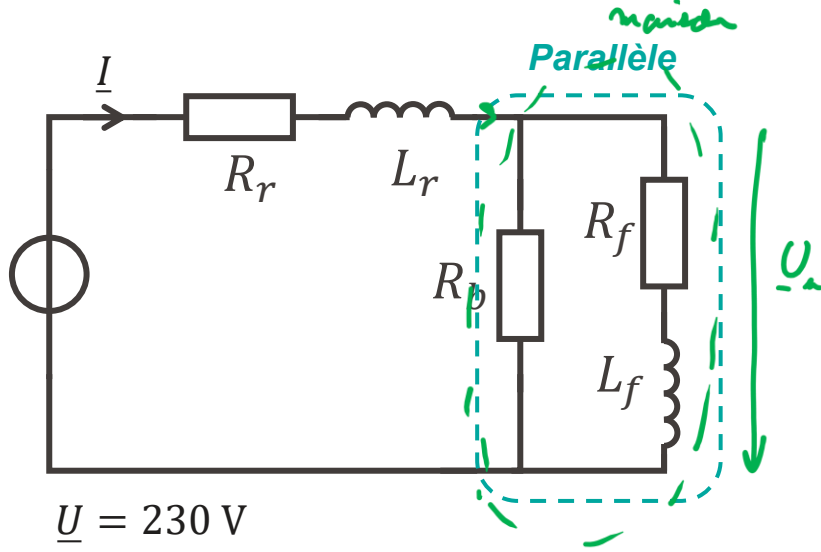
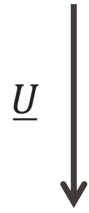
$$Q = \overbrace{UI}^{120} \sin(\phi)$$

$$\phi = \frac{\pi}{6}$$

- A. $Q = 240 \text{ VAr}$
- B. $Q = 120 \text{ VAr}$
- C. $Q = 207.8 \text{ VAr}$
- D. $Q = 103.9 \text{ VAr}$
- ✓ E. $Q = 60 \text{ VAr}$



Exemple



$$\underline{U} = 230 \text{ V}$$

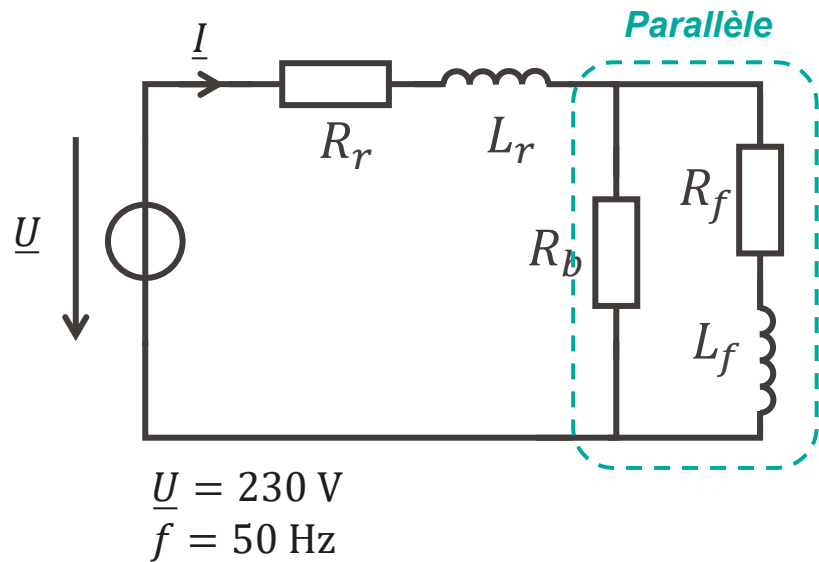
$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\underline{S} = \underline{U}_u \underline{I}^*$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_L (R_f + jL_f \omega)}{R_L + R_f + jL_f \omega}$$

$$\underline{U}_u = \frac{\underline{Z}_p}{\underline{Z}_p + R_r + jL_r \omega} \underline{U}$$

Exemple

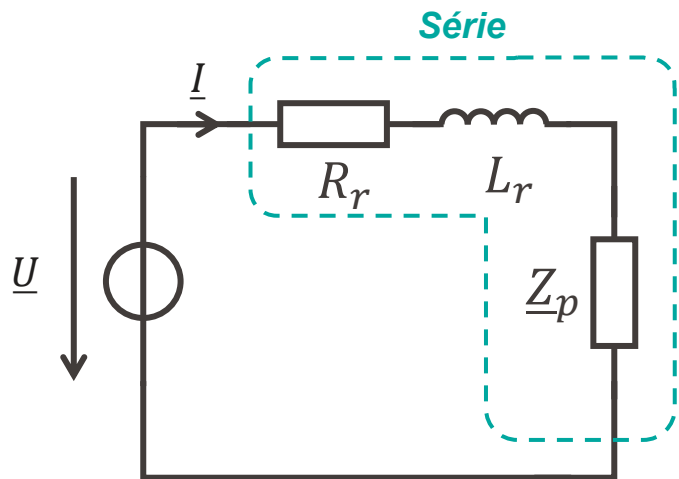


$$\underline{Z}_p = \frac{R_b(R_f + jL_f\omega)}{R_b + R_f + jL_f\omega}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b(R_f + jL_f\omega)(R_b + R_f - jL_f\omega)}{(R_b + R_f)^2 + (L_f\omega)^2}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b [R_f(R_b + R_f) + (L_f\omega)^2] + jR_b^2L_f\omega}{(R_b + R_f)^2 + (L_f\omega)^2}$$

Exemple



$$\underline{U} = 230 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\underline{Z}_S = R_r + jL_r\omega + \underline{Z}_p$$

