EPFL


R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 11: Diagramme de Bode, puissance

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2025

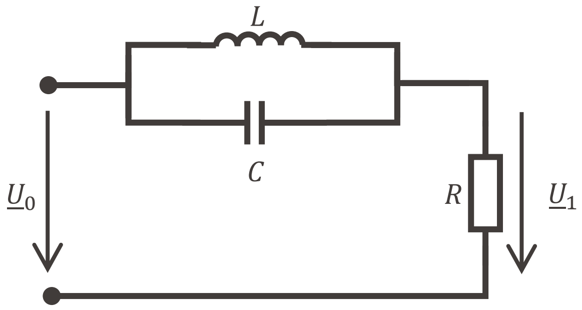
■ Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Rappels

-Rappel- Les filtres

- Les grandeurs dans le circuit dépendent de la fréquence



$$\underline{U}_1 = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R + jL\omega - RLC\omega^2}\underline{U}_0$$

- Cette propriété est utilisée pour réaliser des filtres
  - Systèmes qui permettent de sélectionner/rejeter des signaux en fonction de leur fréquence

-Rappel- Les filtres

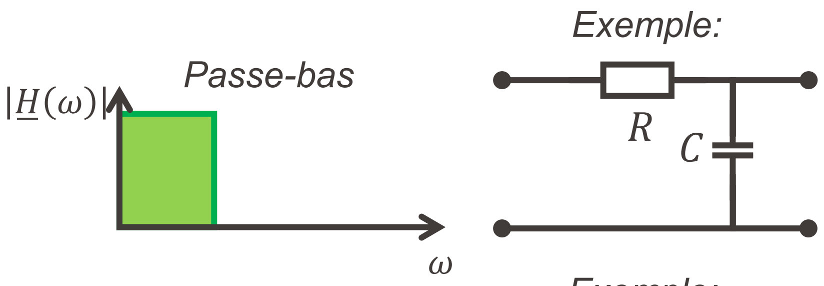
- L'étude des filtres consiste en:
  - Définir sa fonction de transfert

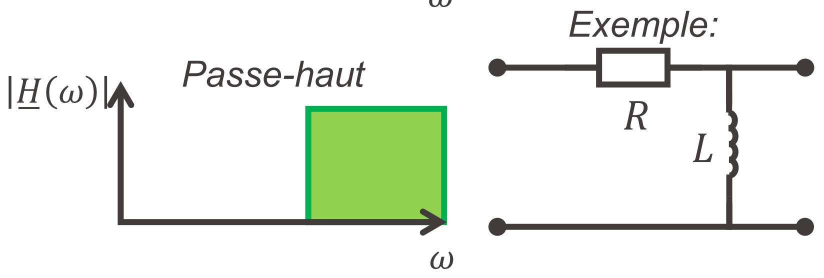
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{sortie}}(\omega)}{\underline{U}_{\text{entrée}}(\omega)}$$

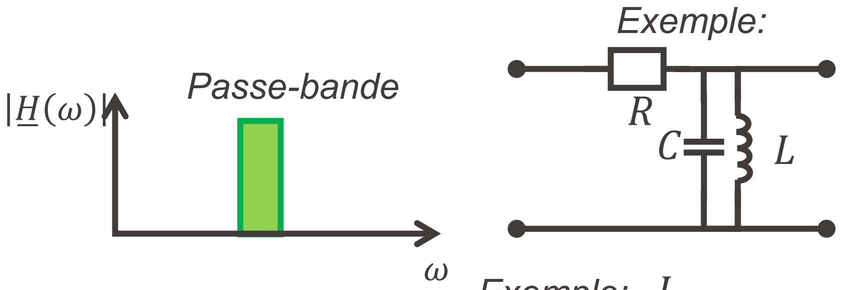
  - Etudier et tracer l'évolution de $|\underline{H}(\omega)|$ et $\arg\left(\underline{H}(\omega)\right)$ en fonction de la fréquence du signal d'entrée

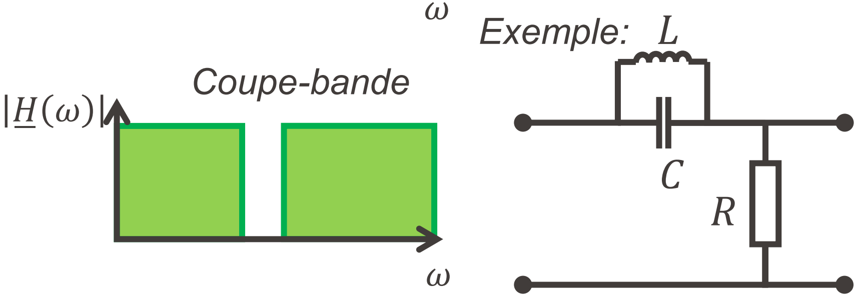
-Rappel- Les filtres

- On a vu 4 familles de filtres:

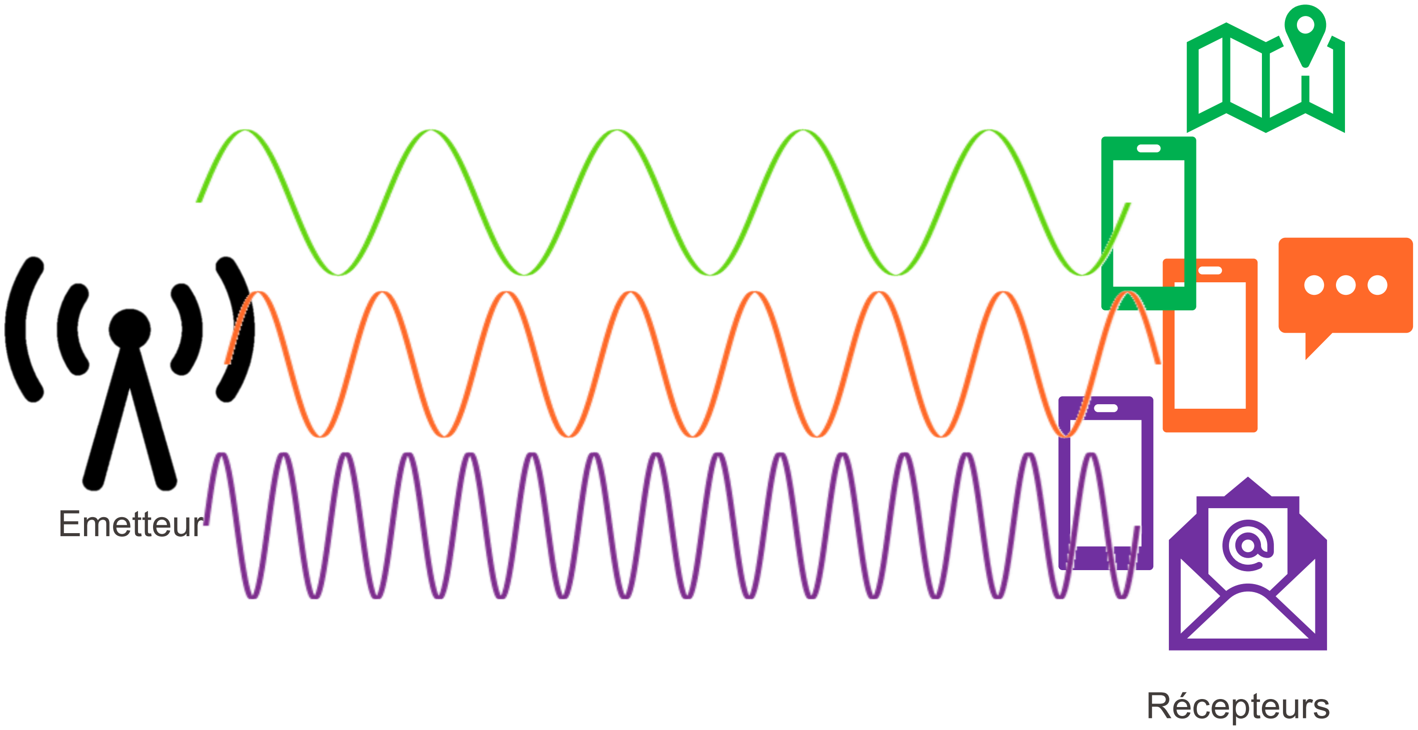




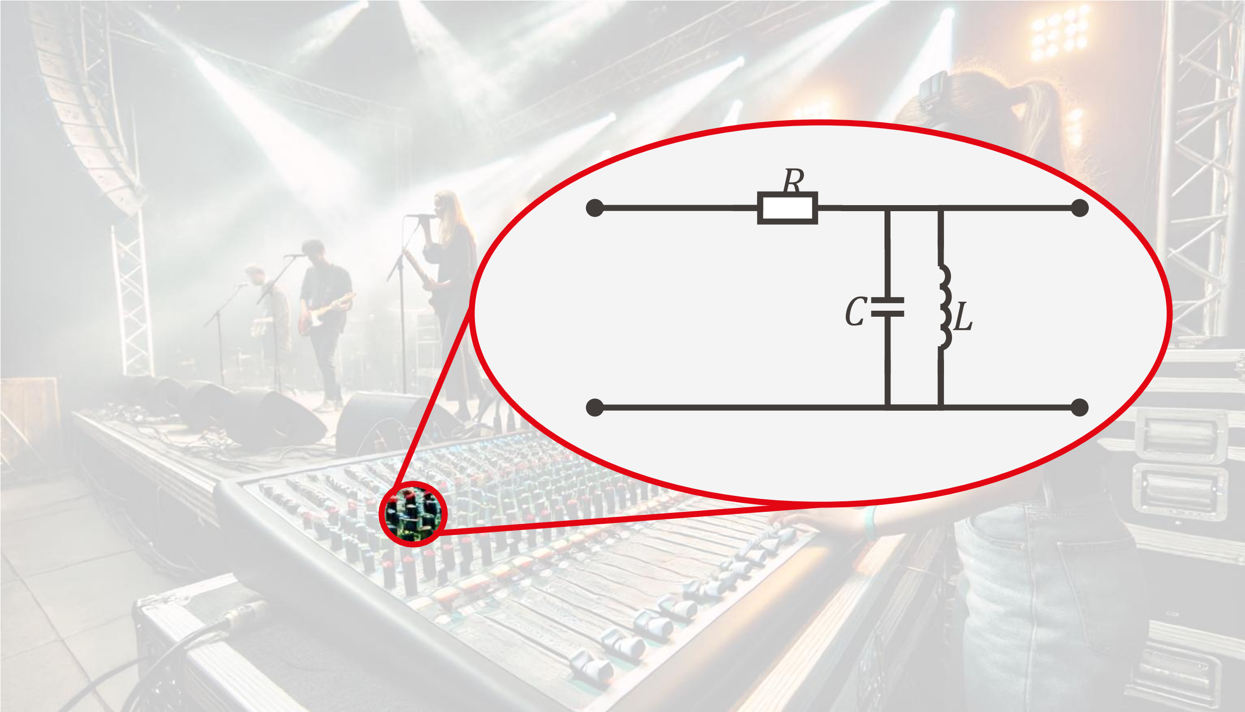




Exemple: communications



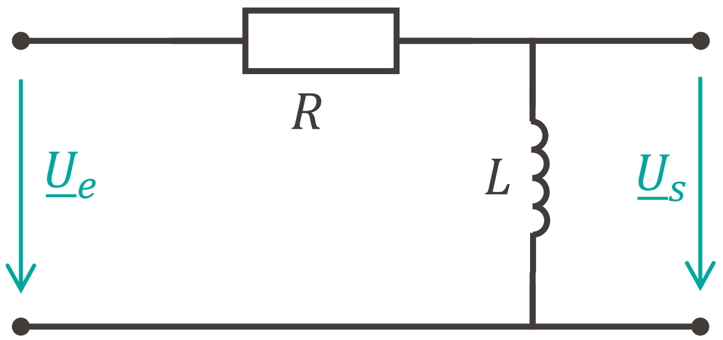
Exemple: ingénierie du son



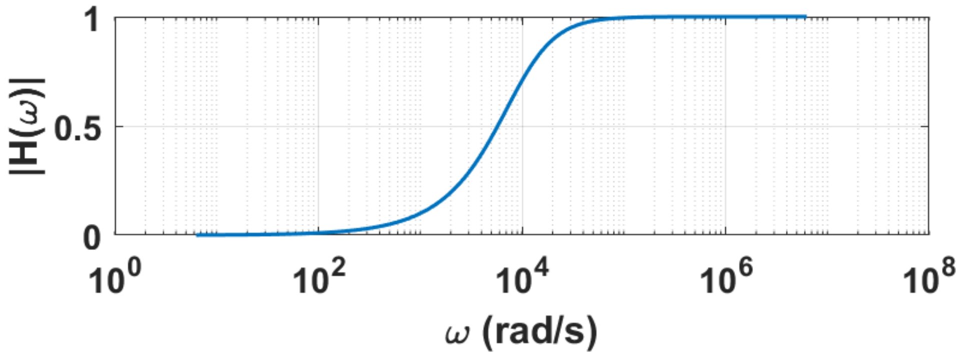
Circuit RL

C. Lafforgue

$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$L = 100\ \mathrm{mH}$



$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{\frac{L}{R}\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} \\ \phi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L}{R}\omega\right) \end{cases}$$



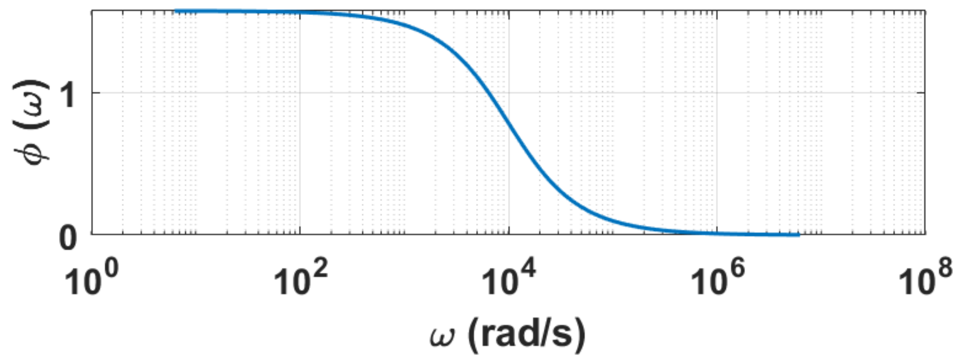


Diagramme de Bode

$$\underline{H}(\omega) = \frac{0.56(1 + j723\omega)^2(52.7 + j63\omega)(13 + j563\omega)}{(1 + j85.5\omega)(-78.6 - j41\omega)(j\omega)^4}$$

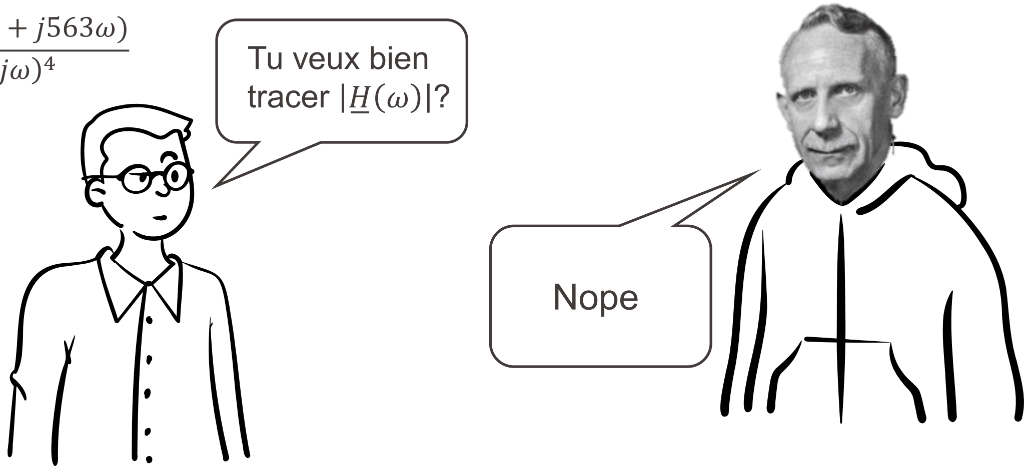


Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d’un système
  - Il permet une résolution graphique simplifiée
  - Il sert à visualiser rapidement le gain et la phase en fonction de la fréquence
  - Il se trace en échelle logarithmique

Hendrick Wade Bode
1905-1982
Ingénieur américain

Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Il est plus aisé et rapide d'étudier les fonctions de transfert en échelle logarithmique
  - On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)
  - Il est défini sur le gain: $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|\underline{H}(\omega)|)$

Diagramme de Bode – Tracé en échelle logarithmique

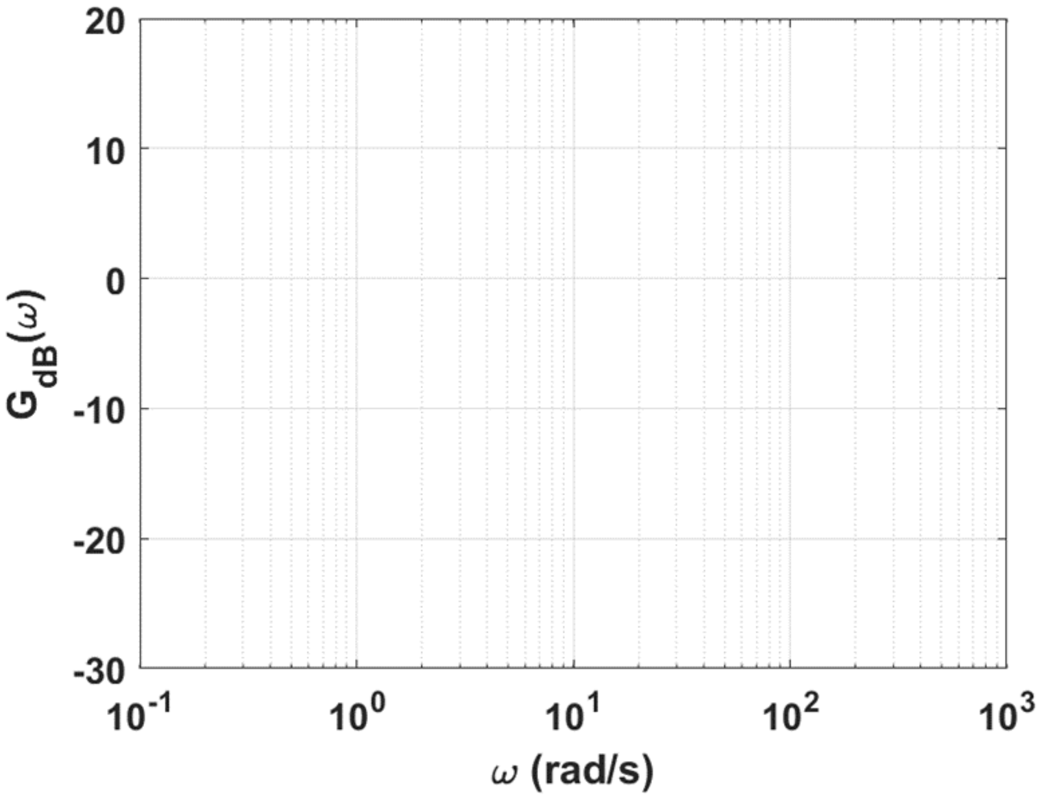


Diagramme de Bode - Exemple

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

Diagramme réel

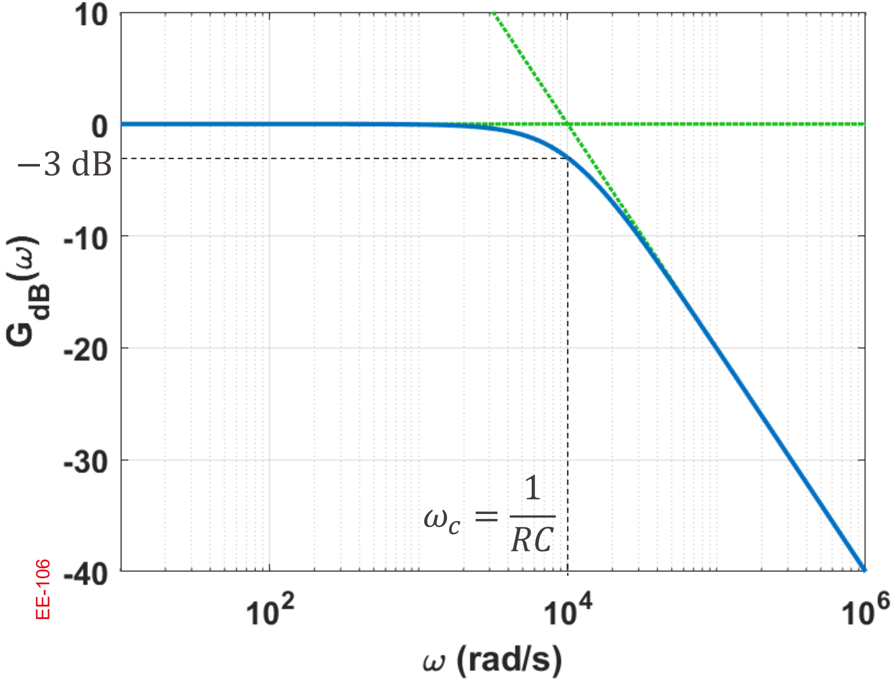


Diagramme asymptotique

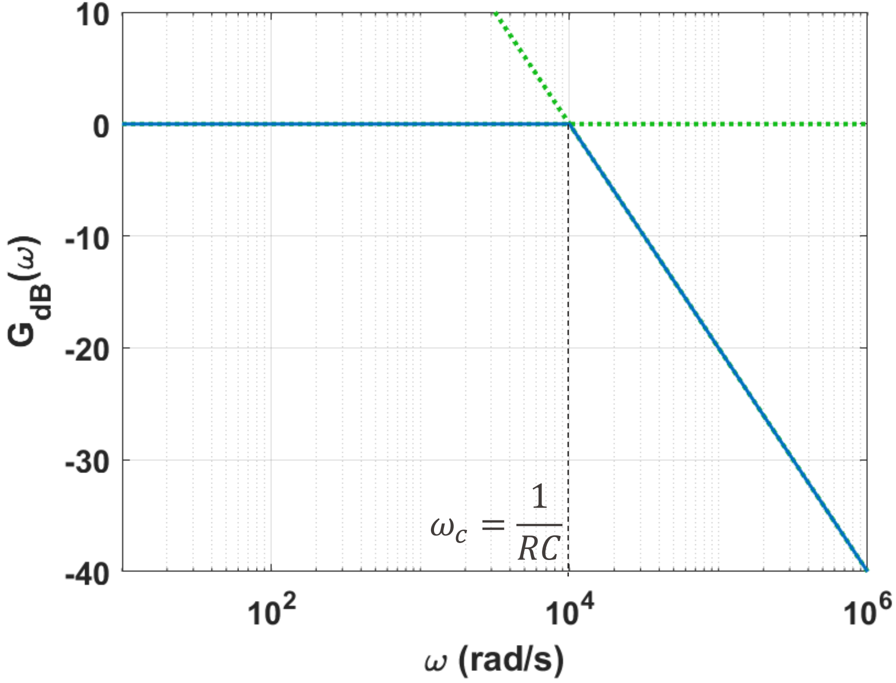


Diagramme de Bode

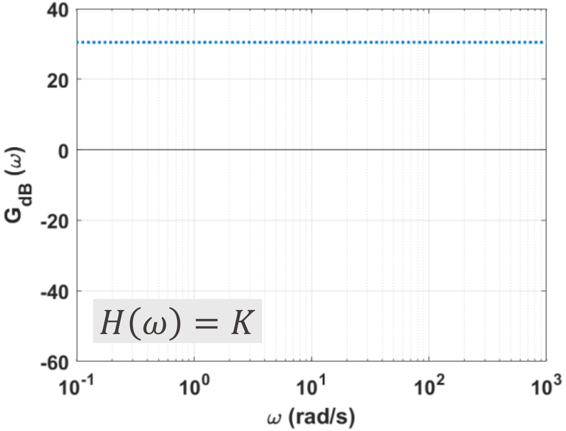
- On s'intéresse ici aux fonctions de transfert de la forme:

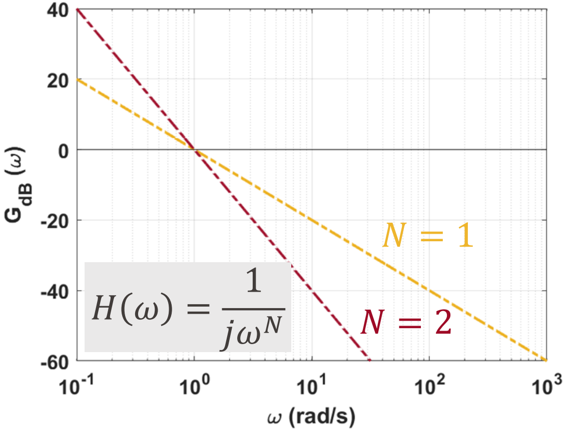
$$\underline{H}(\omega) = K \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\ldots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{(j\omega)^N\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_2}\right)\ldots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_n}\right)}$$

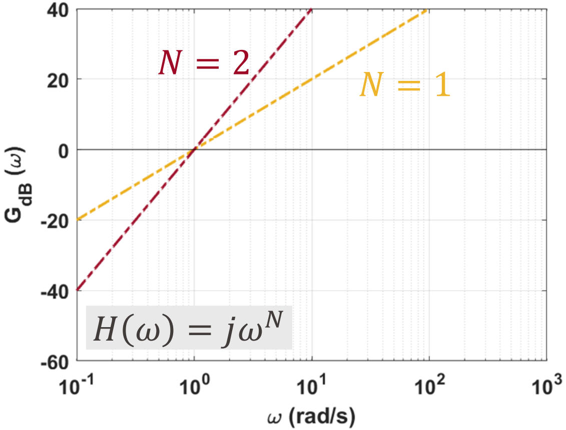
- Pour tracer le gain de ces fonctions, il suffit de connaitre quelques formes simples:

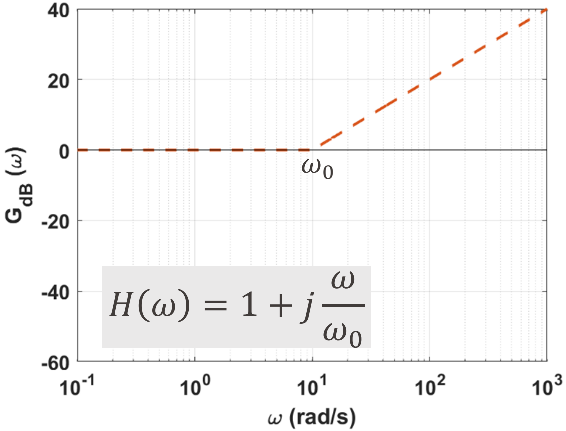
$$K\ ; \frac{1}{(j\omega)^N}\ ; \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\ ; \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

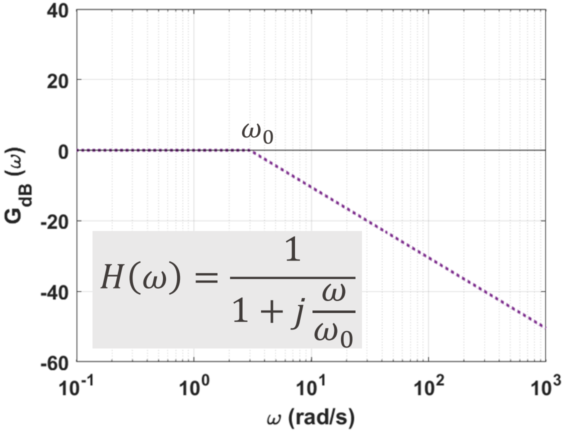
Diagramme de Bode – Constante K



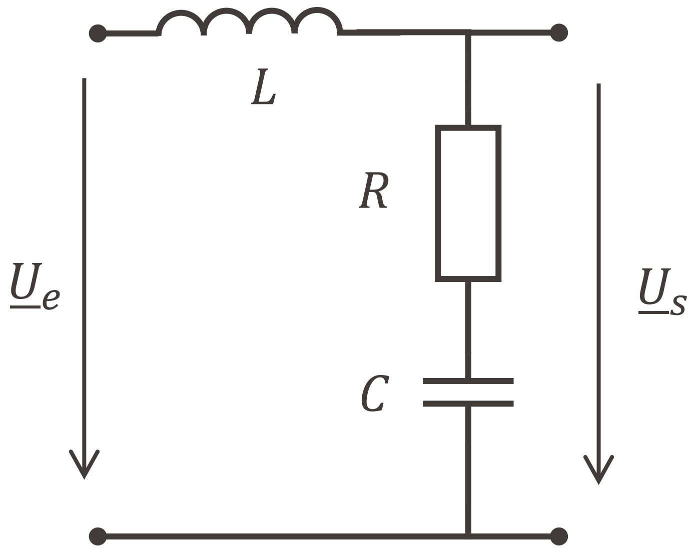








Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$R = 10\ \Omega$
$C = 100\ \mathrm{mF}$
$L = 200\ \mathrm{mH}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega - 0.02\omega^2}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{1}}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

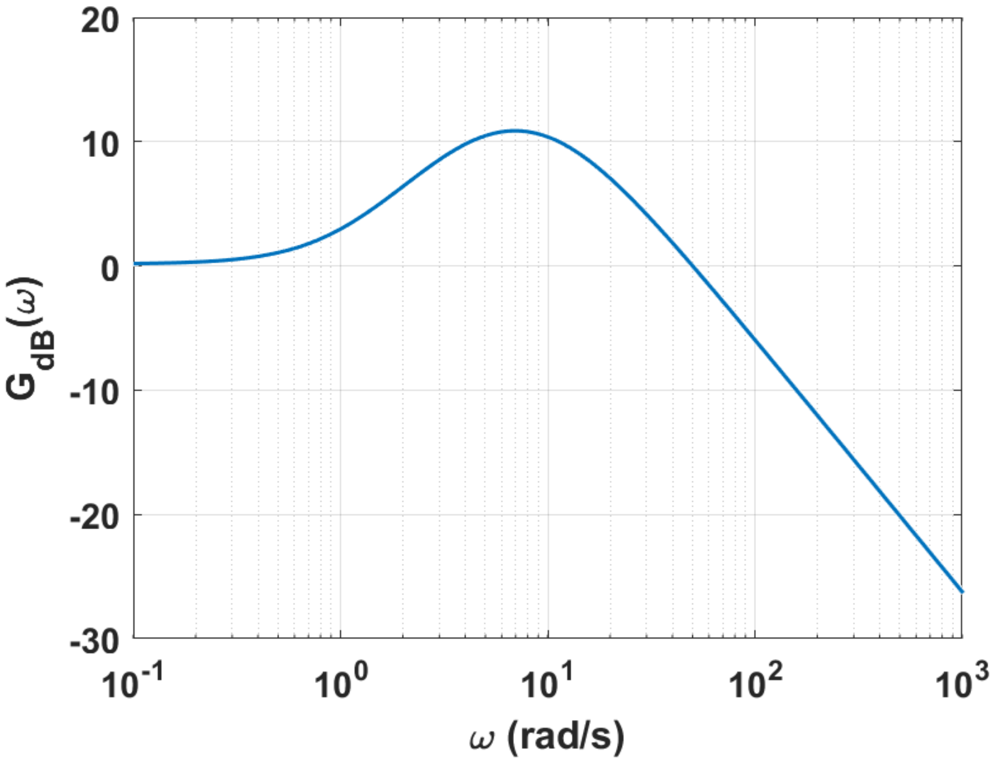
$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|1 + j\frac{\omega}{1}\right|\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{5}\right|}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|}\right)$$

Exemple

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|1 + j\frac{\omega}{1}\right|\right)$$

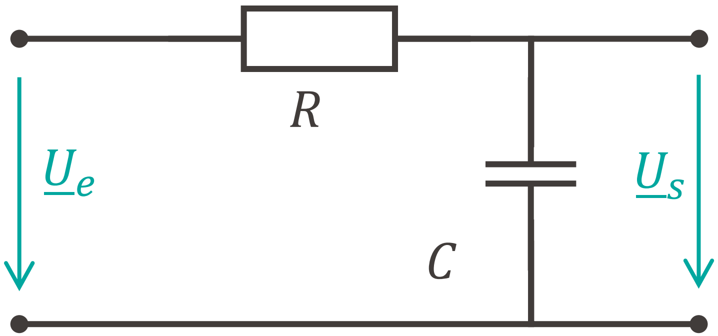
$$+20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{5}\right|}\right)$$

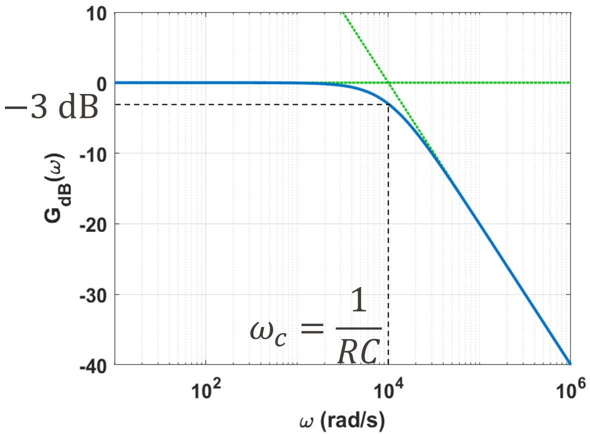
$$+20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|}\right)$$



Points clés

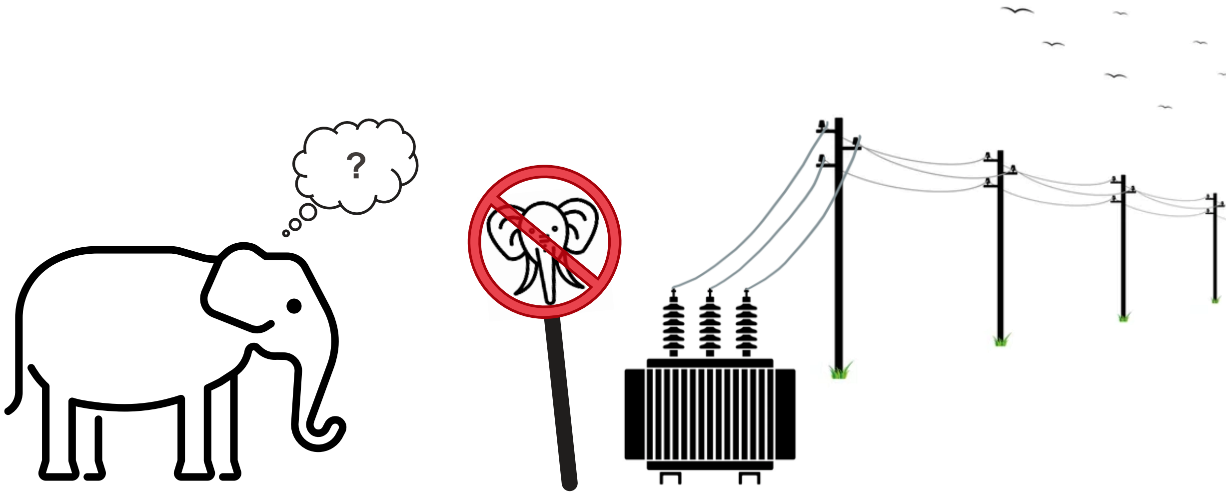
- Le diagramme de Bode est un outil graphique pour étudier un système en régime permanent sinusoïdal
  - On trace le gain et la phase en échelle logarithmique
- On peut facilement tracer un diagramme asymptotique
  - Uniquement en traçant des droites
- On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)





C. Lafforgue

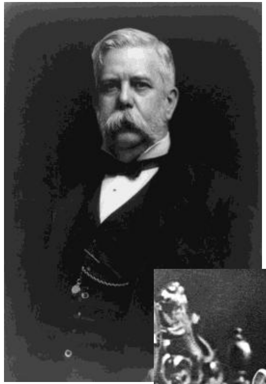
Puissance en régime permanent sinusoïdal



Un peu d'histoire…

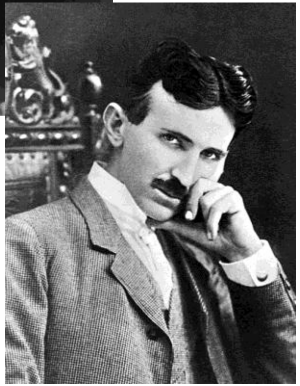
C. Lafforgue

George Westinghouse
1846-1914
Ingénieur américain



Thomas Edison
1847-1931
Ingénieur américain

VS



Nikola Tesla
1856-1943
Ingénieur américain

Distribution d'électricité continue (DC)

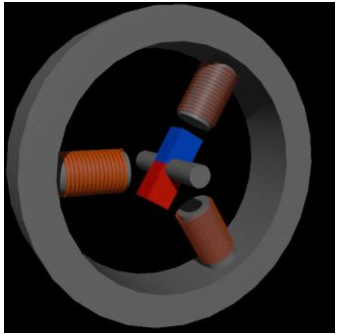
Distribution d'électricité alternative (AC)

Un peu d'histoire…

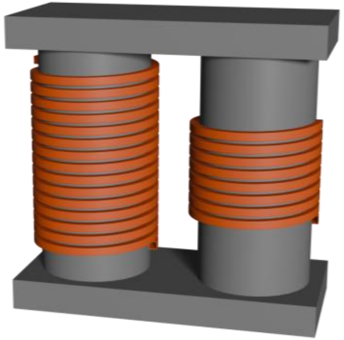
Distribution d'électricité alternative (AC)

Basée sur les brevets de Tesla et Westinghouse:

Machines électriques alternatives (machine synchrone)
→ Production de courant alternatif fiable

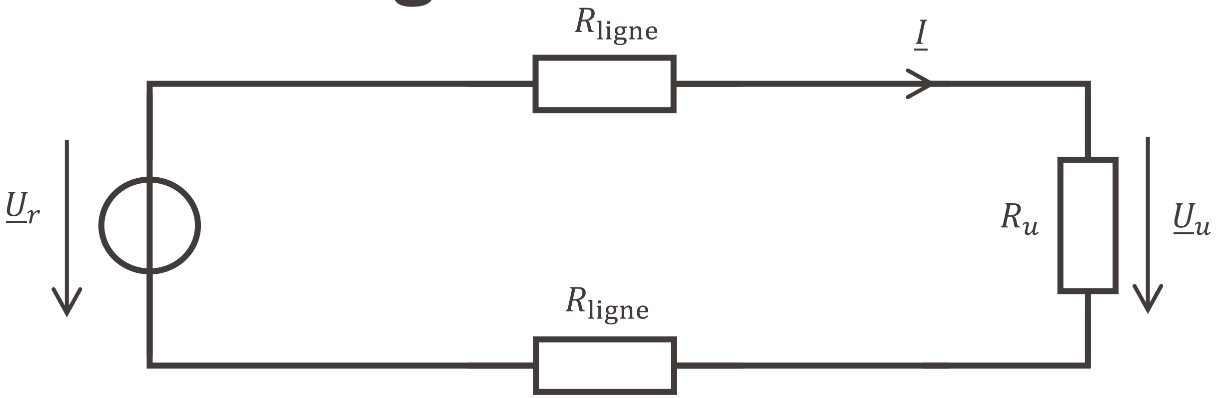


Transformateurs électriques
→ Transport plus efficace (haute tension, faible courant)

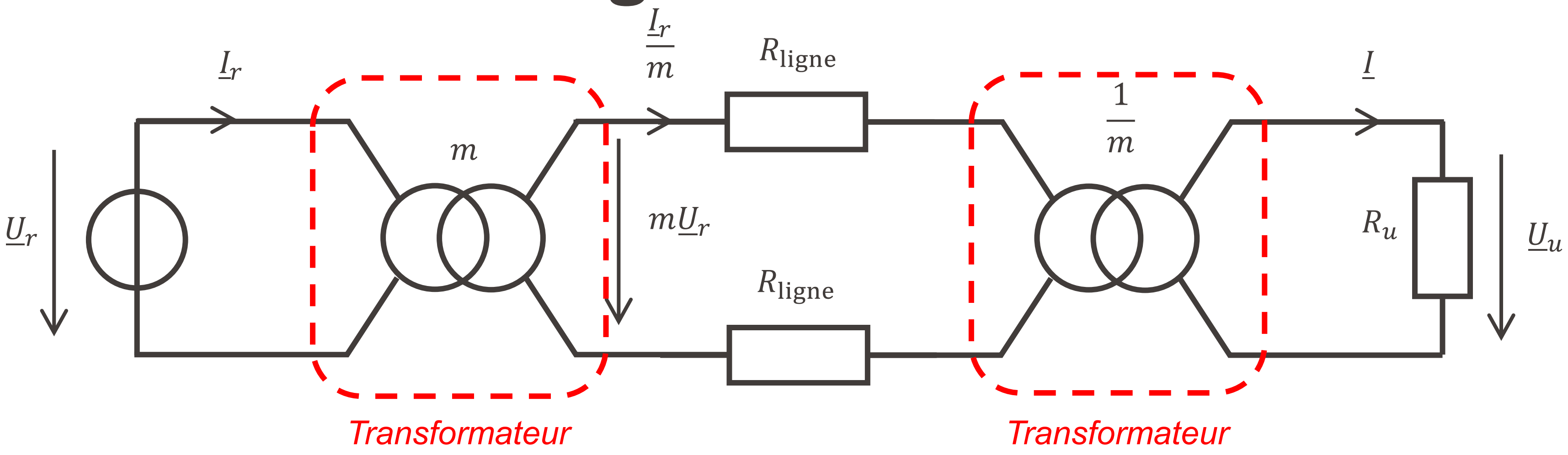


Pertes dans les lignes

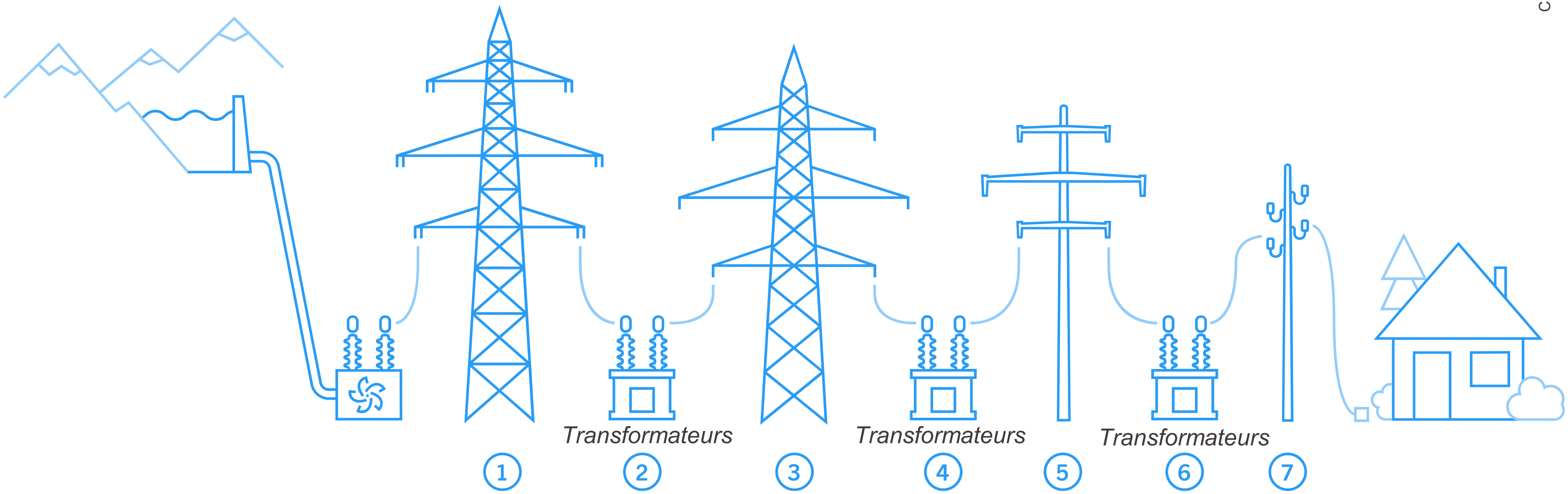
C. Lafforgue



Pertes dans les lignes



Transport de l'électricité – Les niveaux du réseau



1) Réseau très haute tension

Transport de l'électricité depuis les grandes centrales et l'étranger

Tension: 380/220 kV

3) Réseau haute tension

Transport de l'électricité suprarégional

Tension: de 36 kV à 220 kV

5) Réseau moyenne tension

Transport de l'électricité régional

Tension: de 1 kV à 36 kV

7) Réseau basse tension

Acheminement domestique

Tension: 220/400 V

Transport de l'électricité

- Les transformateurs permettent d'augmenter la tension et de réduire le courant
  - Moins de pertes dans les lignes sur les longues distances!
- Les transformateurs fonctionnent **uniquement en régime alternatif (AC)**
- Mais les hautes tensions sont effectivement dangereuses
  - Solutions: mettre les lignes hors de portée (sous terre par exemple)

Un peu d'histoire…

1903: exécution publique de Topsy l'éléphant par la Edison electric illumination company de Brooklyn…

1880: invention de la chaise électrique à la demande de Thomas Edison…

Pourquoi?
Pour discréditer Tesla et Westinghouse et protéger les entreprises de courant DC

Puissance instantanée

- En régime statique, on a vu: $P = UI$

- On définit la puissance instantanée: $p(t) = u(t)i(t)$

- Avec $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$ et $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$:

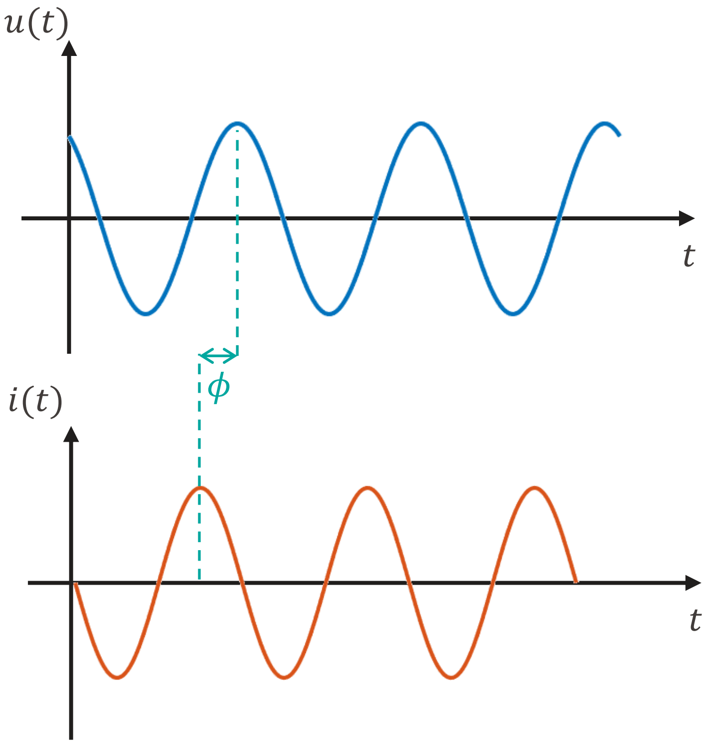
$$p(t) = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$$

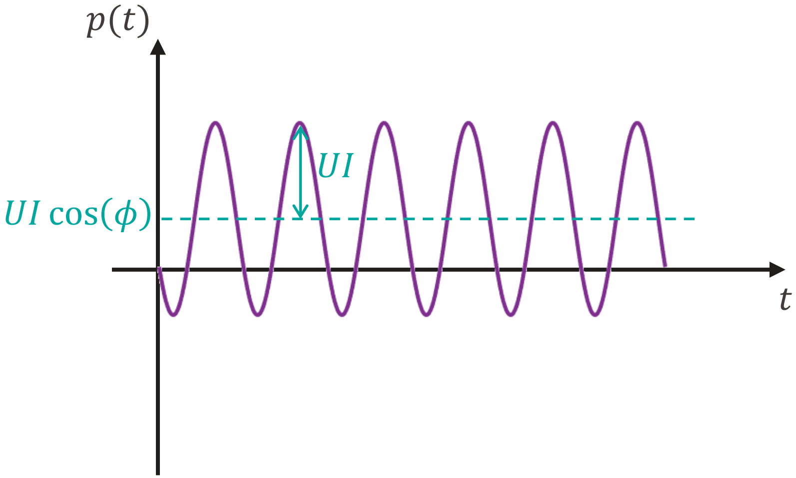
$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

Constante — Sinusoïde de fréquence 2ω

$$p(t) = UI\cos(\phi) + UI\cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$

Puissance instantanée





Puissance instantanée

- La puissance moyenne dépend du déphasage

- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI

Puissance instantanée

- La puissance moyenne dépend du déphasage
- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI
- On peut décomposer la puissance instantanée en deux parties:
  - Une partie toujours positive (puissance consommée)
  - Une partie alternative (à valeur moyenne nulle)

$$p(t) = UI\cos(\phi) + UI\cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$

$$\Leftrightarrow p(t) = UI\cos(\phi) + UI[\cos(2\omega t + 2\alpha)\cos(\phi) + \sin(2\omega t + 2\alpha)\sin(\phi)]$$

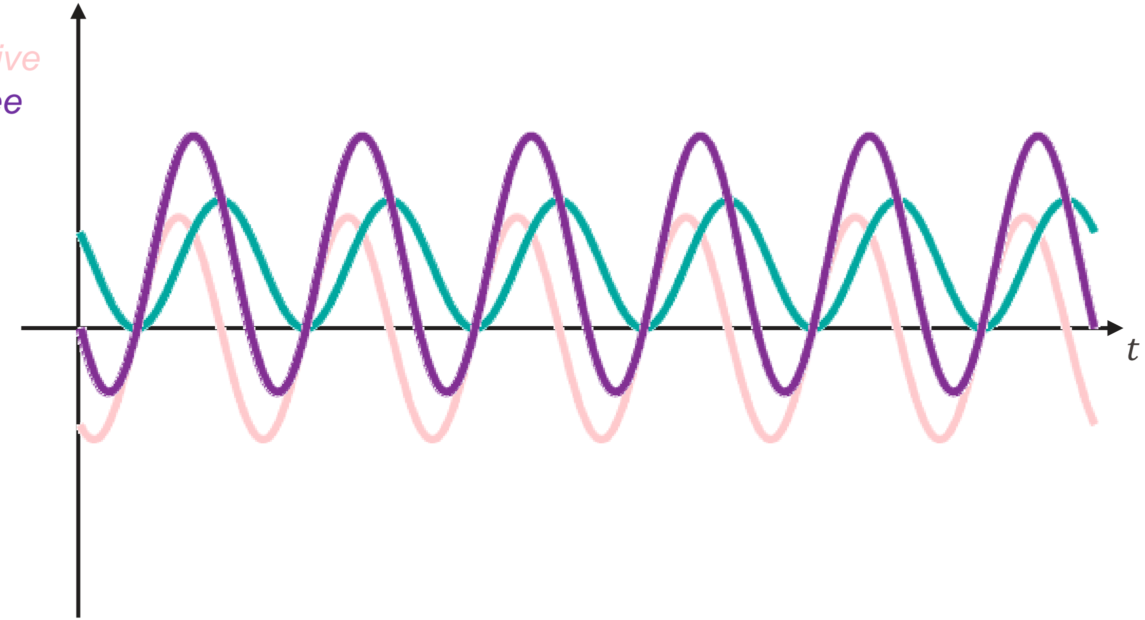
$$\Leftrightarrow p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

Puissance instantanée

C. Lafforgue

$$p(t) = UI\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + UI\sin(\phi)\sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Composante pulsée
Composante alternative
Puissance instantanée



Puissance active

$$p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1+\cos(2\omega t+2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t+2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance active *P*** la valeur moyenne de la puissance instantanée

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$P = UI\cos(\phi)$$

- L'unité est le watt (W)

- Elle correspond à l'énergie convertible en travail ou en chaleur
  - Elle est maximale pour $\phi = 0$
  - Elle est nulle pour $\phi = \pm\pi/2$

Puissance réactive

$$p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance réactive Q** l'amplitude de composante alternative

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$Q = UI\sin(\phi)$$

- L'unité est le volt-ampère réactif (VAr)

- Elle correspond une énergie non convertible
  - Elle est maximale pour $\phi = \pm\pi/2$
  - Elle est nulle pour $\phi = 0$

Puissance apparente

$$p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance apparente S** l'amplitude de des fluctuations de la puissance instantanée par rapport à sa valeur moyenne

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$S = UI$$

- L'unité est le volt-ampère (VA)

- Elle est liée à P et Q par:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

C. Lafforgue

Puissance complexe

- On définit la puissance complexe par:

$$\underline{S} = P + jQ$$

- On peut aussi écrire:

$$\underline{S} = UI\cos(\phi) + jUI\sin(\phi) = UIe^{j\phi}$$

- Cette grandeur contient toutes les informations sur la puissance instantanée:
  - $\mathrm{Re}(\underline{S}) = P$; $\mathrm{Im}(\underline{S}) = Q$
  - $|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$
  - $\arg(\underline{S}) = \phi$

Puissance complexe

- Enfin, on a aussi:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*$$

- Pour une impédance $\underline{Z}$:

$$\underline{S} = \underline{Z}\ I^2 = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

- En posant $\underline{Z} = R + jX$:

$$\underline{S} = RI^2 + jXI^2$$

Que vaut la puissance apparente?

$$u(t) = 20\cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$i(t) = 12\cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A. $S = 240\ \mathrm{VA}$
B. $S = 120\ \mathrm{VA}$
C. $S = 207.8\ \mathrm{VA}$
D. $S = 103.9\ \mathrm{VA}$
E. $S = 60\ \mathrm{VA}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Que vaut la puissance active?

$$u(t) = 20\cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$i(t) = 12\cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A. $P = 240\ \mathrm{W}$

B. $P = 120\ \mathrm{W}$

C. $P = 207.8\ \mathrm{W}$

D. $P = 103.9\ \mathrm{W}$

E. $P = 60\ \mathrm{W}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Que vaut la puissance réactive?

$$u(t) = 20\cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$i(t) = 12\cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A. $Q = 240\ \mathrm{VAr}$

B. $Q = 120\ \mathrm{VAr}$

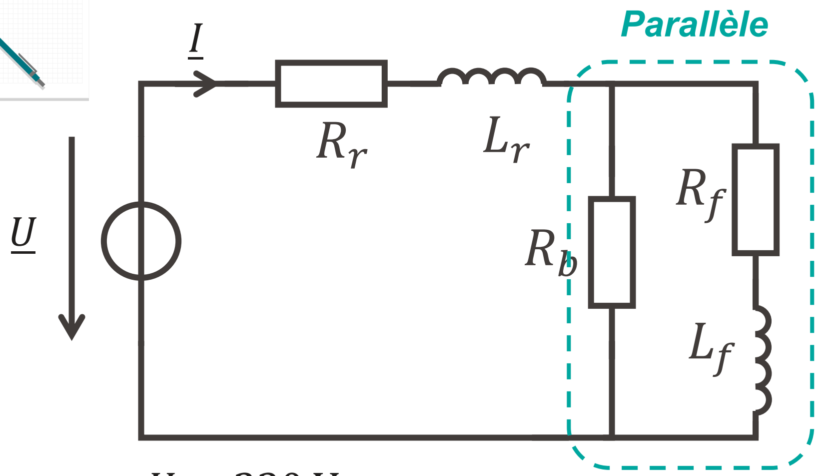
C. $Q = 207.8\ \mathrm{VAr}$

D. $Q = 103.9\ \mathrm{VAr}$

E. $Q = 60\ \mathrm{VAr}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Exemple

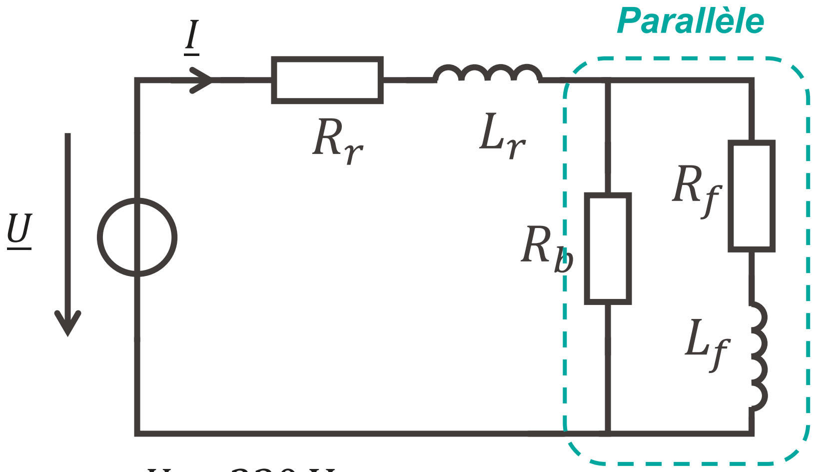


$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$

$f = 50\ \mathrm{Hz}$

Exemple

C. Lafforgue



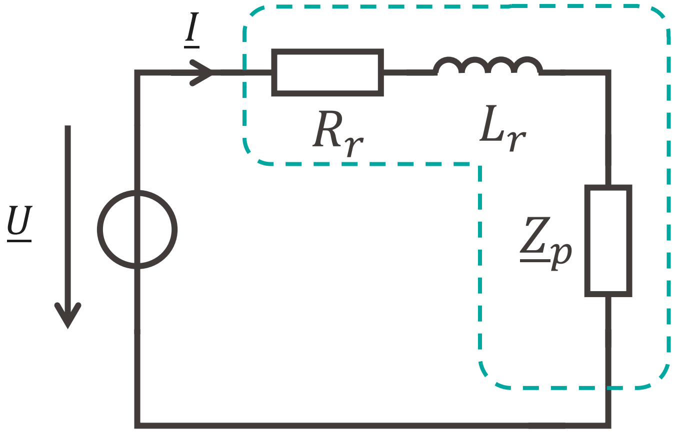
$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$
$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b\left(R_f + jL_f\omega\right)}{R_b + R_f + jL_f\omega}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b\left(R_f + jL_f\omega\right)\left(R_b + R_f - jL_f\omega\right)}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b\left[R_f\left(R_b + R_f\right) + \left(L_f\omega\right)^2\right] + jR_b^2 L_f\omega}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}$$

Exemple



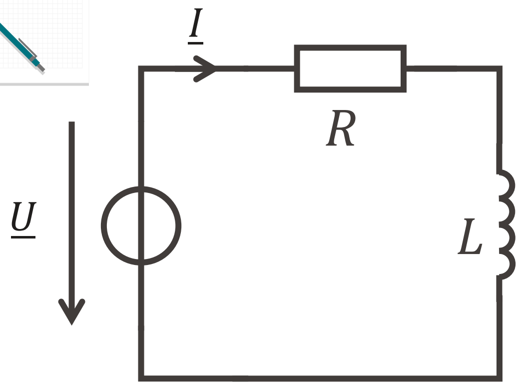
$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$
$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$$\underline{Z}_s = R_r + jL_r\omega + \underline{Z}_p$$

$$\underline{Z}_s = R_r + jL_r\omega + \frac{R_b\left[R_f\left(R_b+R_f\right)+\left(L_f\omega\right)^2\right]+jR_b^2L_f\omega}{\left(R_b+R_f\right)^2+\left(L_f\omega\right)^2}$$

$$\underline{Z}_s = R_r + \frac{R_b\left[R_f\left(R_b+R_f\right)+\left(L_f\omega\right)^2\right]}{\left(R_b+R_f\right)^2+\left(L_f\omega\right)^2} + j\left(L_r + \frac{R_b^2L_f\omega}{\left(R_b+R_f\right)^2+\left(L_f\omega\right)^2}\right)\omega$$

Exemple



$$\underline{U} = 230\ \text{V}$$
$$R = 5\ \Omega$$
$$L = 10\ \text{mH}$$
$$f = 50\ \text{Hz}$$

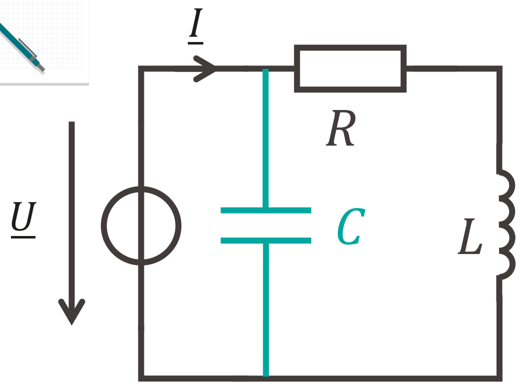
Facteur de puissance

- Le facteur de puissance est le rapport de la puissance active et de la puissance apparente:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

- Pour une charge purement résistive, $\phi = 0$ donc $FP = 1$
- En présence d'une charge réactive, le facteur de puissance diminue
- Cela augmente les pertes au niveau du réseau électrique (et peut alors augmenter les coûts de l'électricité)

Exemple: correction de facteur de puissance



$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$
$R = 5\ \Omega$
$L = 10\ \mathrm{mH}$
$f = 50\ \mathrm{Hz}$

C. Lafforgue

Que doit valoir C pour annuler la puissance réactive?

$$f = 50 \text{ Hz}$$
$$U = 230 \text{ V}$$
$$P = 7.59 \text{ kW}$$
$$Q = 4.77 \text{ kVAr}$$
$$S = 8.96 \text{ kVA}$$

A. $C = 1.8 \text{ mF}$

B. $C = 287\ \mu\text{F}$

C. $C = 3.5 \text{ kF}$

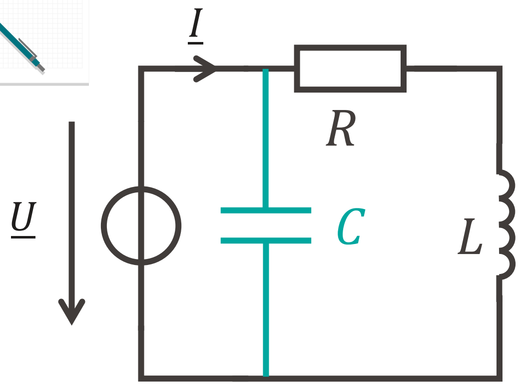
D. $C = 555 \text{ F}$

E. $C = 35.3 \text{ mF}$

F. $C = 222 \text{ mF}$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Exemple: correction de facteur de puissance



$$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$$
$$R = 5\ \Omega$$
$$L = 10\ \mathrm{mH}$$
$$f = 50\ \mathrm{Hz}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_{RL} - jC\omega U^2 = \frac{RU^2}{R^2 + (L\omega)^2} + j\left(\frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2} - C\omega U^2\right)$$

$$Q = 0 \iff C\omega U^2 = \frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\iff C = \frac{4{,}8 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 50 \cdot 230^2}$$

$$\iff C \simeq 287\ \mathrm{\mu F}$$

Points clés

- En régime permanent sinusoïdal, on définit une puissance complexe:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = P + jQ$$

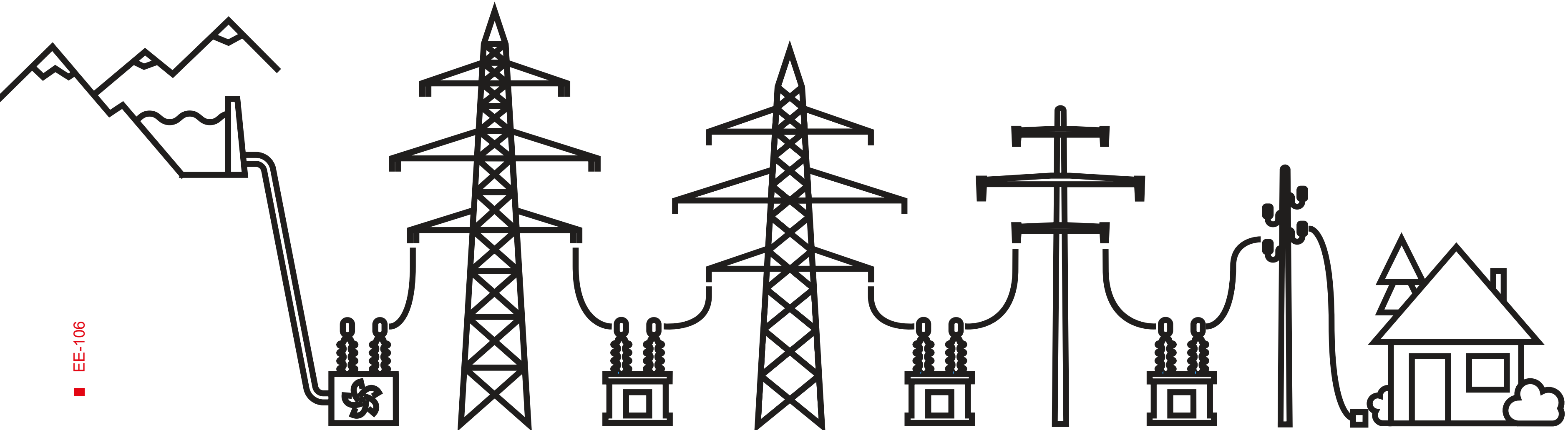
  - P est la puissance active, en W: puissance convertie
  - Q est la puissance réactive, en VAr: puissance alternative
  - $S = |\underline{S}|$ est la puissance apparente, en VA

- La qualité d'un système électrique peut être quantifiée par le facteur de puissance:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

C. Lafforgue

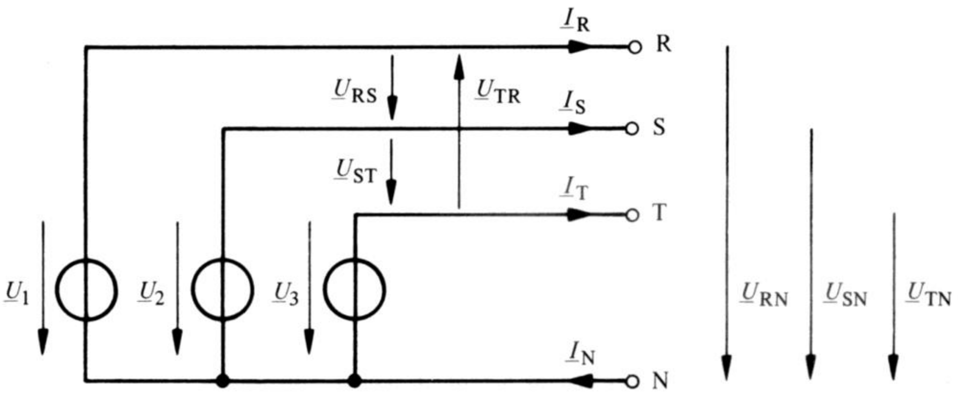
Introduction aux systèmes triphasés

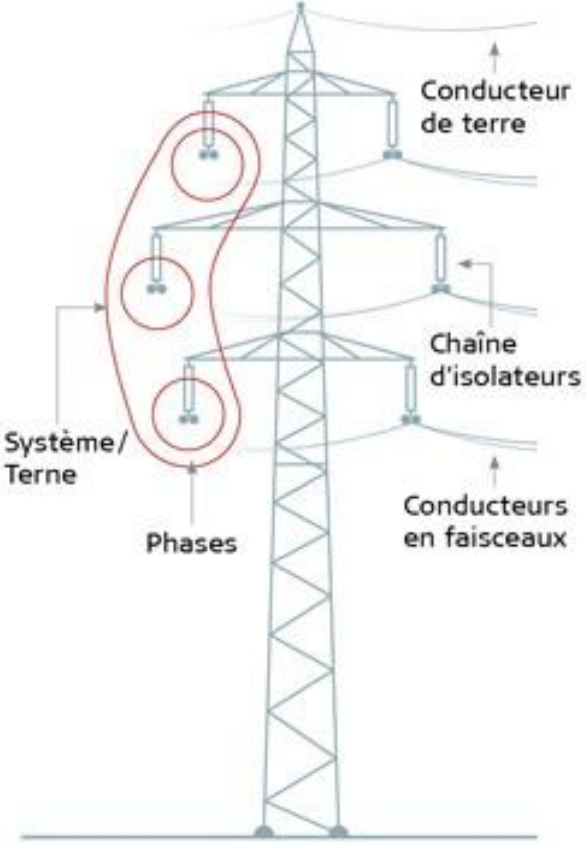


Transport de l'électricité: le triphasé

- On utilise un réseau triphasé
  - Les machines électriques ont un fonctionnement optimal en polyphasé
  - On peut montrer que dans ce cas la puissance instantanée totale est constante

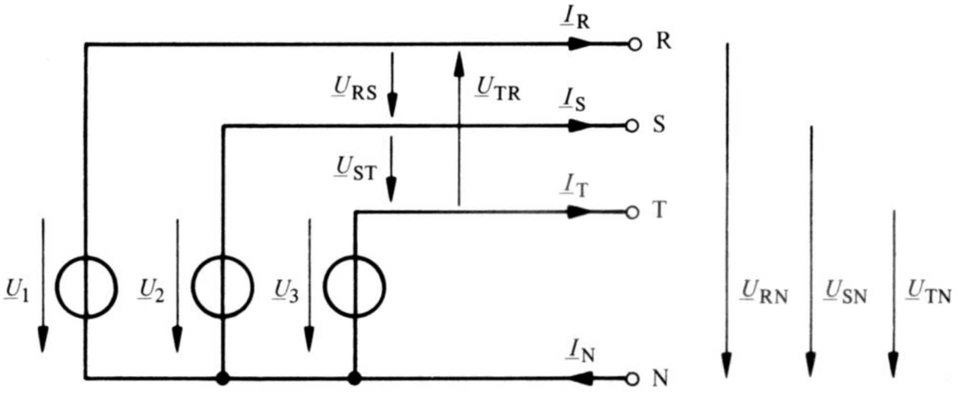
Schéma d'une source triphasée:





Transport de l'électricité: le triphasé

Schéma d'une source triphasée:



Pour aller plus loin: systèmes triphasés

C. Lafforgue

- ***Système polyphasé***
  Un système polyphasé est un ensemble de m grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de **même fréquence**, déphasées les unes par rapport aux autres et appelées **phases**.

- ***Système polyphasé symétrique***
  Un système polyphasé symétrique à m phases et d'ordre k est un ensemble de m grandeurs sinusoïdales (tensions ou courants) de **même fréquence**, de **même valeur efficace** et telles que le **déphasage** entre deux grandeurs consécutives vaut:

$$\frac{k2\pi}{m}$$

k est appelé **ordre de succession des phases**

Pour aller plus loin : systèmes triphasés

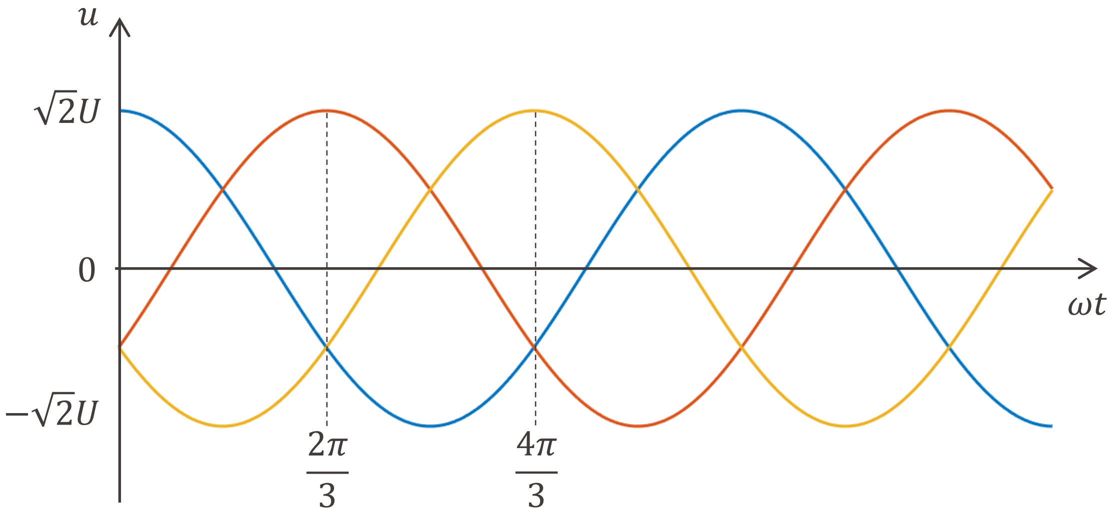
- ***Système direct***
  On appelle **direct** un système dont le diagramme des phaseurs est ordonné dans le sens trigonométrique négatif (sens des aiguilles d'une montre).

- ***Système inverse***
  On appelle **inverse** un système dont le diagramme des phaseurs est ordonné dans le sens trigonométrique positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).

- ***Système homopolaire***
  On appelle **homopolaire** un système dans lequel toutes les grandeurs sont en phase.

Systèmes triphasés

- Système triphasé direct d'ordre $\mathbf{1}$ ($\boldsymbol{m = 3}$, $\boldsymbol{k = 1}$).



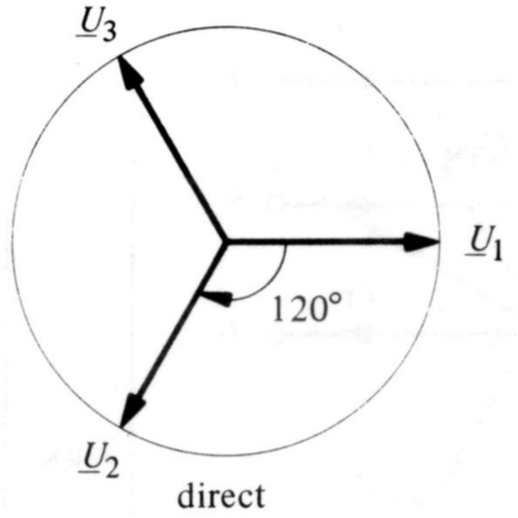
$$u_1(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t)$$

$$u_2(t) = \sqrt{2}U\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$u_3(t) = \sqrt{2}U\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Systèmes triphasés

- Système triphasé ***direct*** d'ordre **1** (***m*** **= 3**, ***k*** **= 1**)

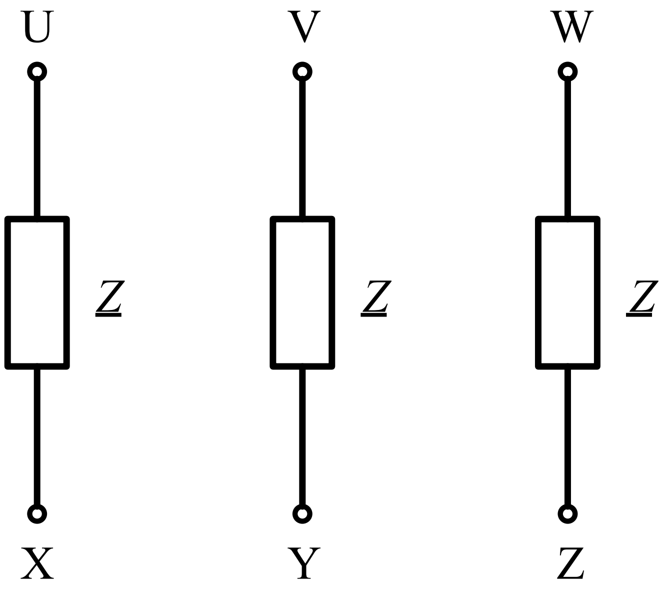


$$\underline{U}_1 = U$$
$$\underline{U}_2 = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}}$$
$$\underline{U}_3 = Ue^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$$

C. Lafforgue

Charge triphasée équilibrée

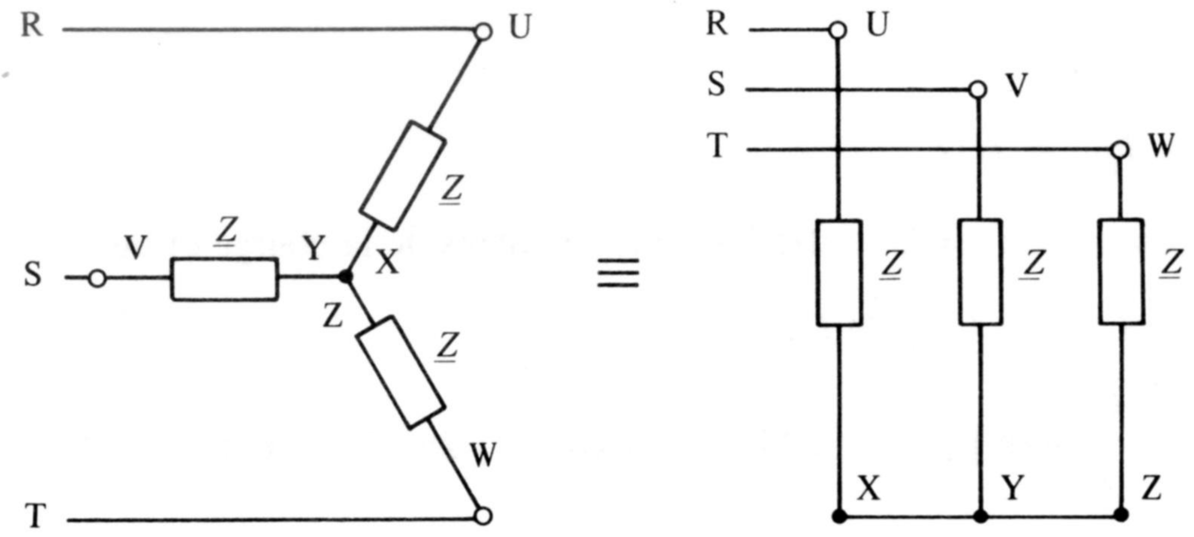


- Trois impédances identiques
- Ces trois impédances peuvent être connectées en **étoile** ou en **triangle**

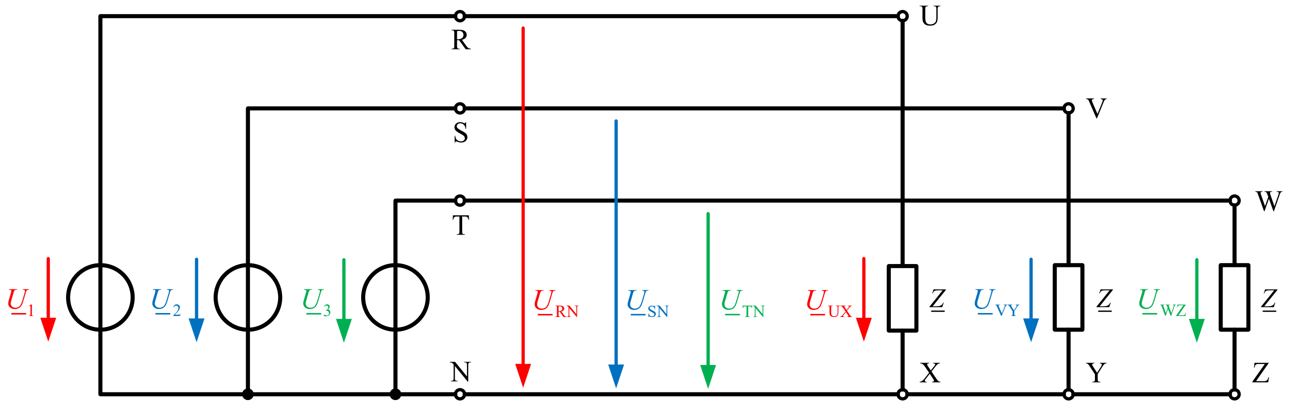
C. Lafforgue

Connexion en étoile

- Montage symbolisé par le signe **Y**
- Le point commun (XYZ) est appelé **point neutre de la charge**

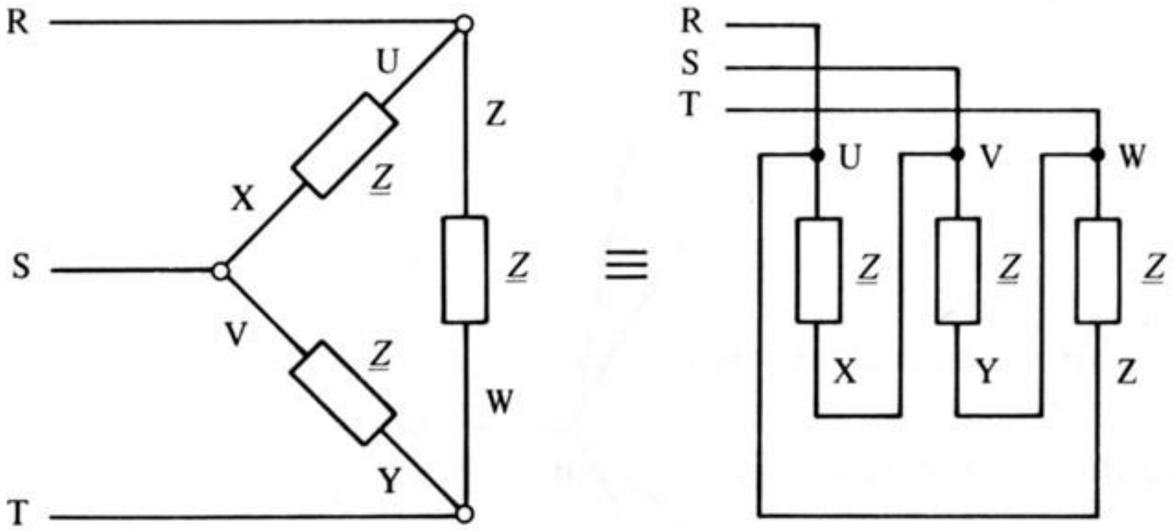


Connexion en étoile

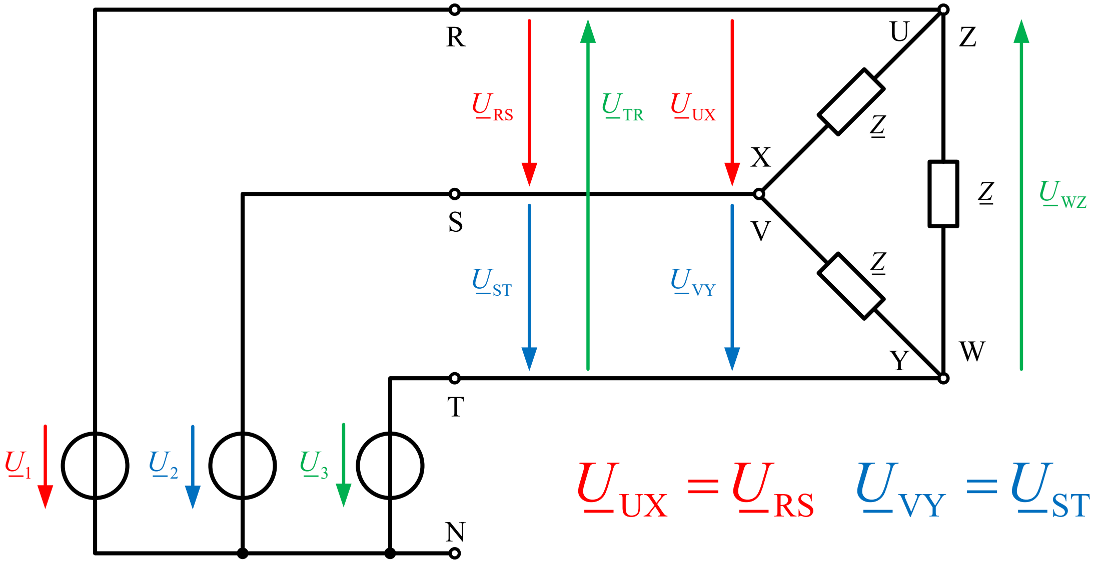


Connexion en triangle

- Montage symbolisé par le signe Δ



Connexion en triangle



$$\underline{U}_{UX} = \underline{U}_{RS} \quad \underline{U}_{VY} = \underline{U}_{ST} \quad \underline{U}_{WZ} = \underline{U}_{TR}$$

Conversion triangle - étoile

Le passage d'un montage en ***triangle*** à celui en ***étoile*** d'une charge d'impédances est utilisé pour :

- Obtenir une réduction momentanée de la puissance.

  Technique largement utilisée pour le démarrage de moteurs asynchrones

- Permettre l'adaptation à un réseau ayant une tension plus élevée.

Merci pour votre attention

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris