EPFL

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 10: Régime permanent sinusoïdal: Les filtres

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2025

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

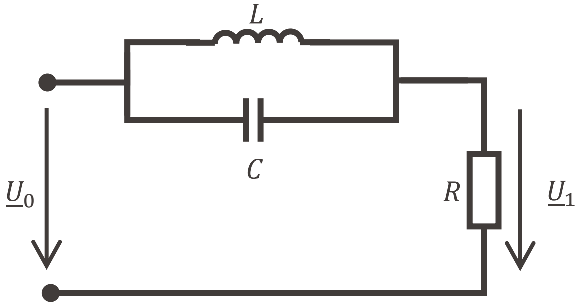
Rappels

Méthodes de résolution en régime permanent sinusoïdal

C. Lafforgue

- Les mêmes méthodes qu'en régime statique sont applicables en régime sinusoïdal:
  - Agencement d'impédances
  - Théorèmes de Thévenin et de Norton
  - Equivalence de sources
  - Principe de superposition

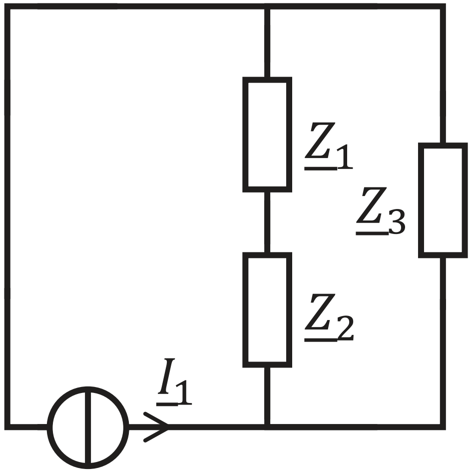
- Les grandeurs dans le circuit dépendent de la fréquence



$$\underline{U}_1 = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R + jL\omega - RLC\omega^2}\underline{U}_0$$

-Rappels- Quelle est l'impedance équivalente de Thévenin?

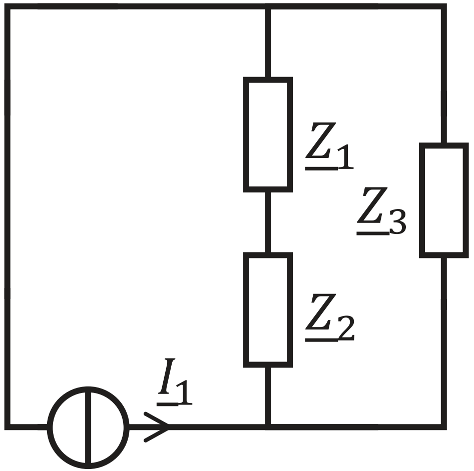
C. Lafforgue



$\underline{Z}_1 = -j10\ \Omega$
$\underline{Z}_2 = 8\ \Omega$
$\underline{Z}_3 = j10\ \Omega$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

-Rappels- Quelle est la tension équivalente de Thévenin?



$\underline{Z}_1 = -j10\ \Omega$

$\underline{Z}_2 = 8\ \Omega$ $\qquad \underline{I}_1 = 3\ \text{A}$

$\underline{Z}_3 = j10\ \Omega$

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Notion de filtres

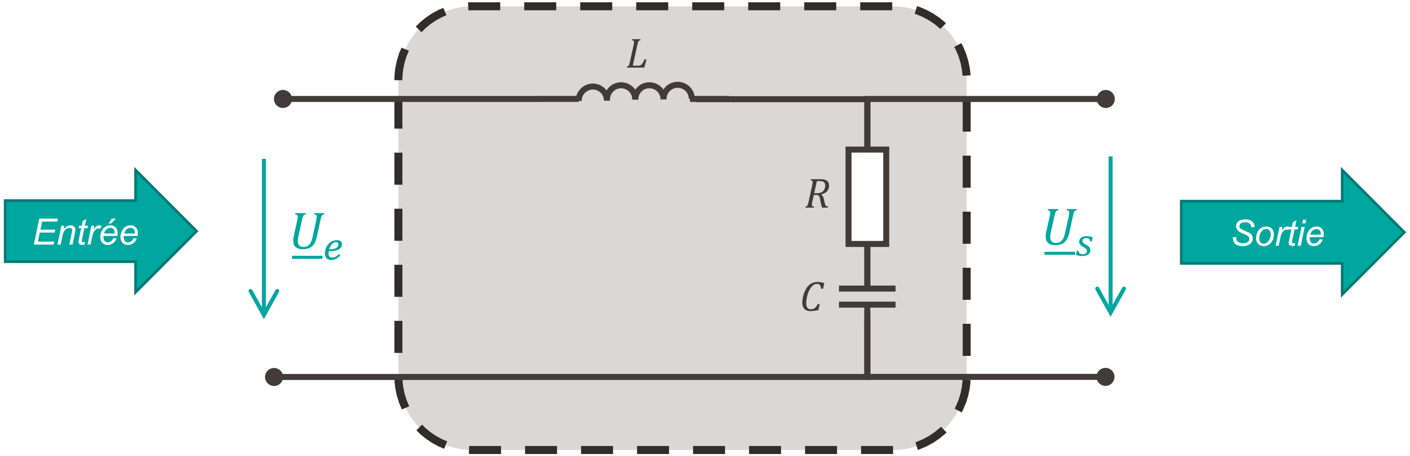
Quadripôles

- On a étudié avant des dipôles:
  - Résistance
  - Condensateur
  - Inductance

- Les Quadripôles sont des systèmes avec 4 bornes
  - 2 bornes d'entrée
  - 2 bornes de sortie

Quadripôles – Fonction de transfert

- Exemple:



$$\underline{U}_s = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\underline{U}_e$$

- La grandeur de sortie est proportionnelle à la grandeur d'entrée
  - Le rapport sortie/entrée est appelé **fonction de transfert**

Quadripôles – Fonction de transfert

- La grandeur de sortie est proportionnelle à la grandeur d'entrée
  - Le rapport sortie/entrée est appelé **fonction de transfert**

  - Par exemple, pour la tension:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s(\omega)}{\underline{U}_e(\omega)} = |\underline{H}(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

- La fonction de transfert est caractérisée par:
  - Son module, appelé **gain:** $|\underline{H}(\omega)|$
  - Son argument, appelé **phase:** $\phi(\omega)$

Quadripôles – Notion de filtres

- La dépendance en fréquence implique une possibilité de sélection par la fréquence
  - Ces systèmes s'appellent des **filtres**
  - Certains signaux sont transmis en sortie, d'autres sont filtrés

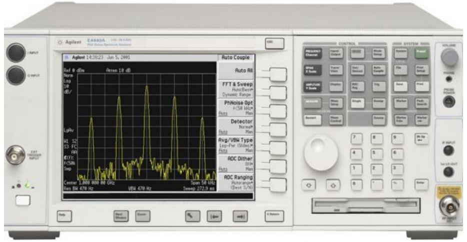
Applications des filtres

- Les filtres sont présents partout!