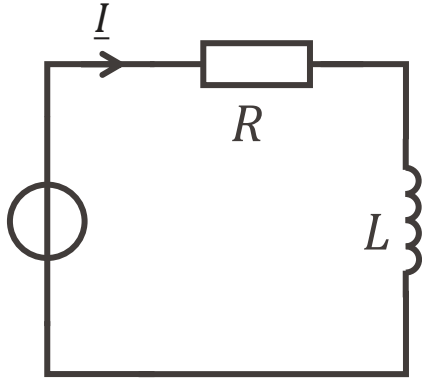
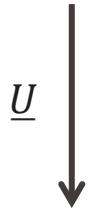
$$\underline{Z}_S = R_r + jL_r\omega + \frac{R_b \left[R_f (R_b + R_f) + (L_f\omega)^2 \right] + jR_b^2 L_f \omega}{(R_b + R_f)^2 + (L_f\omega)^2}$$

$$\underline{Z}_S = R_r + \frac{R_b \left[R_f (R_b + R_f) + (L_f\omega)^2 \right]}{(R_b + R_f)^2 + (L_f\omega)^2} > 0 \Leftrightarrow R_g$$

$$+ j \left(L_r + \frac{R_b^2 L_f \omega}{(R_b + R_f)^2 + (L_f\omega)^2} \right) \omega$$

$$\Leftrightarrow L_g$$

Exemple



$$\underline{U} = 230 \text{ V}$$

$$R = 5 \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

$$= R I^2 + j L \omega I^2$$

$$P = R I^2$$

$$Q = L \omega I^2$$

$$= 7,6 \text{ kW}$$

$$= 4,8 \text{ kVAR}$$

$$S = 9 \text{ kVA} = U I \rightarrow I = 39 \text{ A}$$

$$\text{si } L=0 : S_0 = P = 7,6 \text{ kVA} \rightarrow I = 33 \text{ A}$$

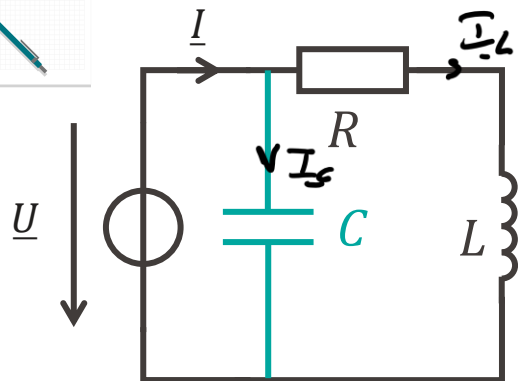
Facteur de puissance

- Le facteur de puissance est le rapport de la puissance active et de la puissance apparente:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

- Pour une charge purement résistive, $\phi = 0$ donc $FP = 1$
- En présence d'une charge réactive, le facteur de puissance diminue
- Cela augmente les pertes au niveau du réseau électrique (et peut alors augmenter les coûts de l'électricité)

Exemple: correction de facteur de puissance



$$\begin{aligned}\underline{U} &= 230 \text{ V} \\ R &= 5 \Omega \\ L &= 10 \text{ mH} \\ f &= 50 \text{ Hz}\end{aligned}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U} (\underline{I}_C^* + \underline{I}_L^*)$$

$$= \underline{U} \underline{I}_L^* + \underline{U} \underline{I}_C^*$$

comme avant

$$= \underline{U} \underline{I}_L^* - jC\omega U^2$$

$$= \underbrace{jL\omega I^2 - jC\omega U^2}_{=0} + R I^2$$

= 0

$$\left. \begin{aligned}\underline{U} &= \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_C \\ \Rightarrow \underline{I}_C &= jC\omega \underline{U}\end{aligned} \right\}$$



Que doit valoir C pour annuler la puissance réactive?

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$U = 230 \text{ V}$$

$$P = 7.59 \text{ kW}$$

$$Q = 4.77 \text{ kVAr}$$

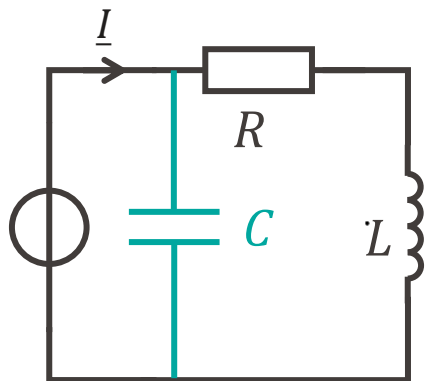
$$S = 8.96 \text{ kVA}$$

- A. $C = 1.8 \text{ mF}$
- B. $C = 287 \text{ }\mu\text{F}$
- C. $C = 3.5 \text{ kF}$
- D. $C = 555 \text{ F}$
- E. $C = 35.3 \text{ mF}$
- F. $C = 222 \text{ mF}$

Exemple: correction de facteur de puissance



\underline{U}



$$\underline{U} = 230 \text{ V}$$

$$R = 5 \text{ } \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_{RL} - jC\omega U^2 = \frac{RU^2}{R^2 + (L\omega)^2} + j\left(\frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2} - C\omega U^2\right)$$

$$Q = 0 \Leftrightarrow C\omega U^2 = \frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{4,8 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 50 \cdot 230^2}$$

$$\Leftrightarrow C \simeq 287 \text{ } \mu\text{F}$$



- En régime permanent sinusoïdal, on définit une puissance complexe:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = P + jQ$$

- P est la puissance active, en W: puissance convertie
 - Q est la puissance réactive, en VAR: puissance alternative
 - $S = |\underline{S}|$ est la puissance apparente, en VA
-
- La qualité d'un système électrique peut être quantifiée par le facteur de puissance:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris



**Merci pour votre
attention**