Radio

Traitement du son

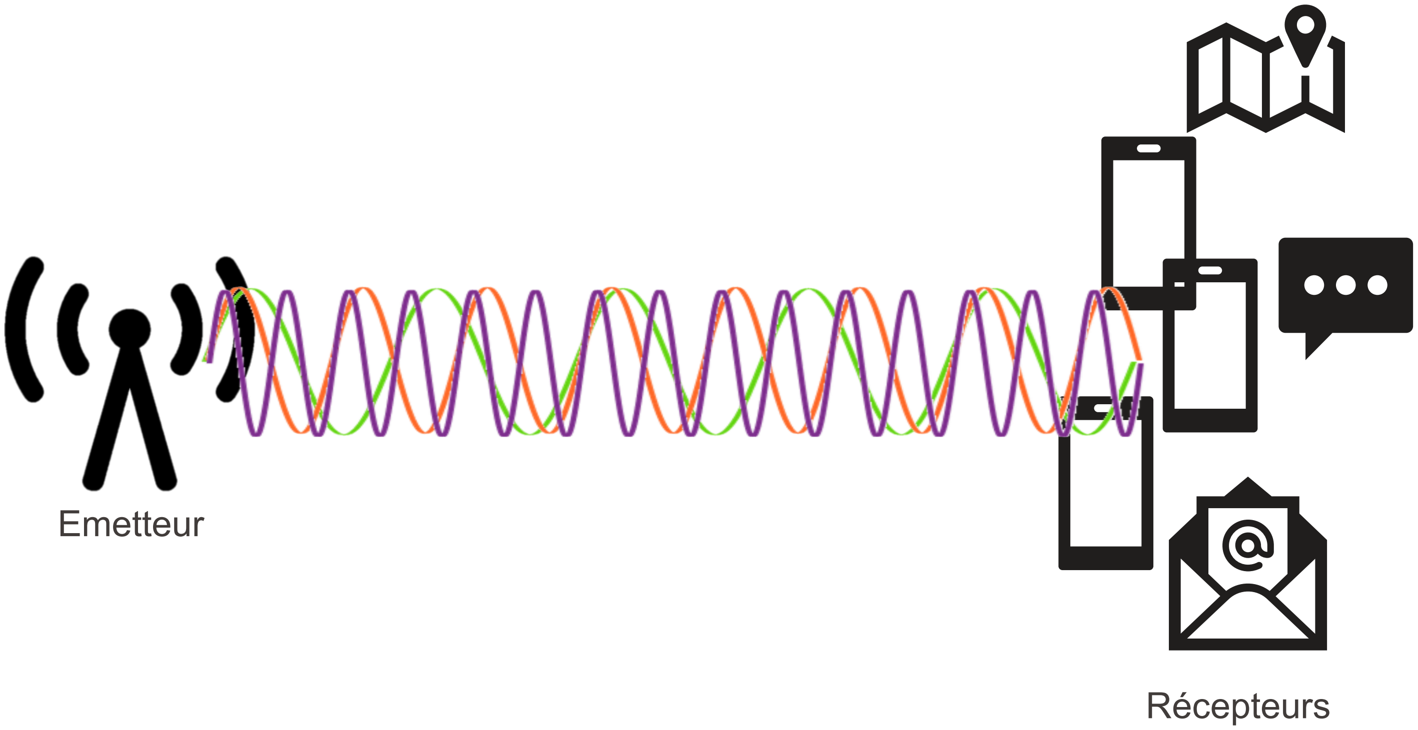
Mesure



Communications

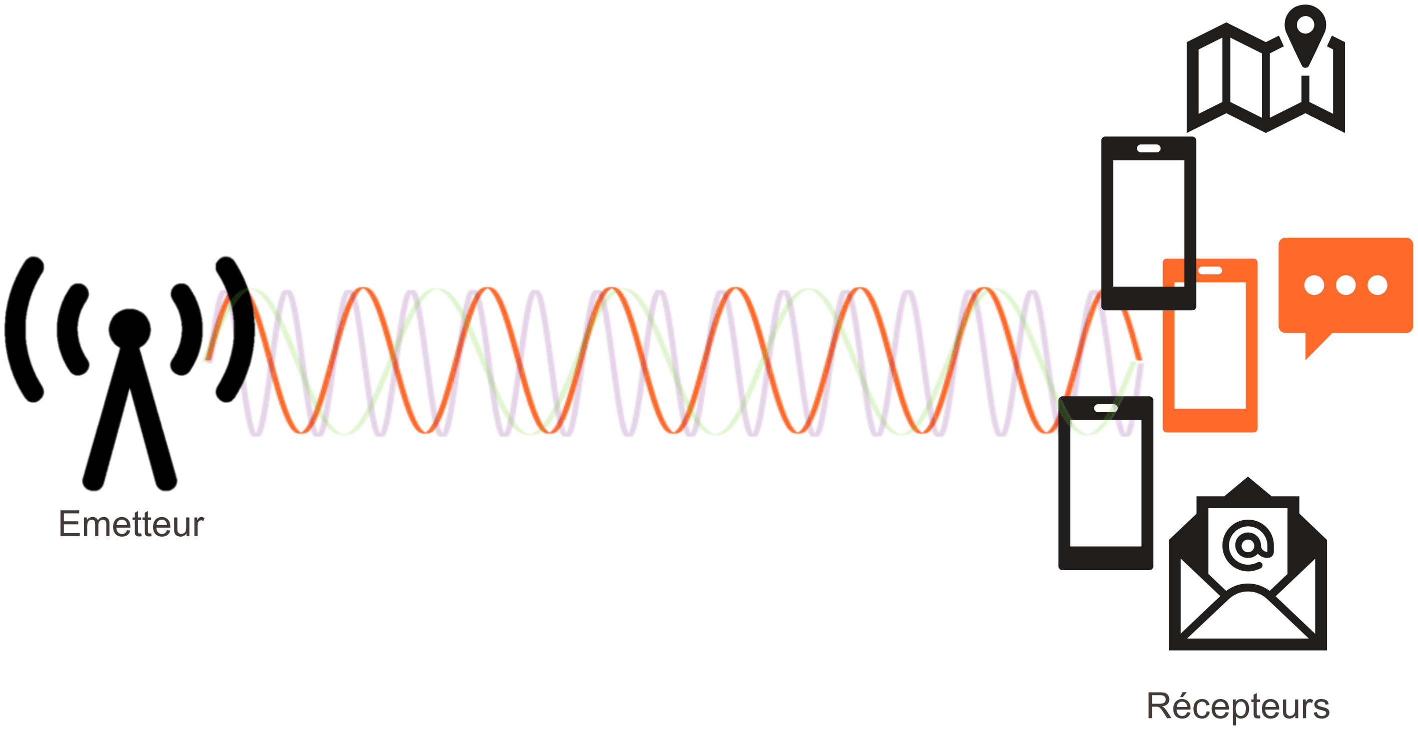
Applications des filtres: communications

C. Lafforgue

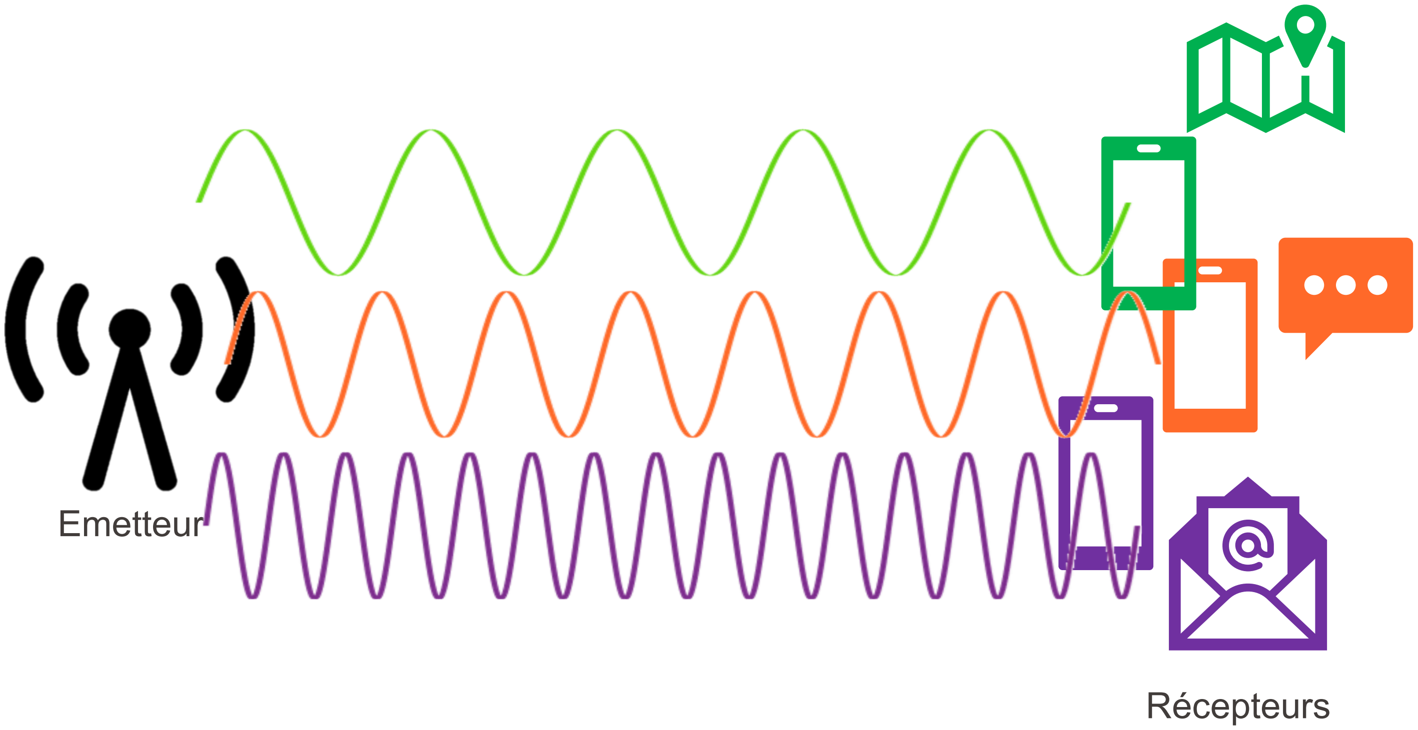


Applications des filtres: communications

C. Lafforgue



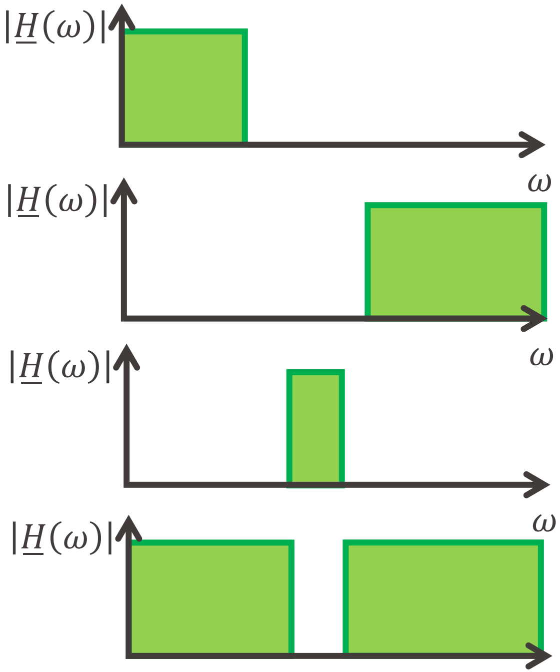
Applications des filtres: communications



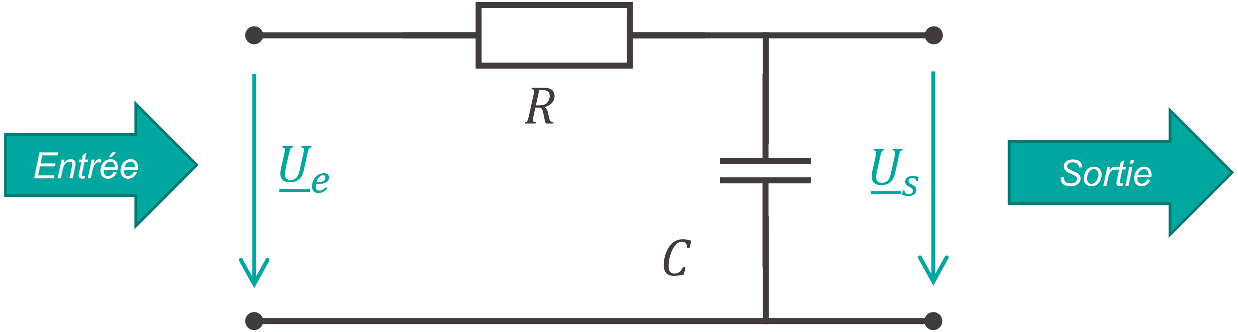
Types de filtres et analyse

Classification des filtres

- Les filtres sont généralement caractérisés par leur **bande passante**
  - C'est la gamme de fréquences qui « passent » au travers du filtre (fenêtre de transmission)
- Il y a 4 grandes familles de filtres
  - Les filtres passe-bas
  - Les filtres passe-haut
  - Les filtres passe-bande
  - Les filtres coupe-bande

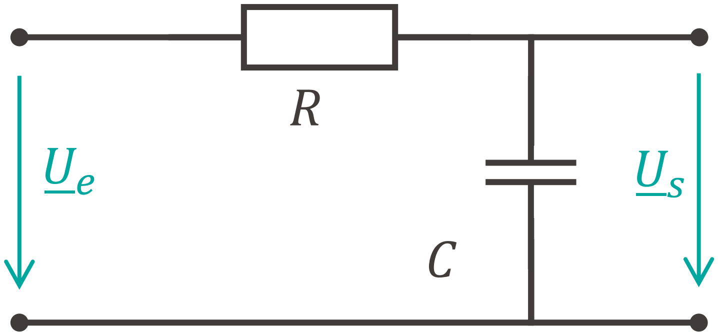


Circuit RC

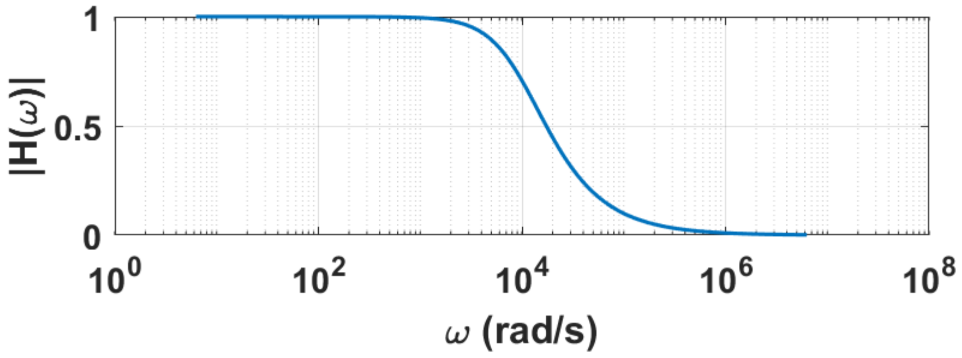


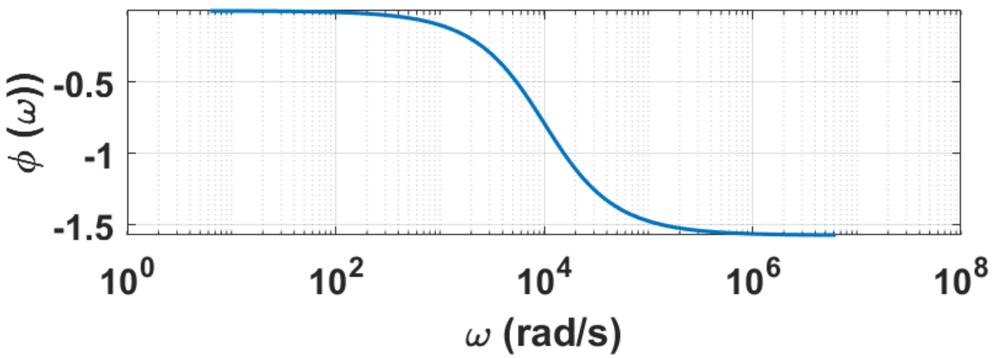
Circuit RC

$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$C = 100\ \mathrm{nF}$



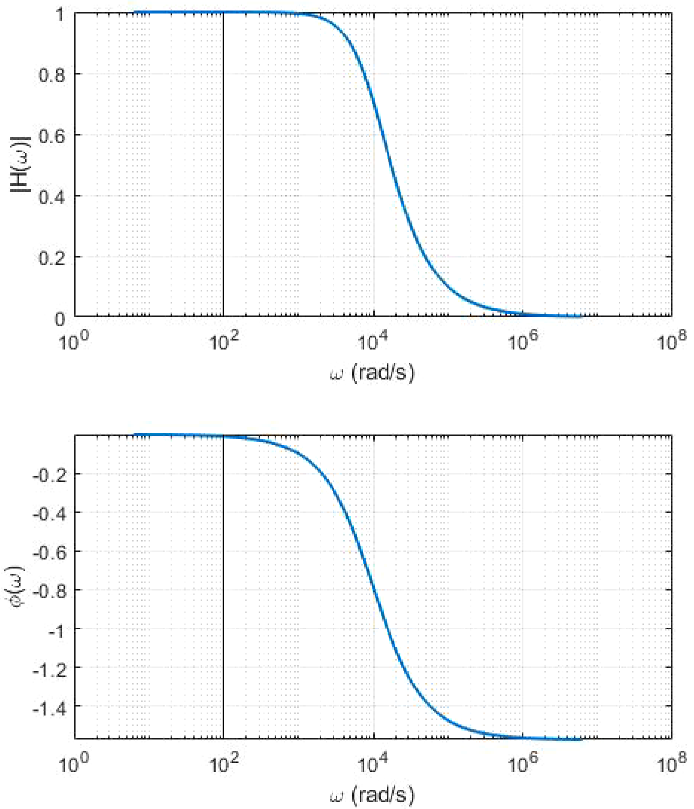
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

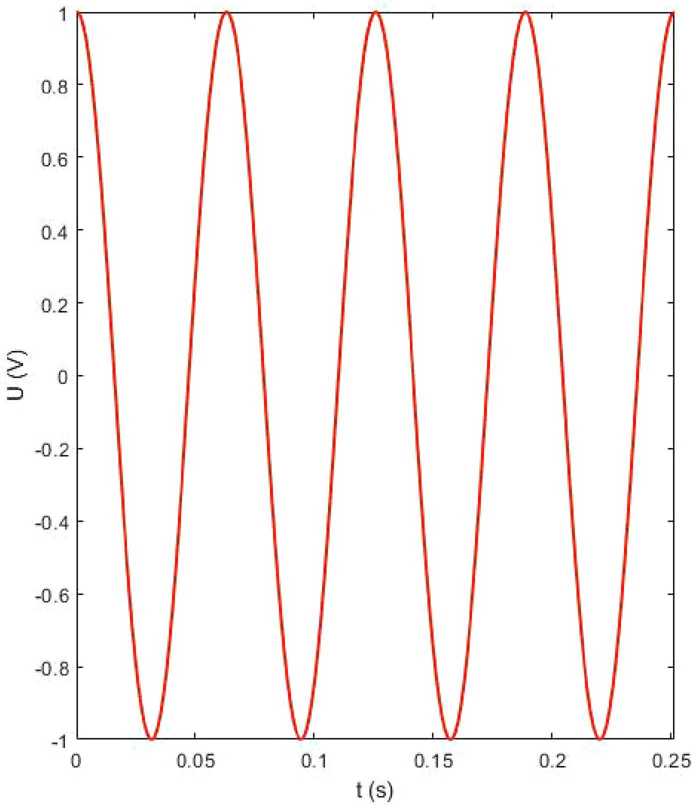




C. Lafforgue

Circuit RC





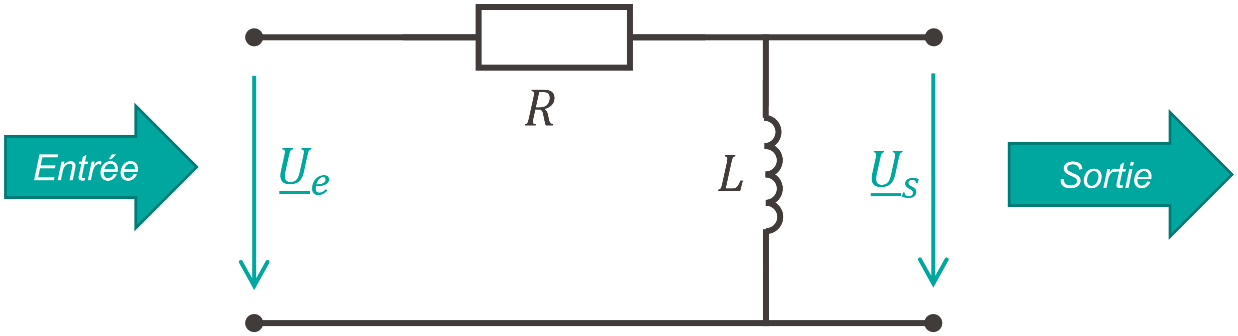
Caractéristique

- On quantifie la bande passante de ce filtre par la **fréquence de coupure**
  - C'est la fréquence telle que:

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

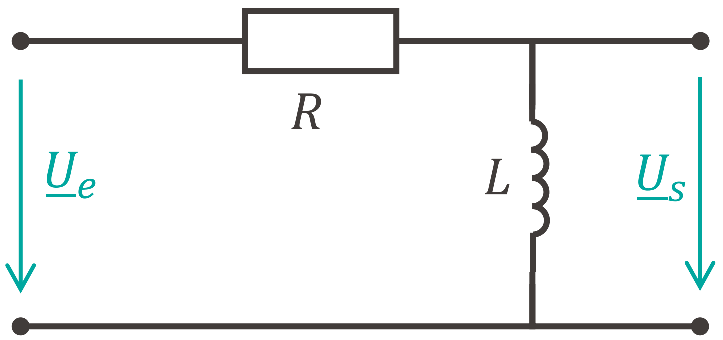
Circuit RL

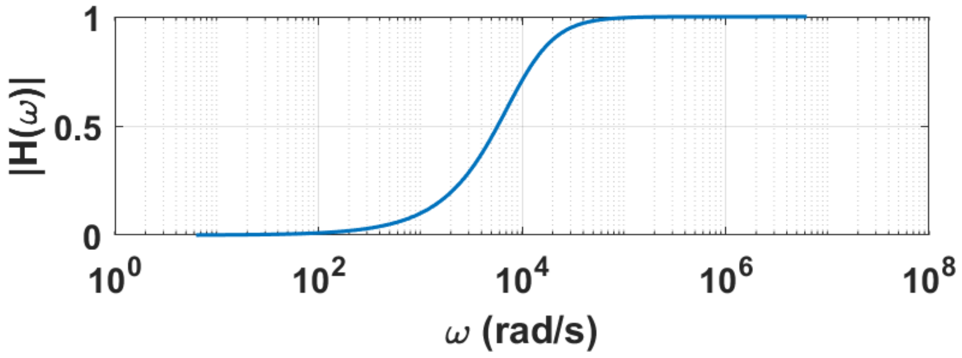
C. Lafforgue



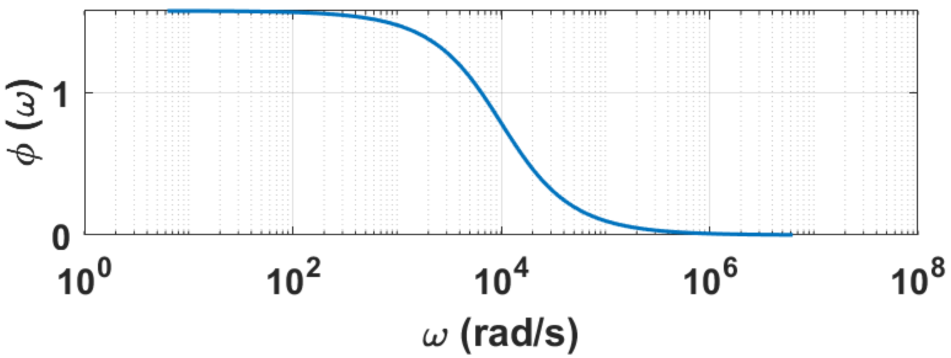
Circuit RL

$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$L = 100\ \mathrm{mH}$



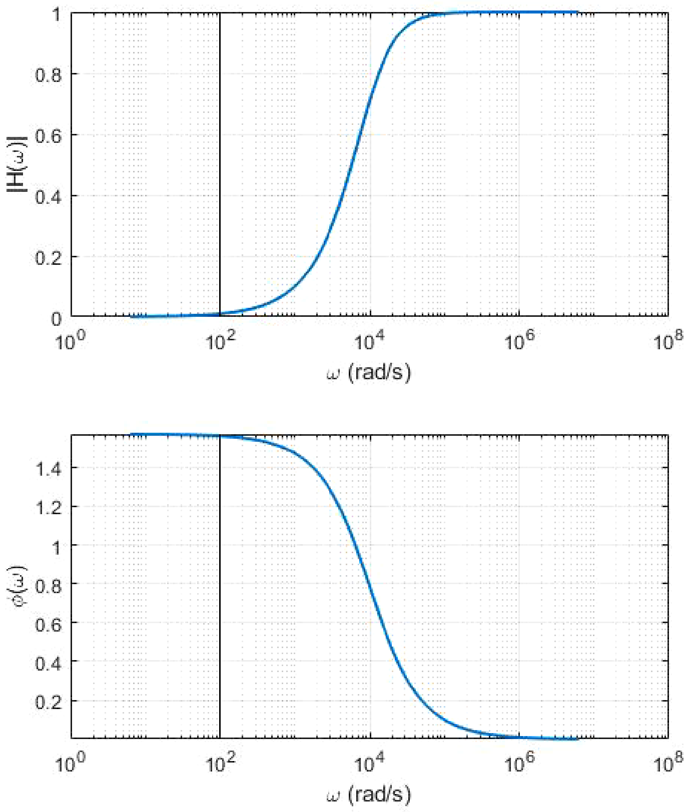


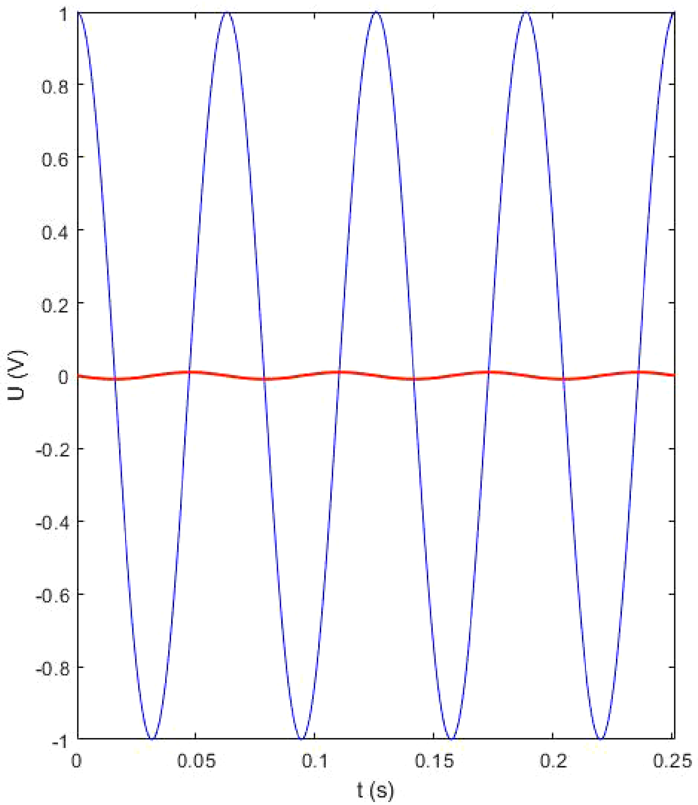
$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{\frac{L}{R}\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} \\ \phi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L}{R}\omega\right) \end{cases}$$



C. Lafforgue

Circuit RL


|H(ω)|
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10^0 10^2 10^4 10^6 10^8
ω (rad/s)
φ(ω)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
10^0 10^2 10^4 10^6 10^8
ω (rad/s)


U (V)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
t (s)

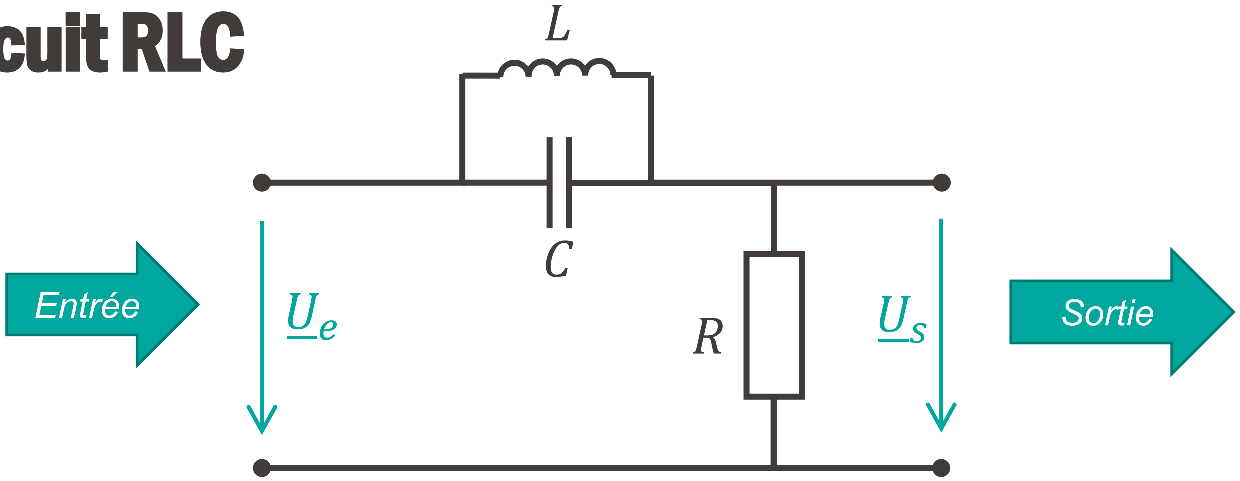
Caractéristique

- On quantifie la bande passante de ce filtre par la **fréquence de coupure**

  - C'est la fréquence telle que:

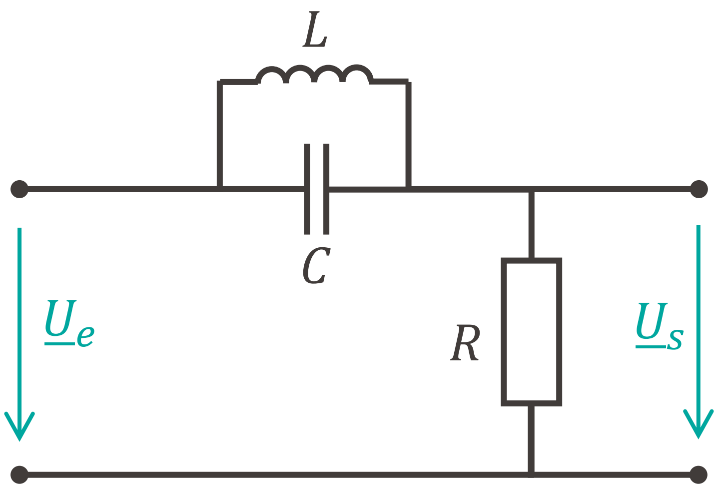
$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

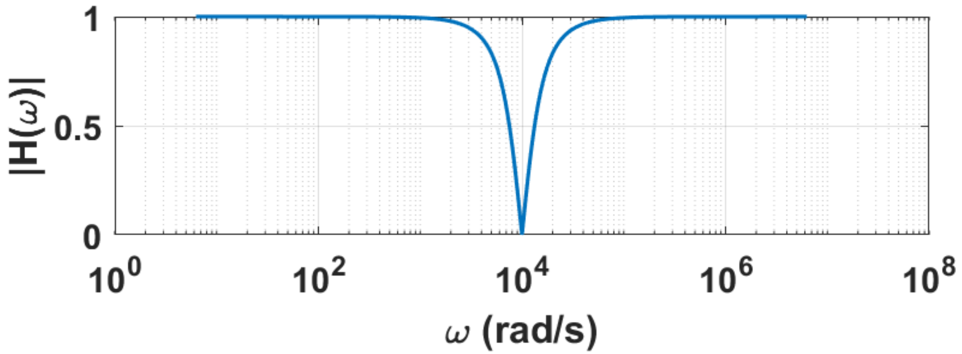
Circuit RLC



Circuit RC

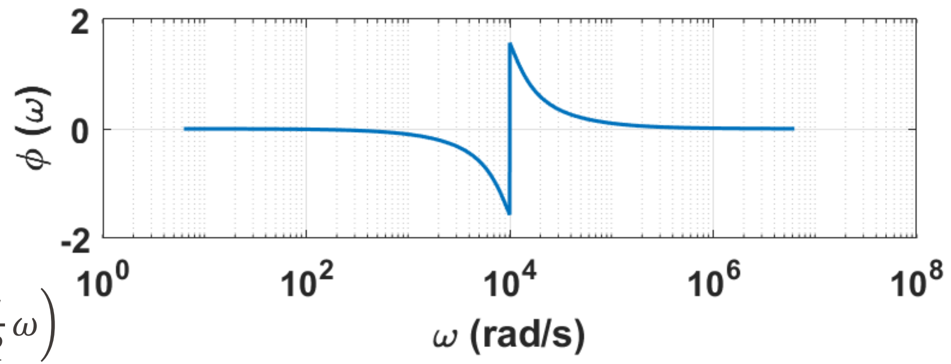
$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$C = 100\ \mathrm{nF}$
$L = 100\ \mathrm{mH}$





$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

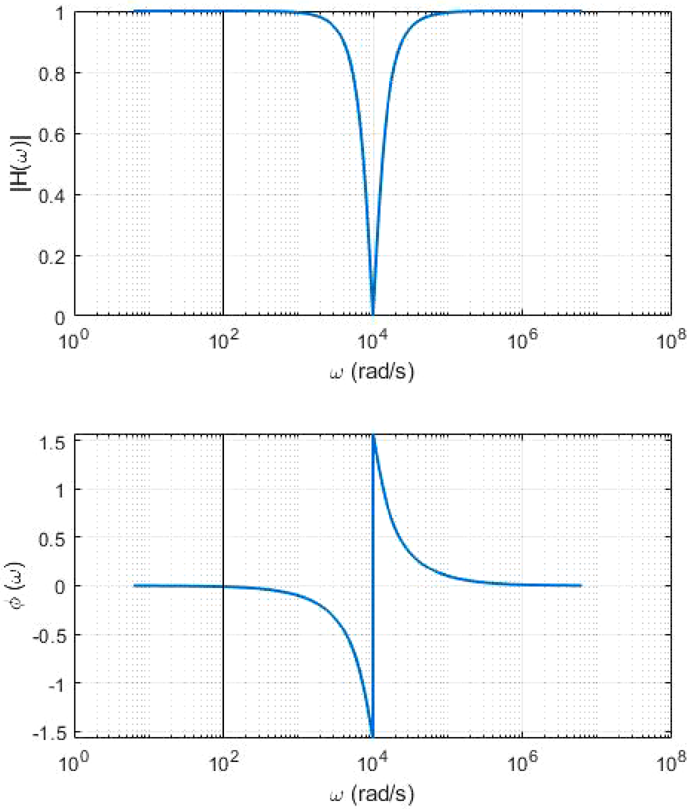
$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{|1 - LC\omega^2|}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} \\ \phi(\omega) = \arg(1 - LC\omega^2) - \arg\left(1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega\right) \end{cases}$$

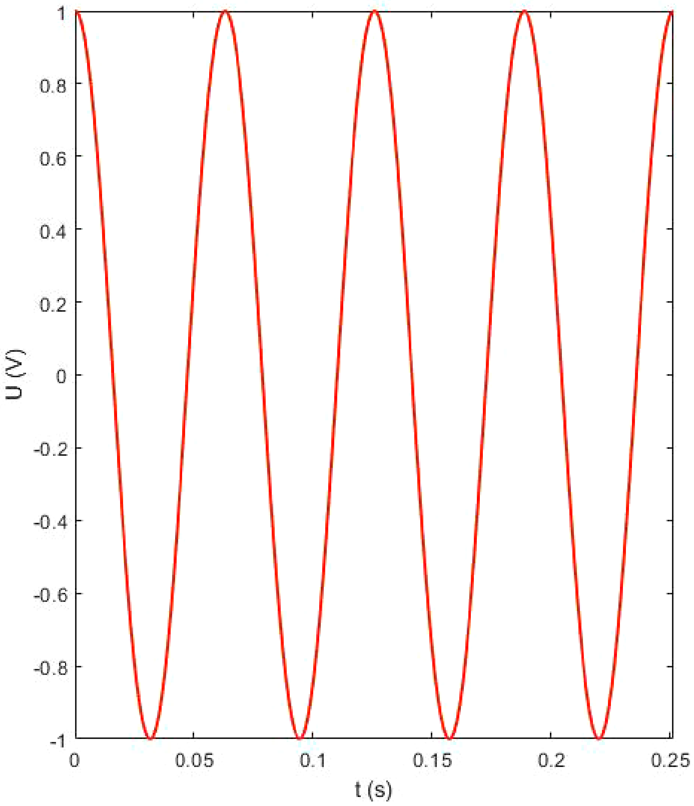


Caractéristique

- La fréquence centrale est donnée par la fréquence à laquelle la sortie s'annule

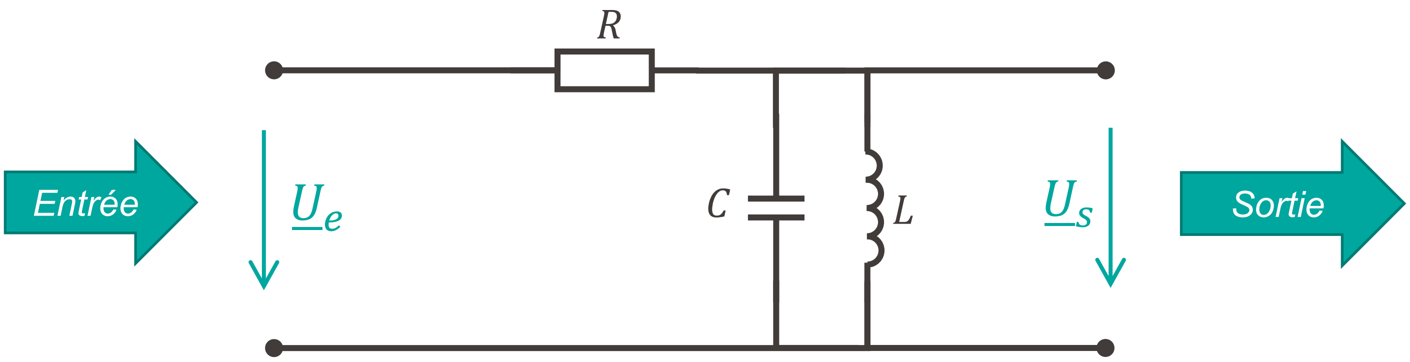
Circuit RLC





Circuit RLC

C. Lafforgue



$$\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}\underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

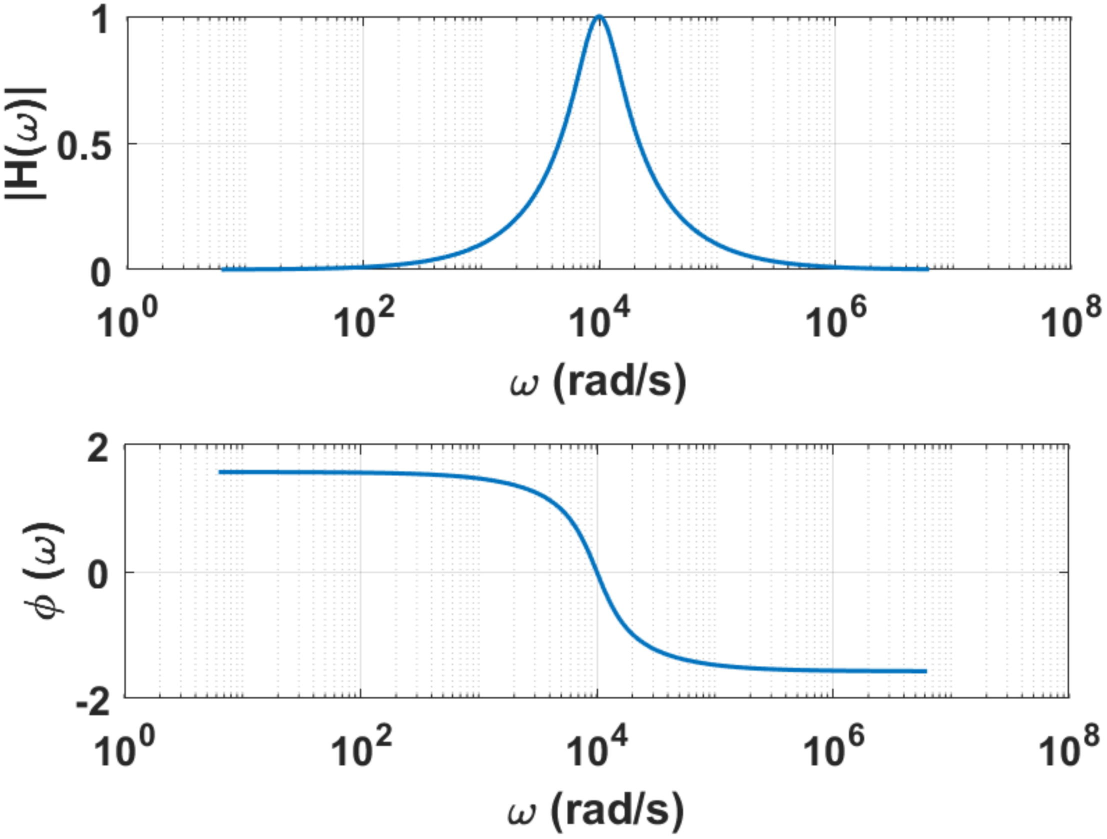
Circuit RLC

C. Lafforgue

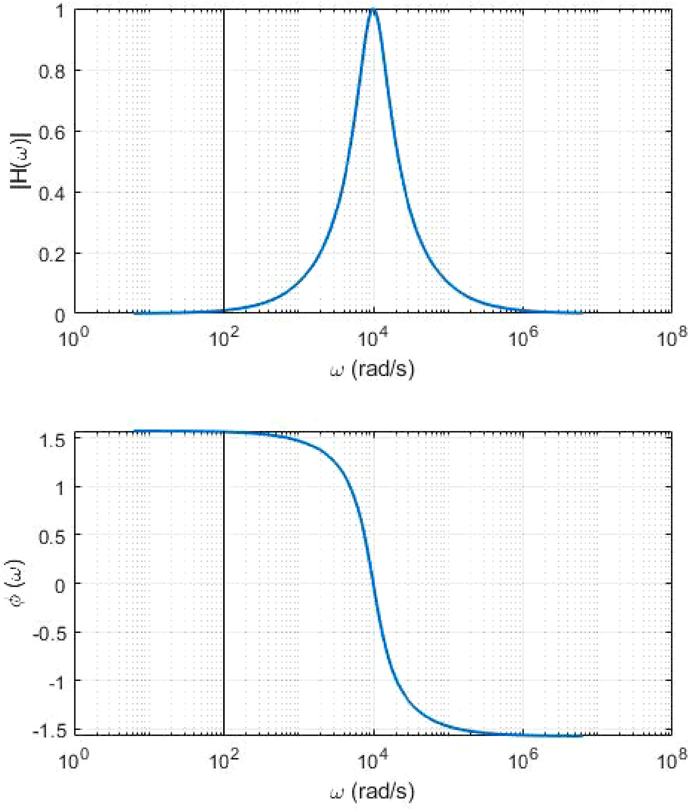
$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$
$L = 10\ \mathrm{mH}$
$C = 100\ \mathrm{\mu F}$

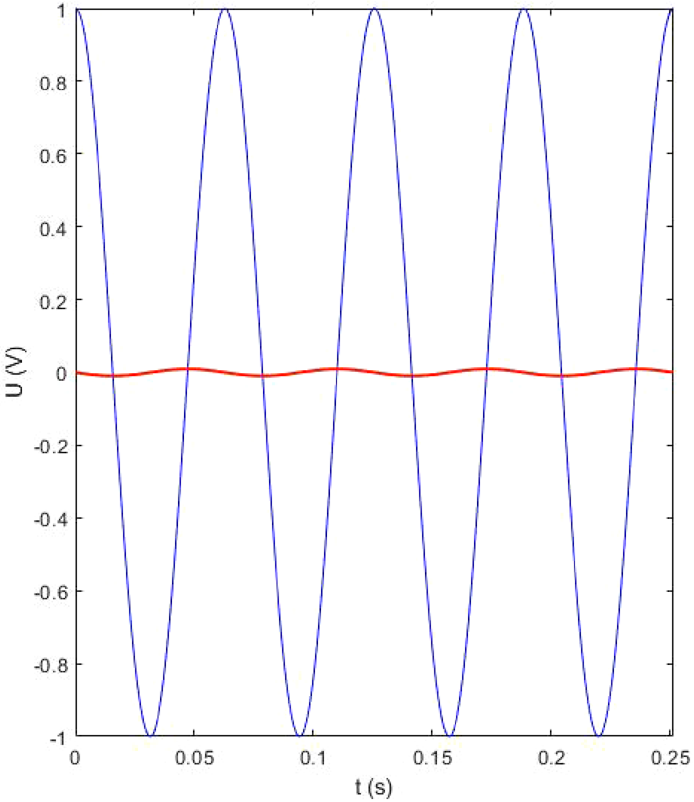
$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{L\omega}{R\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arg\left(1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega\right)$$



Circuit RLC





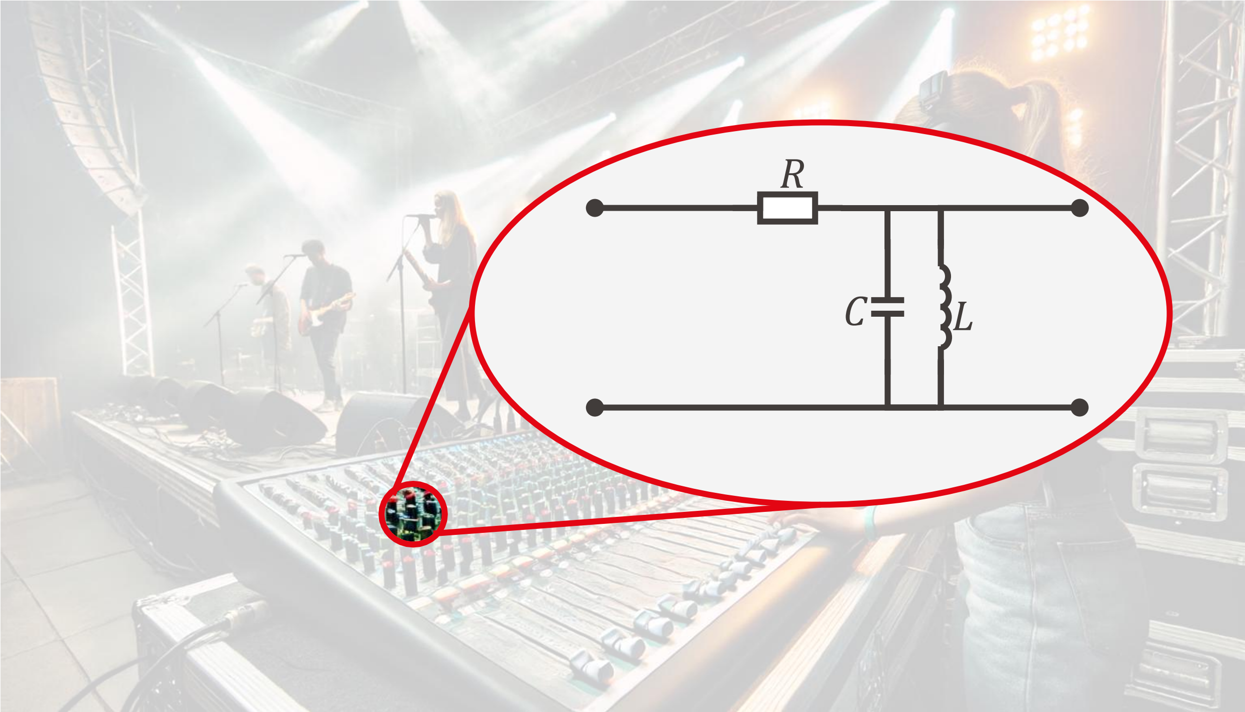
Exemple: ingénierie du son

Exemple: ingénierie du son

- C’est quoi le son?

Exemple: ingénierie du son

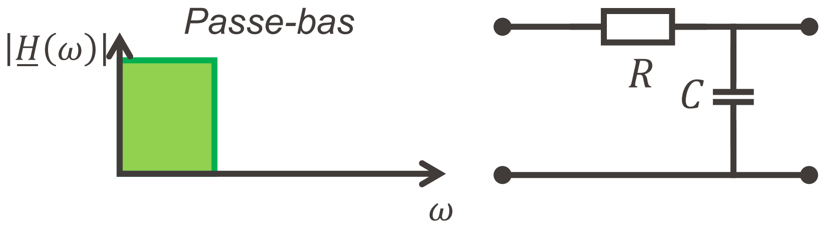
Exemple: ingénierie du son

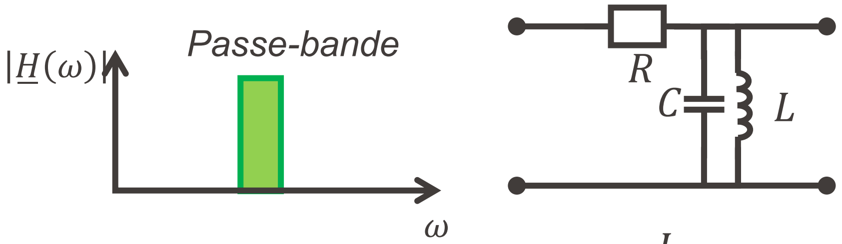


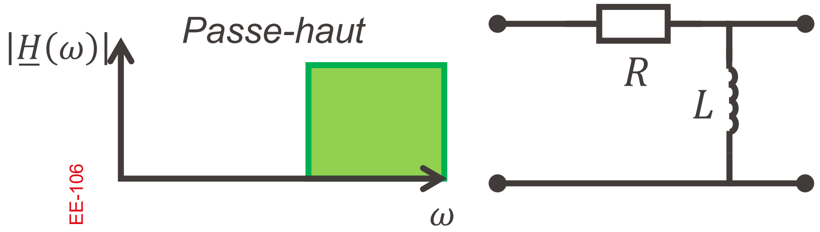
Points clés

- Il est possible de créer n'importe quelle forme de filtre avec des résistances, des condensateurs et des inductances

- Il y a 4 familles principales de filtres







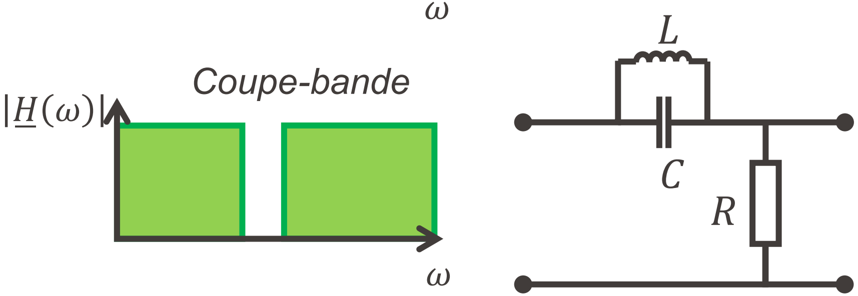


Diagramme de Bode

$$\underline{H}(\omega) = \frac{0.56(1 + j723\omega)^2(52.7 + j63\omega)(13 + j563\omega)}{(1 + j85.5\omega)(-78.6 - j41\omega)(j\omega)^4}$$

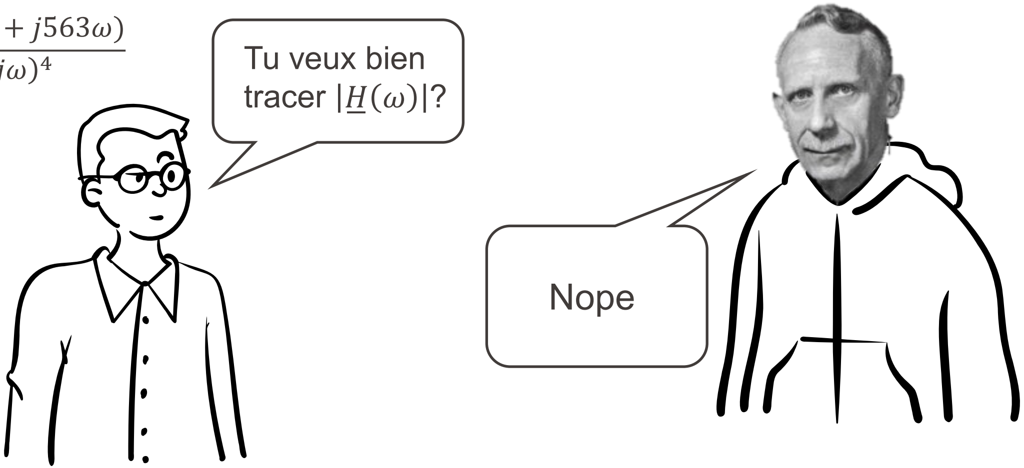


Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système
  - Il permet une résolution graphique simplifiée
  - Il sert à visualiser rapidement le gain et la phase en fonction de la fréquence
  - Il se trace en échelle logarithmique

Hendrick Wade Bode
1905-1982
Ingénieur américain

Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega}{1 + j2\omega}$$

- Résolution « classique »

- Résolution en logarithme

Rappels sur les logarithmes:

- $\log_k(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(k)}$
- $\log_k(a \cdot b) = \log_k(a) + \log_k(b)$
- $\log_k(a^n) = n \cdot \log_k(a)$
- $\log_k\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_k(x)$
- $\log_k(1) = 0$
- $\log_k(k) = 1$

Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Il est plus aisé et rapide d'étudier les fonctions de transfert en échelle logarithmique
  - On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)
  - Il est défini sur le gain: $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|\underline{H}(\omega)|)$

Diagramme de Bode – Tracé en échelle logarithmique

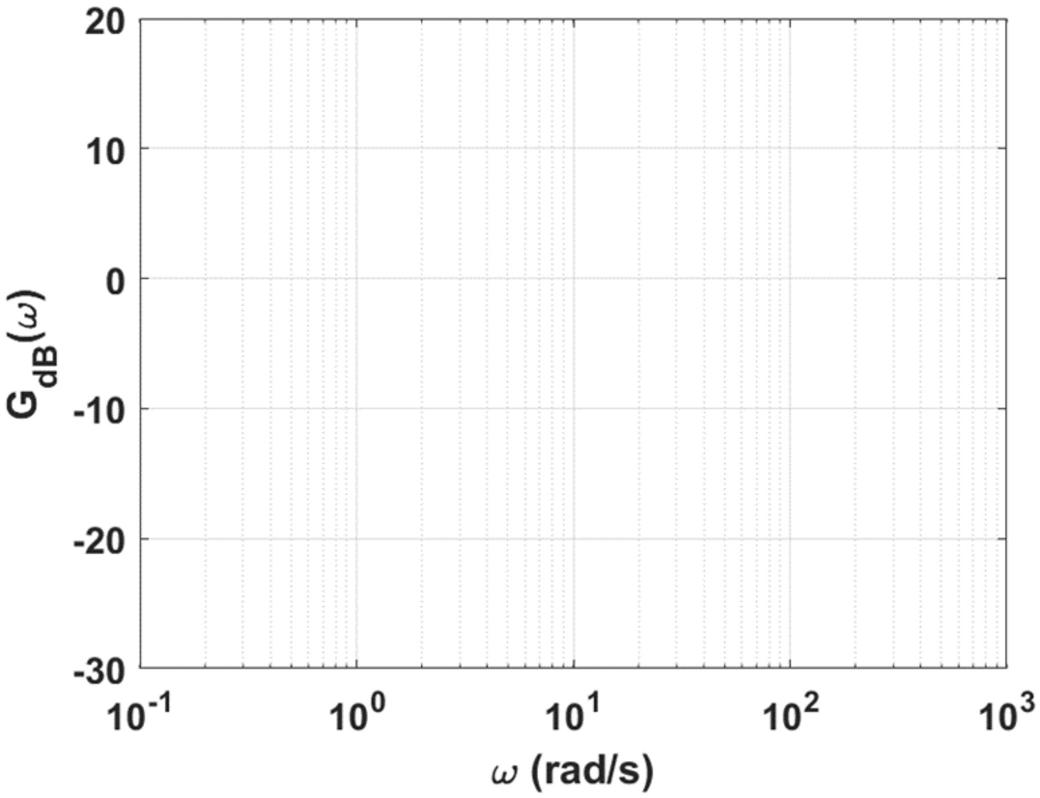
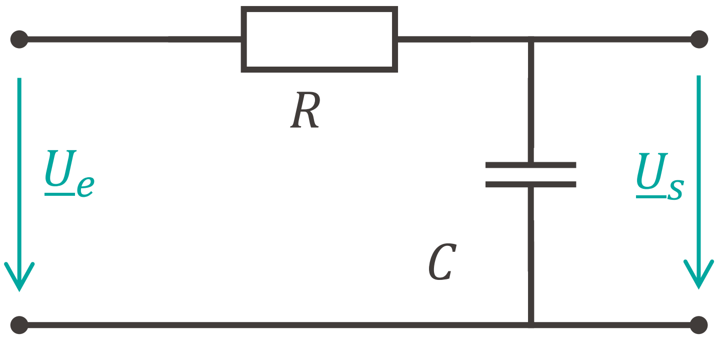


Diagramme de Bode - Exemple



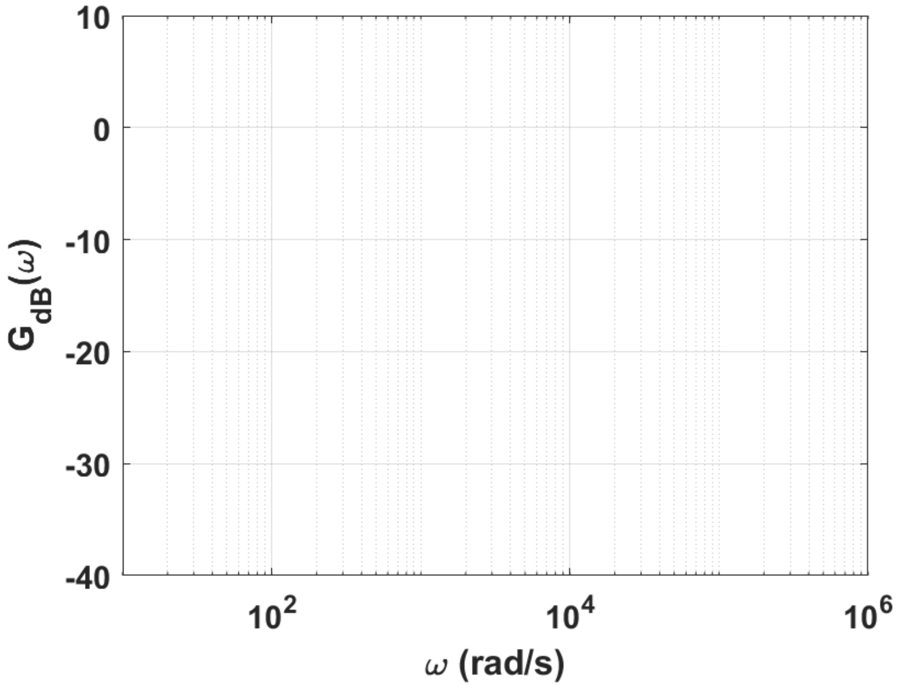
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

Diagramme de Bode - Exemple

C. Lafforgue

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

- Cas limites:
  - $\omega \to 0$
  - $\omega \to +\infty$



Que vaut la limite pour $\omega \to 0$?

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\right)$$

✓ A. 0 dB

B. 1 dB

C. $+\infty$ dB

D. $-\infty$ dB

E. 20 dB

F. -20 dB

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Diagramme de Bode - Exemple

C. Lafforgue

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

$$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$$
$$C = 100\ \mathrm{nF}$$

- Cas limites:
  - $\omega \to 0$
  - $\omega \to +\infty$

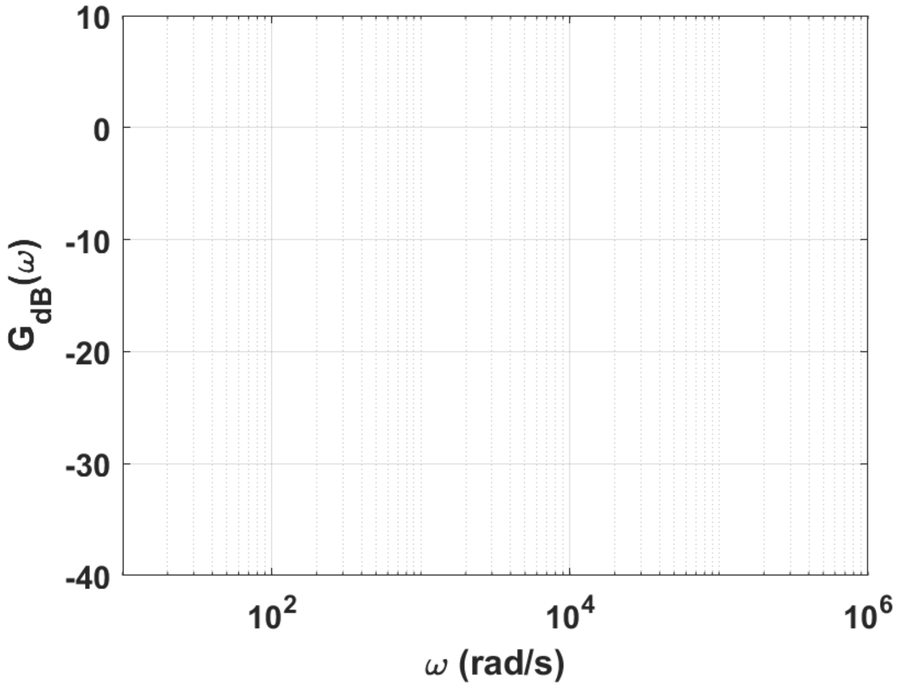
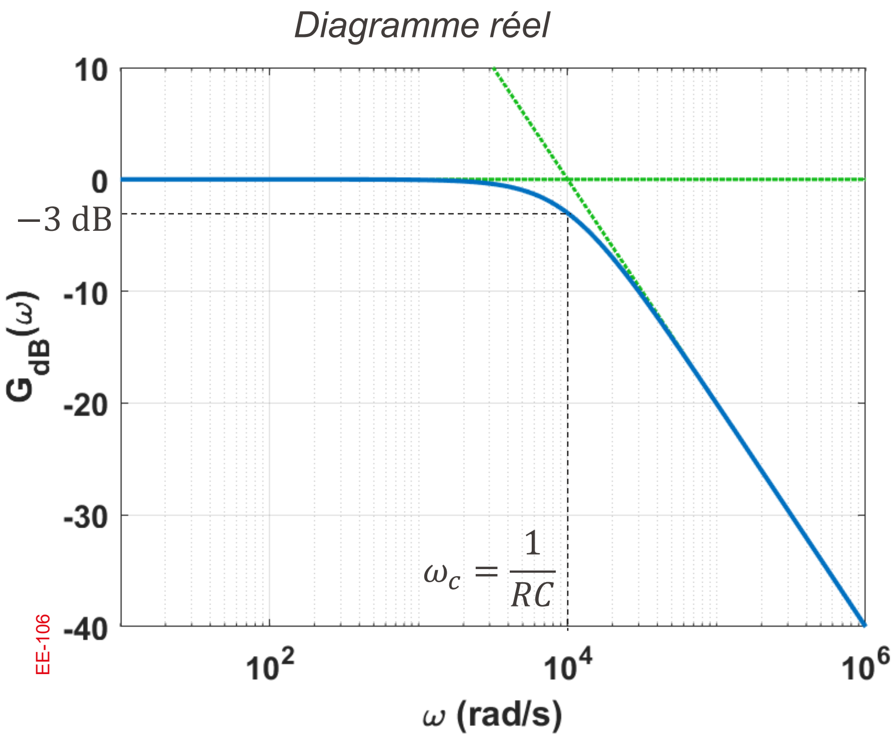


Diagramme de Bode - Exemple

C. Lafforgue

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$



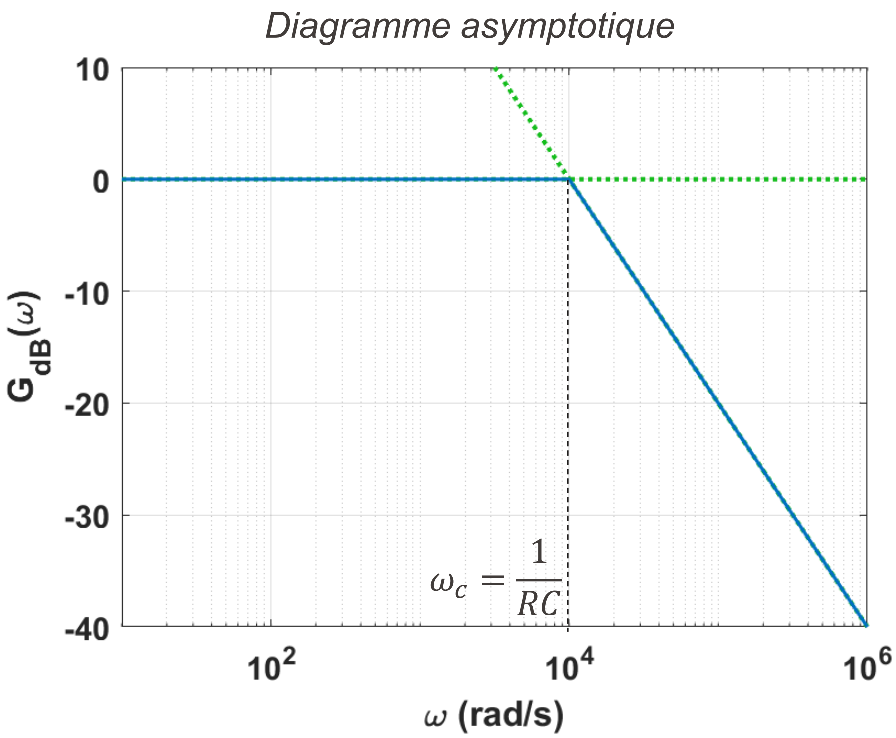


Diagramme de Bode

- On s'intéresse ici aux fonctions de transfert de la forme:

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{(j\omega)^N \left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_2}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_n}\right)}$$

- Pour tracer le gain de ces fonctions, il suffit de connaitre quelques formes simples:

$$K\ ; \frac{1}{(j\omega)^N}\ ; \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\ ; \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Diagramme de Bode – Constante K

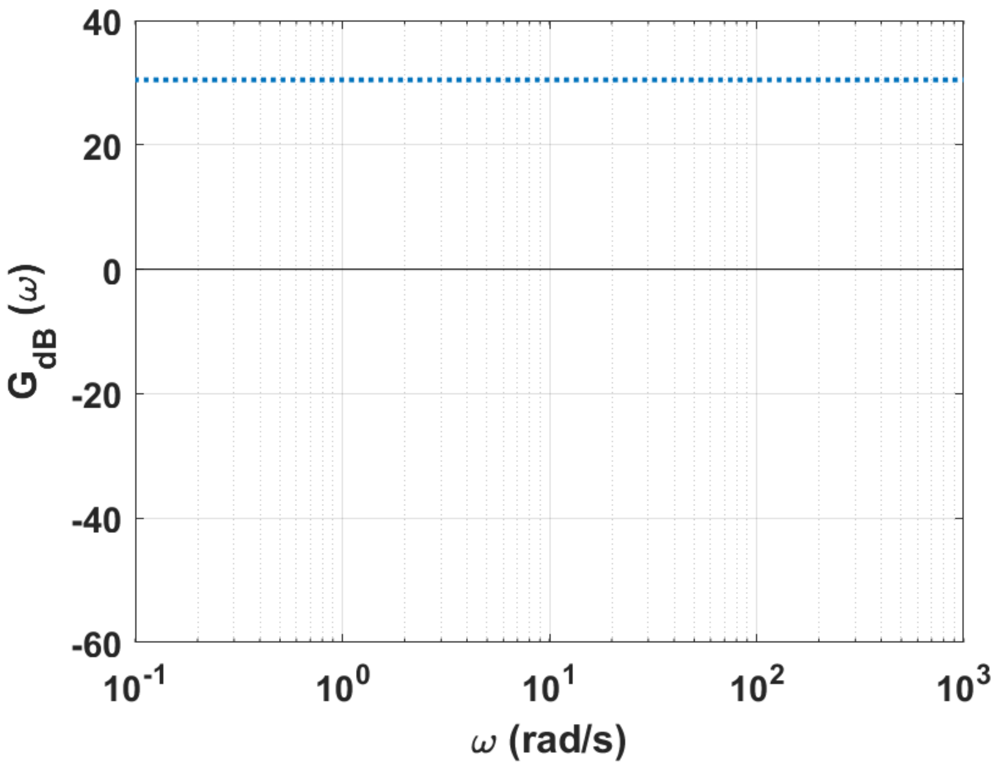
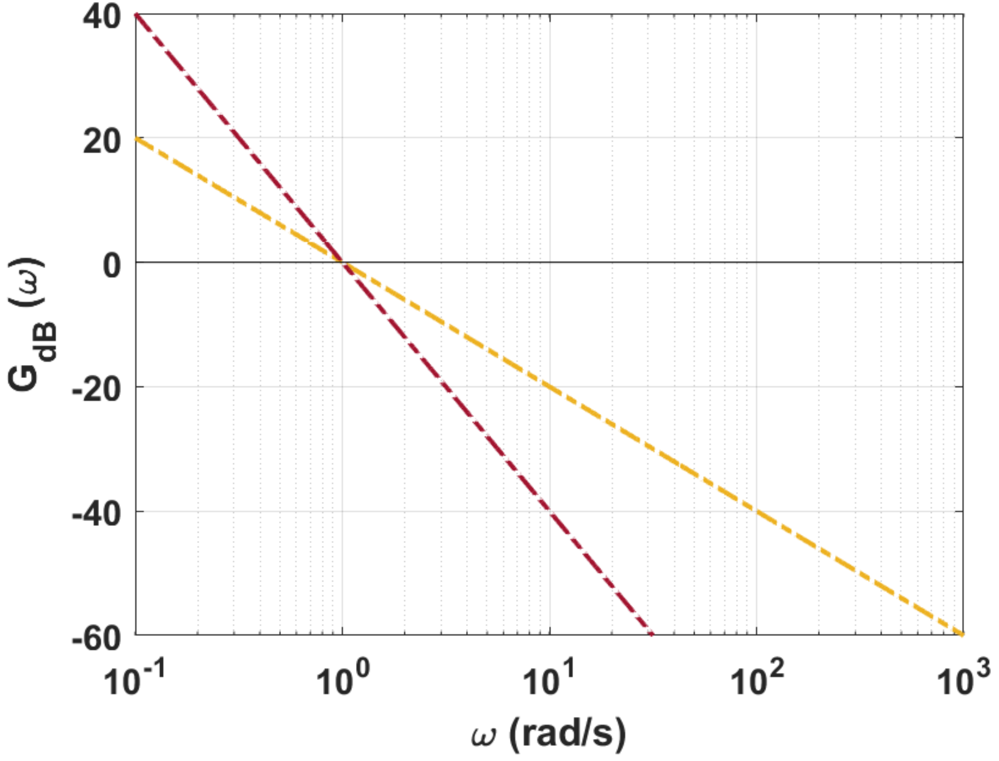


Diagramme de Bode – Terme $\frac{1}{(j\omega)^N}$ avec $N > 0$



C. Lafforgue

Diagramme de Bode – Terme $\dfrac{1}{(j\omega)^N}$ avec $N < 0$

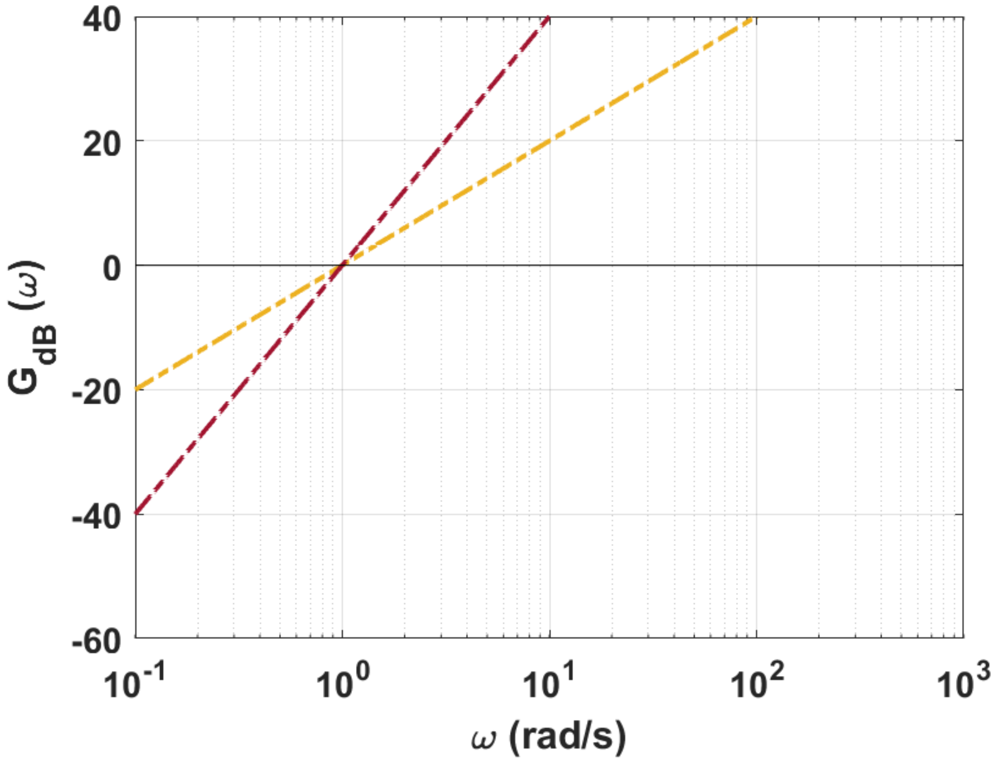


Diagramme de Bode – Terme $1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}$

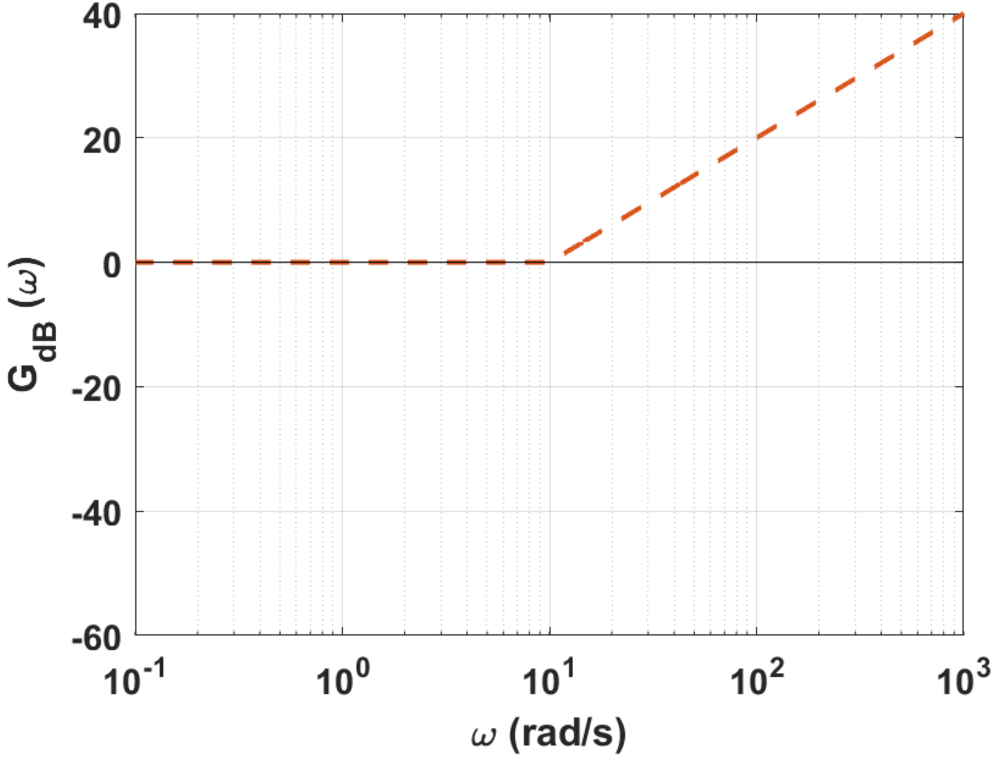
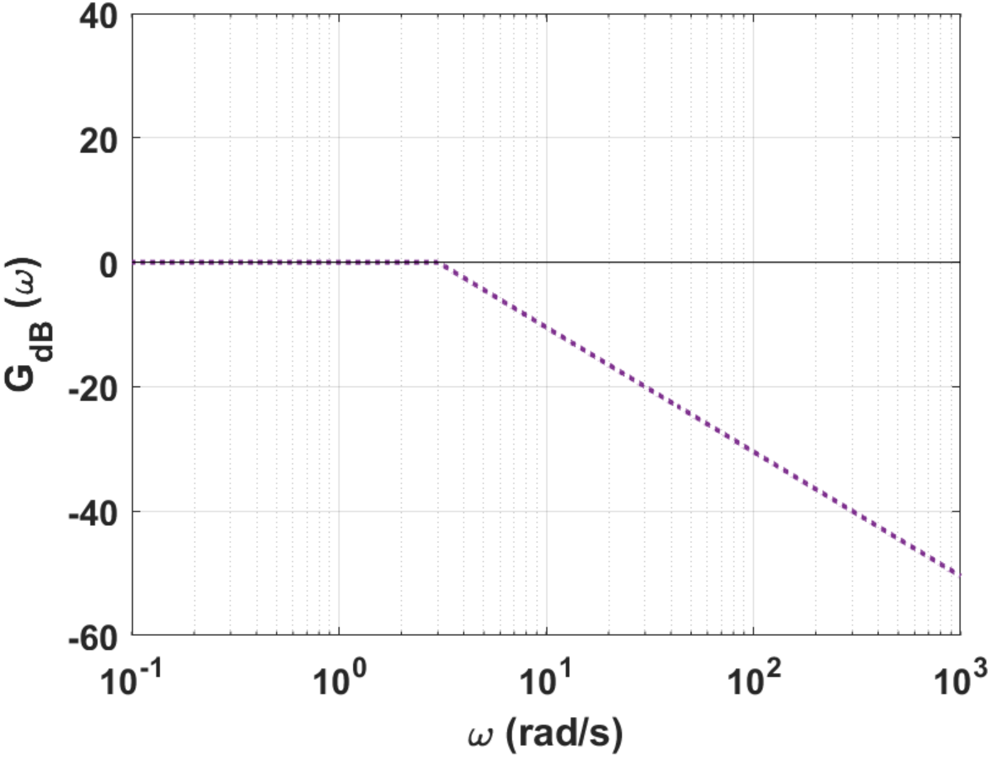
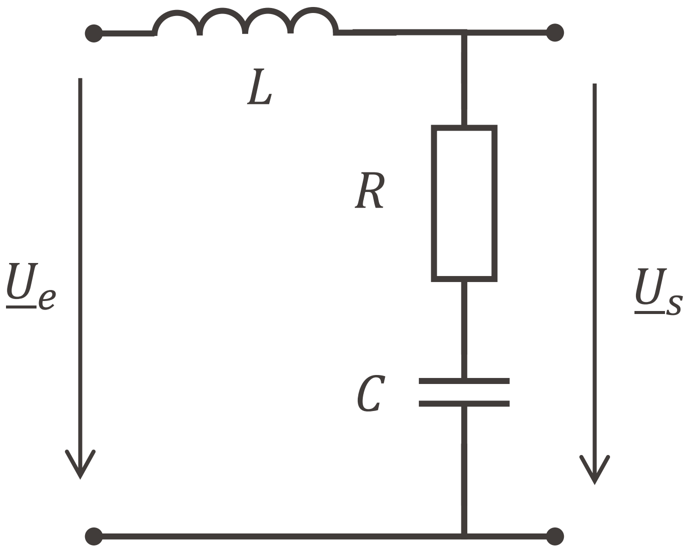


Diagramme de Bode – Terme $\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$



Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$R = 10\ \Omega$
$C = 100\ \text{mF}$
$L = 200\ \text{mH}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega - 0.02\omega^2}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{1}}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|1 + j\frac{\omega}{1}\right|\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{5}\right|}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|}\right)$$

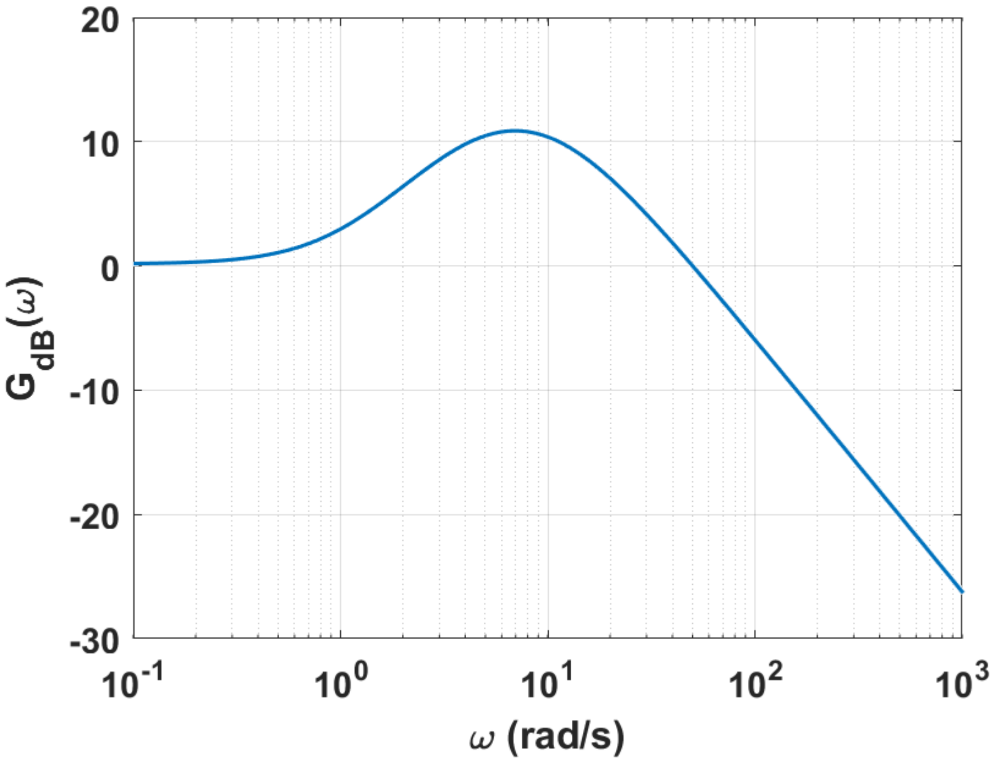
C. Lafforgue

Exemple

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|1 + j\,\frac{\omega}{1}\right|\right)$$

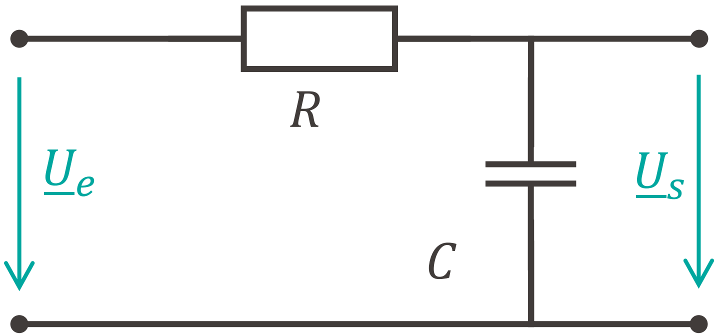
$$+20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{5}\right|}\right)$$

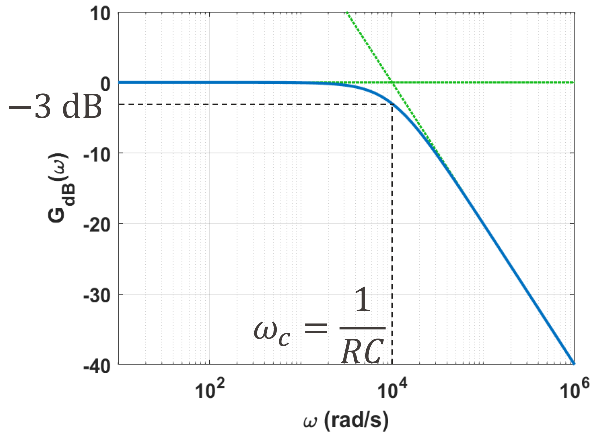
$$+20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|}\right)$$



Points clés

- Le diagramme de Bode est un outil graphique pour étudier un système en régime permanent sinusoïdal
  - On trace la gain et la phase en échelle logarithmique
- On peut facilement tracer un diagramme asymptotique
  - Uniquement en traçant des droites
- On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)





Merci pour votre attention

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris