

# Information, Calcul et Communication

## Module 3 : Systèmes

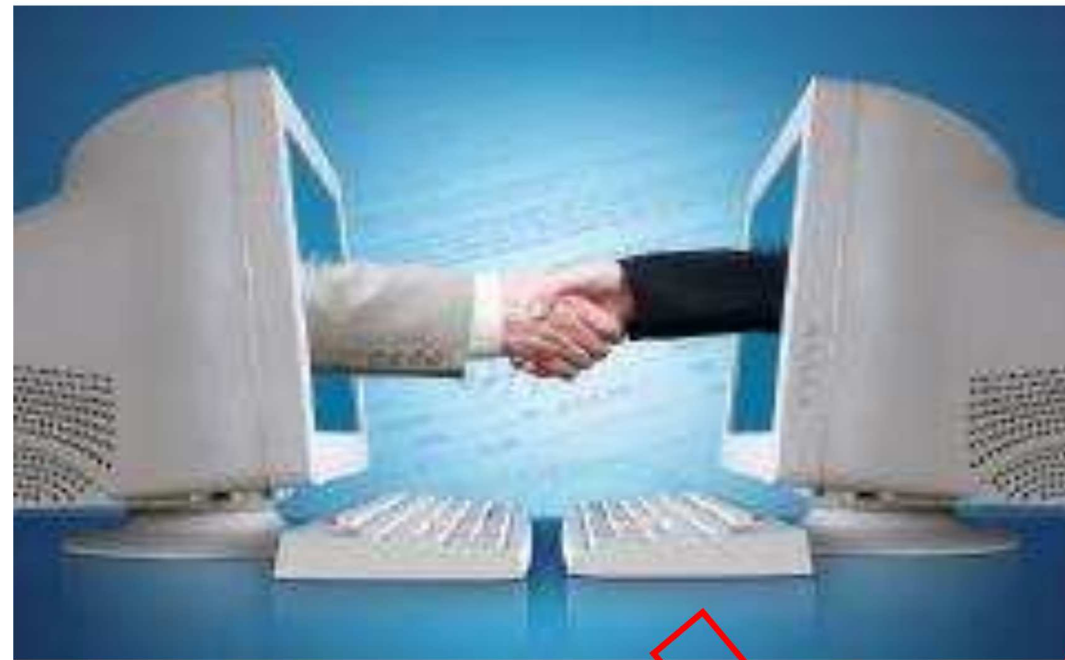
# Information, Calcul et Communication

## Sécurité des systèmes informatiques

Ph. Janson & J.-C. Chappelier

# Motivation

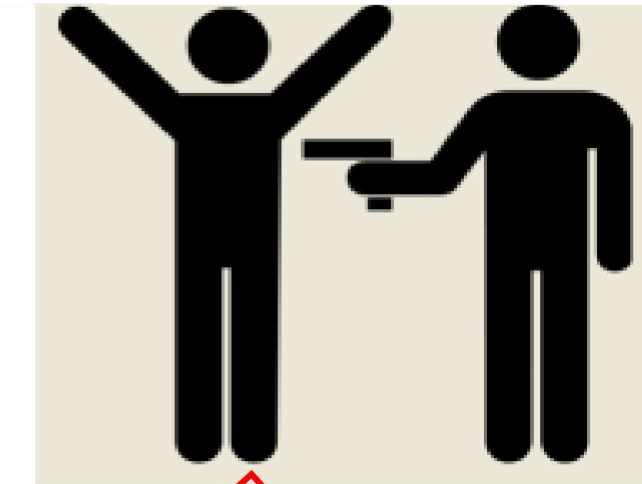
L'univers numérique doit être sécurisé au même titre que le monde physique



Les **affaires** se traitent de plus en plus en ligne ...



... donc de plus en d'**argent** et **de pouvoir** passent par Internet



... donc **criminalité** et conflits politiques se déroulent de plus en plus en ligne



... car ils suivent toujours argent et pouvoir

# Principes de base



- ▶ **La sécurité totale n'existe pas** plus dans le monde informatique que dans le monde physique
- ▶ Dans les deux cas elle est
  - ▶ Une course aux armements entre mécanismes d'attaque et de défense
  - ▶ Un **compromis** entre le **risque** d'une attaque et le **prix** de la défense
- ▶ Comme dans toute situation de défense, les attaques visent les **maillons faibles**
  - ▶ Généralement entre le siège et l'écran (utilisateurs ou opérateurs des systèmes informatiques)
- ▶ **L'éducation** des utilisateurs et des opérateurs est donc essentielle
  - ☞ C'est le but de ces deux leçons !

# Objectifs de ces deux leçons

Comment sécuriser le monde numérique ?

- ▶ En quoi et comment les systèmes informatiques et leur contenu sont **menacés** et **menacent** indirectement les individus dans leur sphère privée ?
- ▶ Quels sont les principes de base à respecter et les **mécanismes** fondamentaux à déployer pour **protéger** l'information, les systèmes qui la traitent, et les réseaux qui la transportent ?
- ▶ Quels sont les moyens techniques utilisés (**cryptographie**) pour garantir *confidentialité*, *intégrité* des données et *responsabilité* des utilisateurs ?
- ▶ Quelles sont les principales **règles de bonne conduite** des utilisateurs et administrateurs de systèmes informatiques pour se protéger contre les hackers et leurs maliciels ?

# Plan de la leçon

- ▶ Principes de base
  - ▶ Menaces et Défenses
  - ▶ Exemple d'équilibre : cas de la destruction/perte
- ▶ Cryptographie
  - ▶ Cadre général
  - ▶ Cryptographie symétrique et asymétrique
  - ▶ Confidentialité :
    - ▶ Cryptographie parfaite et algorithmique
    - ▶ One-Time Pad
    - ▶ RSA
  - ▶ Intégrité
  - ▶ Responsabilité

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**
- ▶ les **applications** qui les gèrent

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**
- ▶ les **applications** qui les gèrent
- ▶ les **logiciels** qui les hébergent

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**
- ▶ les **applications** qui les gèrent
- ▶ les **logiciels** qui les hébergent
- ▶ les **ordinateurs** qui les exécutent

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**
- ▶ les **applications** qui les gèrent
- ▶ les **logiciels** qui les hébergent
- ▶ les **ordinateurs** qui les exécutent
- ▶ les **réseaux** qui les relient

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**
- ▶ les **applications** qui les gèrent
- ▶ les **logiciels** qui les hébergent
- ▶ les **ordinateurs** qui les exécutent
- ▶ les **réseaux** qui les relient
- ▶ les **bâtiments** qui les renferment

# Les menaces : 1. leurs objectifs

Objectifs des menaces sur les systèmes d'information :

- ▶ les **informations**
  - ▶ les **applications** qui les gèrent
  - ▶ les **logiciels** qui les hébergent
  - ▶ les **ordinateurs** qui les exécutent
  - ▶ les **réseaux** qui les relient
  - ▶ les **bâtiments** qui les renferment
- ☞ et au travers de tout cela : les **personnes** concernées (utilisateurs)

# Les menaces : 2. leur nature



Nature des menaces :

- ▶ le **vol** d'informations

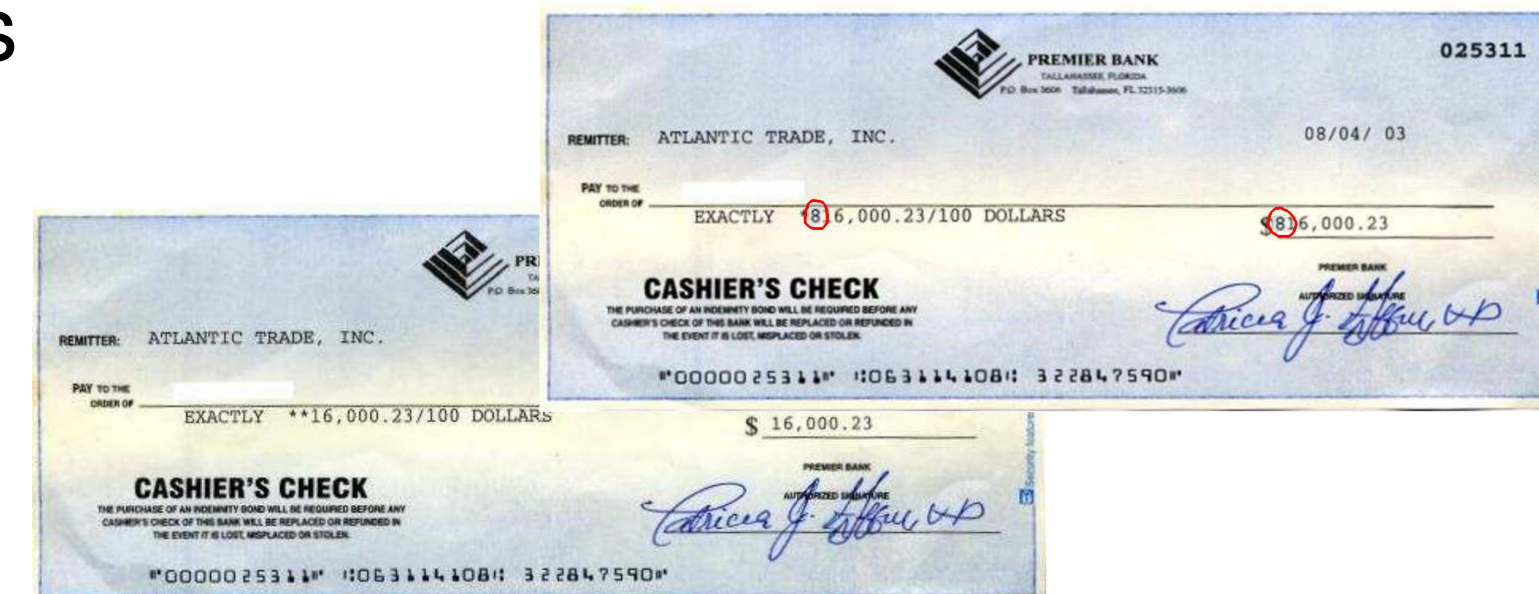


# Les menaces : 2. leur nature



Nature des menaces :

- ▶ le **vol** d'informations
- ▶ la **manipulation** d'informations



# Les menaces : 2. leur nature



Nature des menaces :

- ▶ le **vol** d'informations
- ▶ la **manipulation** d'informations
- ▶ la **destruction** d'informations



# Les menaces : 2. leur nature



Nature des menaces :

- ▶ le **vol** d'informations
- ▶ la **manipulation** d'informations
- ▶ la **destruction** d'informations
- ▶ le **démenti**

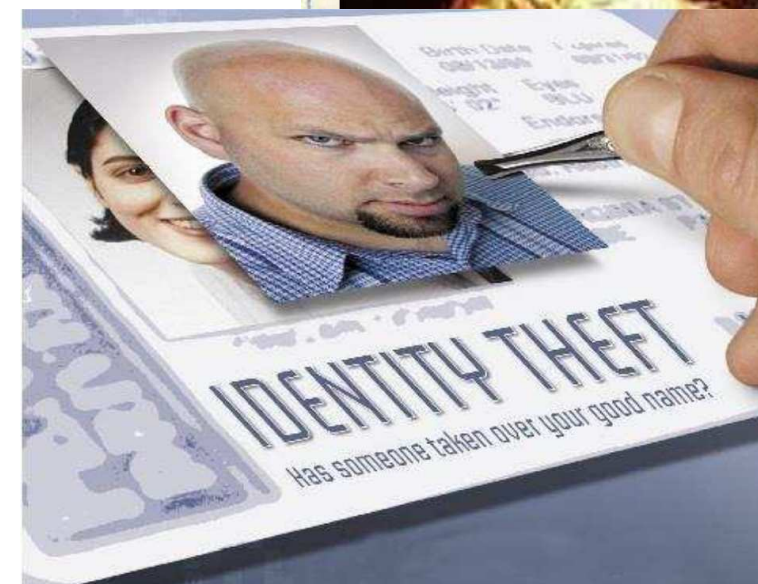


# Les menaces : 2. leur nature



Nature des menaces :

- ▶ le **vol** d'informations
- ▶ la **manipulation** d'informations
- ▶ la **destruction** d'informations
- ▶ le **démenti**
- ▶ l'**usurpation d'identité**



# Les menaces : 2. leur nature



Nature des menaces :

- ▶ le **vol** d'informations
- ▶ la **manipulation** d'informations
- ▶ la **destruction** d'informations
- ▶ le **démenti**
- ▶ l'**usurpation d'identité**
- ▶ le **contournement** des défenses



# Les menaces : 3. leurs sources

Sources des menaces :

- ▶ **Environnementales** : catastrophes naturelles

**Note** : des accidents de nature *environnementale* sont souvent source d'abus de nature *humaine* et d'attaques de nature *technique*.

# Les menaces : 3. leurs sources

Sources des menaces :

- ▶ **Environnementales** : catastrophes naturelles

**Note** : des accidents de nature *environnementale* sont souvent source d'abus de nature *humaine* et d'attaques de nature *technique*.

- ▶ **Humaines**

- ▶ internes :

- ▶ erreurs
- ▶ abus de privilèges

- ▶ externes :

- ▶ manipulation sociales (abus de confiance, mensonge, tromperie, corruption, etc.)
- ▶ attaques physiques (espionnage, vol, sabotage, destruction, etc.)

# Les menaces : 3. leurs sources

Sources des menaces :

- ▶ **Environnementales** : catastrophes naturelles

**Note** : des accidents de nature *environnementale* sont souvent source d'abus de nature *humaine* et d'attaques de nature *technique*.

- ▶ **Humaines**

- ▶ internes :

- ▶ erreurs

- ▶ abus de privilèges

- ▶ externes :

- ▶ manipulation sociales (abus de confiance, mensonge, tromperie, corruption, etc.)

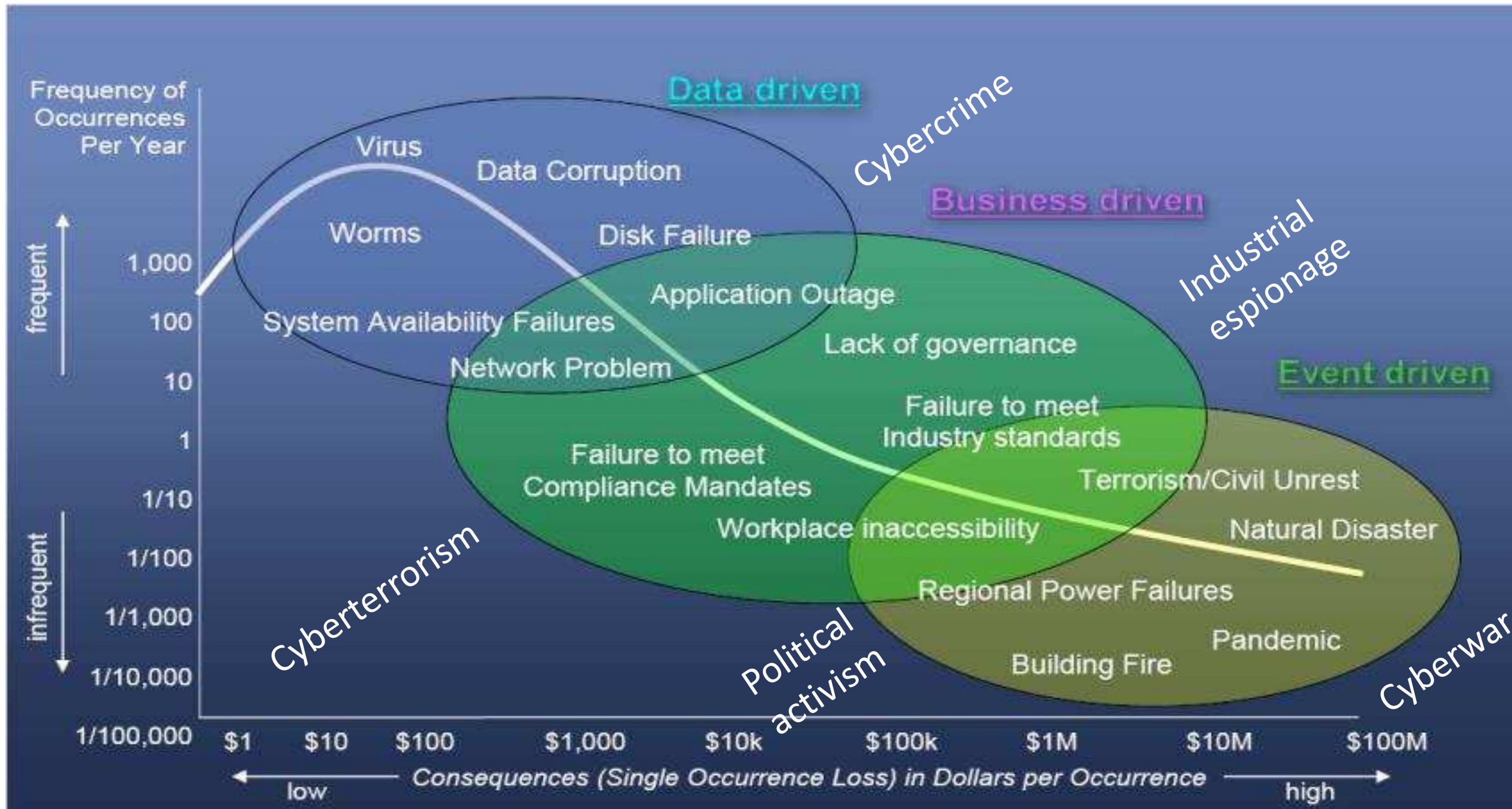
- ▶ attaques physiques (espionnage, vol, sabotage, destruction, etc.)

- ▶ **Techniques**

- ▶ attaques informatiques (par des humains) :  
exploitations de vulnérabilités logicielles

- ▶ maliciels (logiciels malveillants : virus, vers, chevaux de Troie, etc.)

# Les menaces : 4. ampleur...



Reprinted by courtesy of International Business Machines Corporation,  
© (2008-2009) International Business Machines Corporation

Source: IBM Security Technology Outlook 2008

# Les menaces : 4. ampleur... ..et relativité

- ▶ Coût annuel de la cybercriminalité :  $0.5$  à  $1.5 \cdot 10^{12}$ \$ (2016, suivant les sources)
  - ▶ Nombre de vulnérabilités logicielles > 60 K (IBM)
  - ▶ Nombre de maliciels identifiés > 150 M (Webroot.com, 2016)
  - ▶ Nombre de sites web infectés > 1.3 M (Dasient.com, 2010)
  - ▶ Taux de spam 50-60% (statista.com)
  - ▶ Plus gros vol de données :  $3 \cdot 10^9$  utilisateurs (Yahoo, 2013)
  - ▶ 15'833 téléphones portables perdus dans le métro londonien en 2013  
(source : McAfee à partir de données de Transport for London)
  - ▶ statistiques en temps réel sur les attaques en cours :  
<https://cybermap.kaspersky.com/>  
<https://threatmap.checkpoint.com/ThreatPortal/livemap.html>  
<http://www.digitalattackmap.com/>
- 👉 aussi impressionnants que soient ces chiffres absolus, ils indiquent un **équilibre relatif entre coût des risques et prix des défenses**

# Les défenses



Les menaces étaient :

- ▶ le *vol* d'informations
- ▶ la *manipulation* d'informations
- ▶ la *destruction* d'informations
- ▶ le *démenti*
- ▶ l'*usurpation d'identité*
- ▶ le *contournement* des défenses

les combattre exige :

- ▶ **confidentialité** des informations
- ▶ vérification de l'**intégrité** des informations
- ▶ **disponibilité** des informations
- ▶ **responsabilisation** des utilisateurs
- ▶ **authentification** des utilisateurs/des processus
- ▶ hiérarchisation des **autorisations** des utilisateurs/des processus

👉 L'ultime objectif : contrôler qui a quel droit

# Plan de la leçon

- ▶ Principes de base
  - ▶ Menaces et Défenses
  - ▶ **Exemple d'équilibre : cas de la destruction/perte**
- ▶ Cryptographie
  - ▶ Cadre général
  - ▶ Cryptographie symétrique et asymétrique
  - ▶ Confidentialité :
    - ▶ Cryptographie parfaite et algorithmique
    - ▶ One-Time Pad
    - ▶ RSA
  - ▶ Intégrité
  - ▶ Responsabilité

# Destruction : équilibre menace/défense

## Destruction

- ▶ Menace : la perte ou l'indisponibilité des données
- ▶ Défense : la réplication des données
  - ☞ maintenir plusieurs copies (cohérentes !) des données

# Destruction : équilibre menace/défense

## Destruction

- ▶ Menace : la perte ou l'indisponibilité des données
- ▶ Défense : la réplication des données
  - ☞ maintenir plusieurs copies (cohérentes !) des données

## Équilibre menace/défense : **taux de réplication** :

- ▶ Tenir une seule autre copie sur une autre machine
  - ▶ Bien si la machine originelle tombe en panne
  - ▶ Pas suffisant si la machine originelle et la réplique tombent en panne/sont détruites

# Destruction : équilibre menace/défense

## Destruction

- ▶ Menace : la perte ou l'indisponibilité des données
- ▶ Défense : la réplication des données
  - ☞ maintenir plusieurs copies (cohérentes !) des données

## Équilibre menace/défense : **taux de réplication** :

- ▶ Tenir une seule autre copie sur une autre machine
  - ▶ Bien si la machine originelle tombe en panne
  - ▶ Pas suffisant si la machine originelle et la réplique tombent en panne/sont détruites
- ▶ Tenir *deux* copies sur d'autres machines
  - ▶ Bien si...
  - ▶ mais insuffisant si...

# Destruction : équilibre menace/défense

## Destruction

- ▶ Menace : la perte ou l'indisponibilité des données
- ▶ Défense : la réplication des données
  - ☞ maintenir plusieurs copies (cohérentes !) des données

## Équilibre menace/défense : **taux de réplication** :

- ▶ Tenir une seule autre copie sur une autre machine
  - ▶ Bien si la machine originelle tombe en panne
  - ▶ Pas suffisant si la machine originelle et la réplique tombent en panne/sont détruites
- ▶ Tenir *deux* copies sur d'autres machines
  - ▶ Bien si...
  - ▶ mais insuffisant si...
- ▶ ...

# Destruction : degré de défense

1. taux de réplication

mais aussi :

2. Localisation des répliques : à coté/à distance (quelle distance ?)

3. Mise à jour des répliques : à chaque fois/par heure/par jour/...

☞ Choix du niveau de défense approprié (coût : argent, temps, pénibilité) adapté au risque de menace

Exemples extrêmes :

▶  $N$  répliques lointaines mises à jour à chaque modification

▶ 1 réplique sur un disque à coté sauvegardé tous les soirs

# Plan de la leçon

- ▶ Principes de base
  - ▶ Menaces et Défenses
  - ▶ Exemple d'équilibre : cas de la destruction/perte
- ▶ **Cryptographie**
  - ▶ **Cadre général**
  - ▶ Cryptographie symétrique et asymétrique
  - ▶ Confidentialité :
    - ▶ Cryptographie parfaite et algorithmique
    - ▶ One-Time Pad
    - ▶ RSA
  - ▶ Intégrité
  - ▶ Responsabilité

# Buts de la cryptographie (1)

Les menaces étaient :

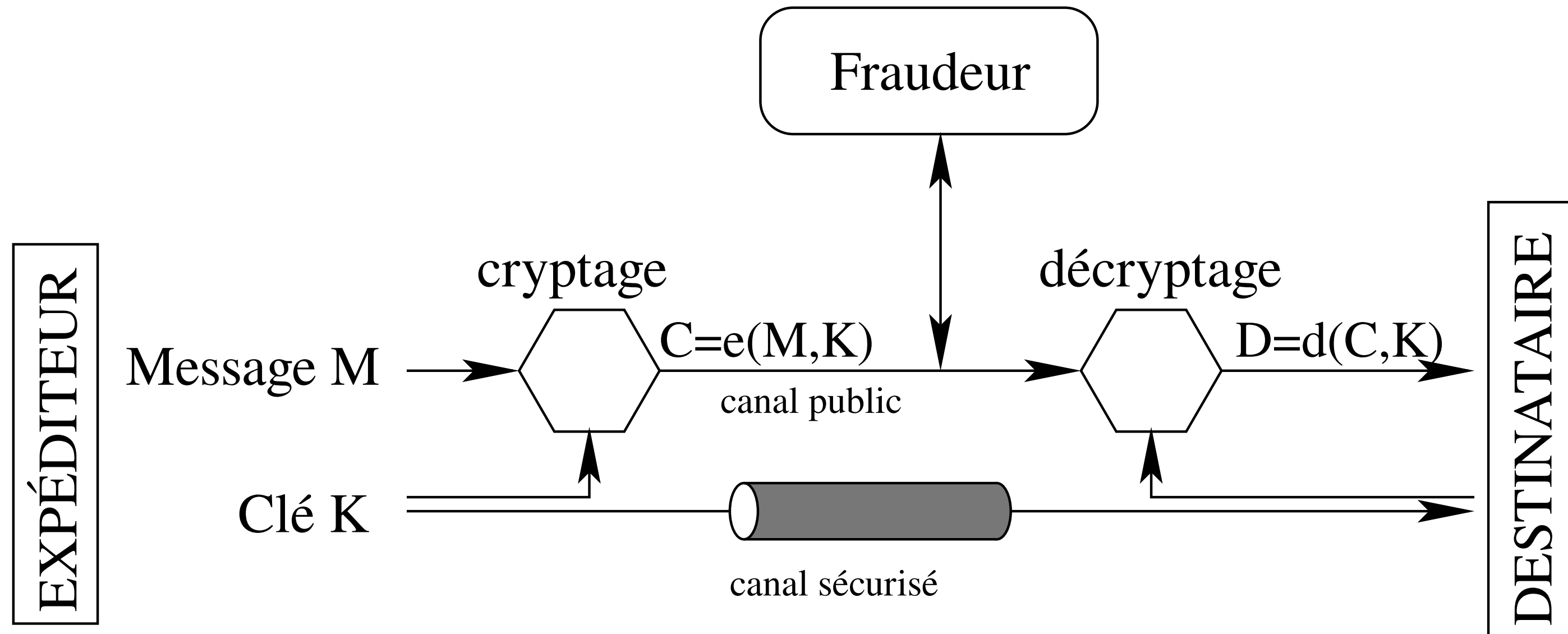
- ▶ le *vol* d'informations
- ▶ la *manipulation* d'informations
- ▶ la *destruction* d'informations
- ▶ le *démenti*
- ▶ l'*usurpation d'identité*
- ▶ le *contournement* des défenses

les combattre exige :

- ▶ **confidentialité** des informations
- ▶ vérification de l'**intégrité** des informations
- ▶ *disponibilité* des informations
- ▶ **responsabilisation** des utilisateurs
- ▶ *authentification* des utilisateurs/des processus
- ▶ hiérarchisation des *autorisations* des utilisateurs/des processus

👉 Confidentialité, intégrité et responsabilité via la **cryptographie**

# Cadre général (1)



$C = e(M, K)$  = message  $M$  chiffré avec la clé  $K$

$e(M, K)$  = fonction de chiffrage

$d(C, K)$  = fonction de déchiffrage

$d(e(M, K), K) = M$

## Buts de la cryptographie (2)

**Confidentialité** : protection des messages contre la lecture non autorisée :  
impossible d'obtenir le message  $M$  à partir de  $C = e(M, K)$  sans  $K$

**Intégrité** :  
impossible de substituer un autre message à la place de  $C$

**Responsabilité** :  
impossible d'attribuer un autre auteur à  $C$  (et donc à  $M$ )

👉 Le chiffrement devrait être universel, surtout à l'heure du « cloud » !

## Cadre général (2)

Hypothèses :

- ▶ les algorithmes de chiffrement/déchiffrement sont connus de tous
- ▶ le fraudeur peut intercepter  $C = e(M, K)$
- ▶ le fraudeur ne connaît pas la clé  $K$

## Cadre général (2)

Hypothèses :

- ▶ les algorithmes de chiffrement/déchiffrement sont connus de tous
- ▶ le fraudeur peut intercepter  $C = e(M, K)$
- ▶ le fraudeur ne connaît pas la clé  $K$

Niveaux d'attaque (« *cryptanalyse* » ; par difficulté décroissante) :

- ▶ trouver  $M$  ou  $K$  sachant seulement  $C (= e(M, K))$  ;
- ▶ trouver  $K$  connaissant  $(M, C)$  pour certains  $M$  connus ;
- ▶ trouver  $K$  en pouvant connaître  $(M, C)$  pour des  $M$  choisis.

# Chiffrage symétrique/asymétrique



Il y a deux grandes familles de crypto-systèmes :

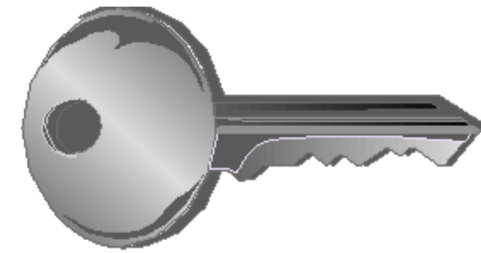
	Symétrique à clés secrètes	Asymétrique à clés publiques
Exemples :	<b>One-time pad</b> DES AES	<b>RSA</b> Diffie-Hellman courbes elliptiques
Confidentialité :	oui	oui
Intégrité :	oui	oui
Responsabilité :	non	oui

**Note :** on peut utiliser les deux en même temps (p.ex. envoi d'une clé privée d'un système symétrique par chiffrage asymétrique)

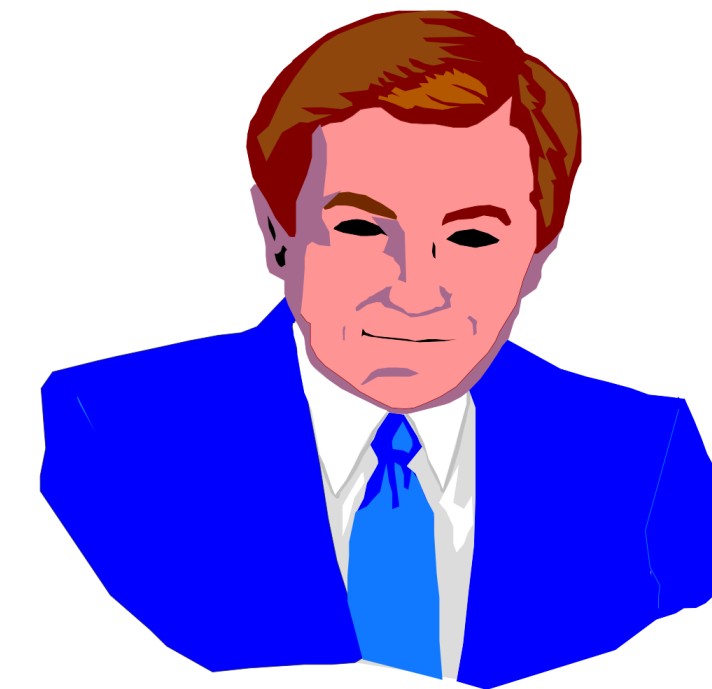
# Chiffrage symétrique

- ▶ Il n'y a qu'une seule clé
- ▶ La clé est échangée entre les partenaires, à l'avance, via un canal sécurisé
- ▶ Le message est chiffré et déchiffré avec la même clé

# Chiffrage symétrique

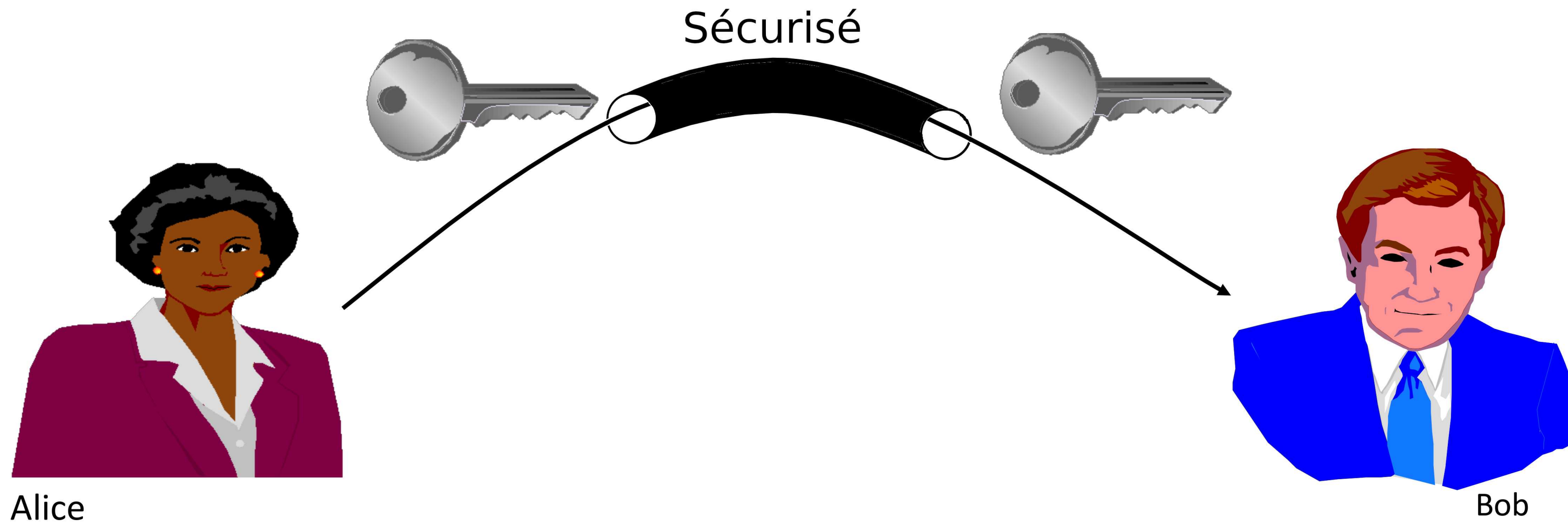


Alice

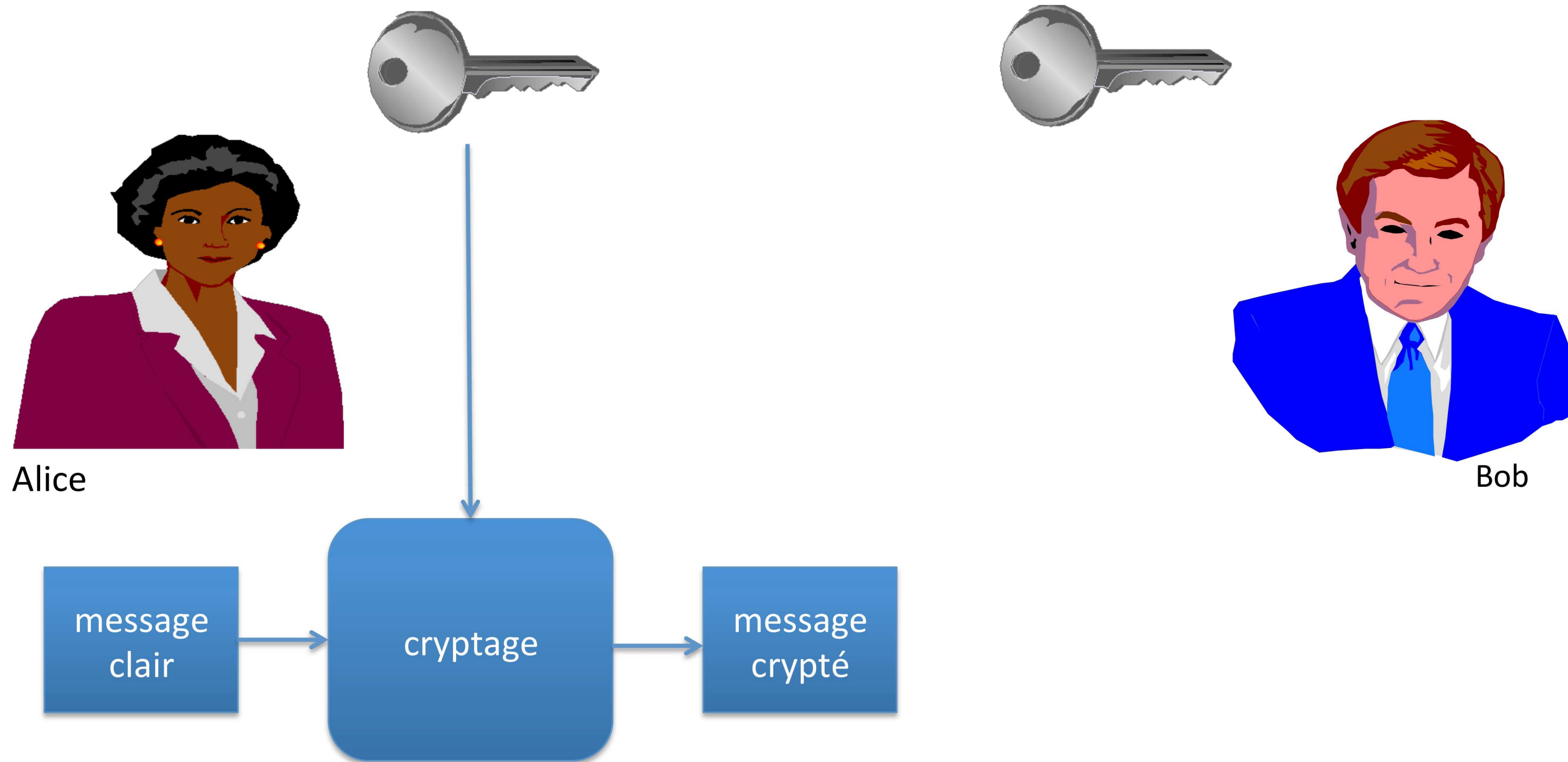


Bob

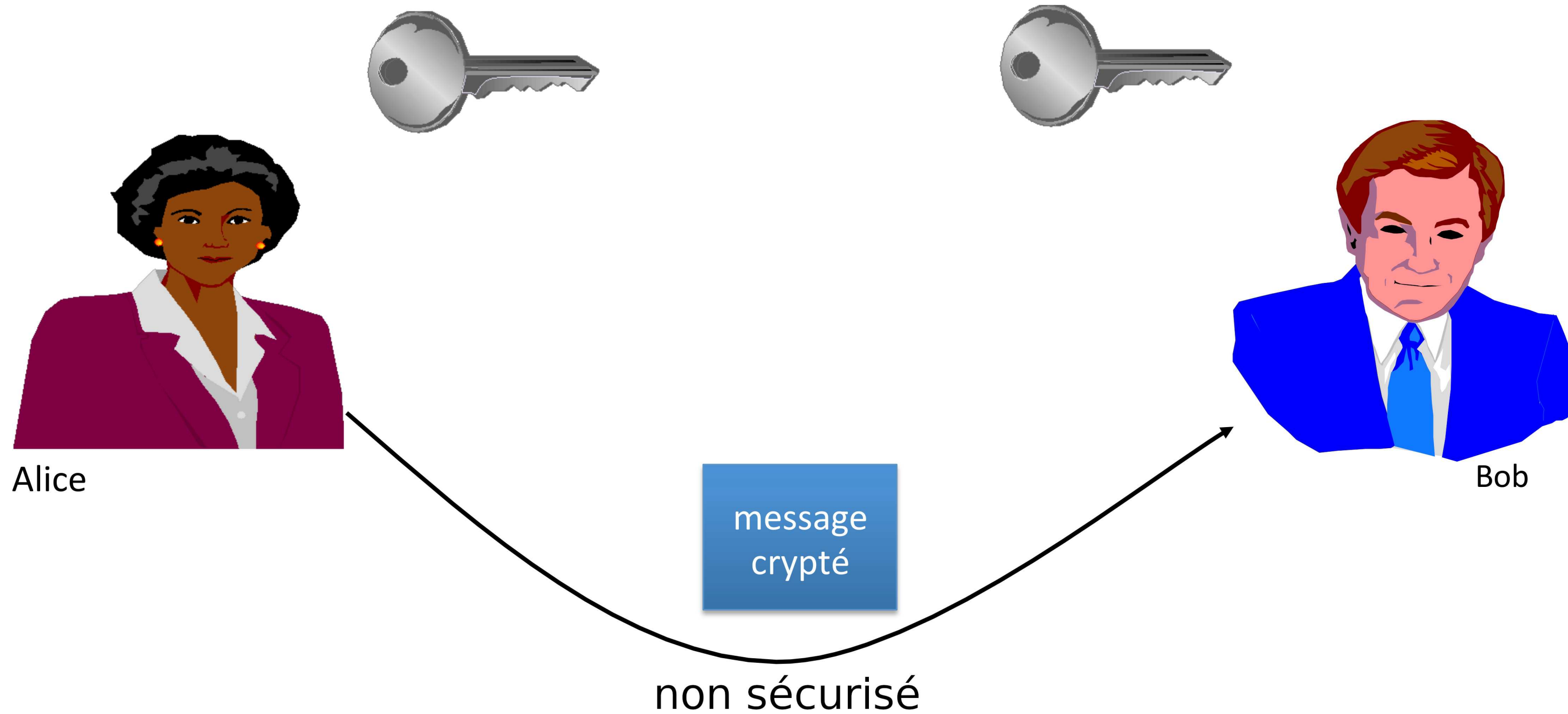
# Chiffrement symétrique



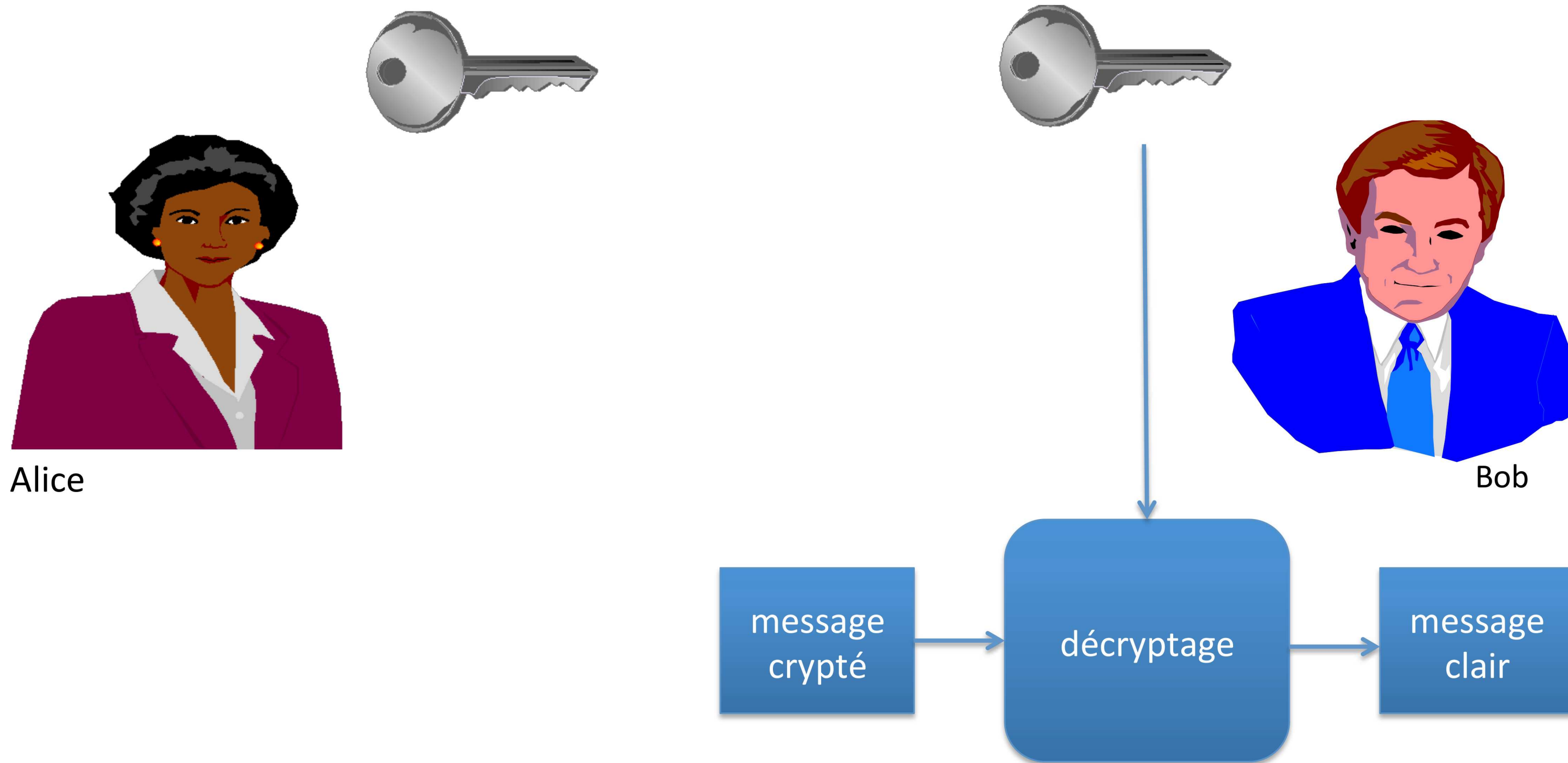
# Chiffrage symétrique



# Chiffrage symétrique



# Chiffrement symétrique



# Confidentialité parfaite



Un crypto-système est dit **parfait** si :  
lorsque seulement le cryptogramme  $C$  est observé,  
 $C$  ne donne aucune information sur  $M$   
c.-à-d. si  $M$  et  $C$  sont *indépendants* (au sens probabiliste).

Est-ce possible ?

Oui si :

1. il y a au moins autant de clés que de messages
2. l'entropie des clés est supérieure ou égale à celle des messages

Exemple : « One-time pad »

# « One-time pad »



Messages, clés, cryptogrammes = séquences binaires de longueur  $n$

clé :  $K = k_1 k_2 \dots k_n$  = séquence aléatoire de  $n$  bits :

$$p(k_i = 0) = 0.5$$

Chiffrage/déchiffrage :

$$c_i = m_i \oplus k_i$$

( $\oplus$  = XOR ; c.-à-d. addition binaire bit à bit, sans retenue)

$$\begin{aligned} p(c_i = 0) &= p(m_i = 0 \text{ et } k_i = 0) + p(m_i = 1 \text{ et } k_i = 1) \\ &= 0.5 \times p(m_i = 0) + 0.5 \times p(m_i = 1) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

# « One-time pad » : exemple

On veut envoyer  $M = 01101001$

## « One-time pad » : exemple

On veut envoyer  $M = 01101001$

On choisit comme clé (hasard) :  $K = 11001110$

## « One-time pad » : exemple

On veut envoyer  $M = 01101001$

On choisit comme clé (hasard) :  $K = 11001110$

On envoie :

$$\begin{array}{r} 01101001 \quad (M) \\ \oplus \quad 11001110 \quad (K) \\ \hline 10100111 \quad (C) \end{array}$$

## « One-time pad » : exemple

On veut envoyer  $M = 01101001$

On choisit comme clé (hasard) :  $K = 11001110$

On envoie :

$$\begin{array}{r} 01101001 \quad (M) \\ \oplus 11001110 \quad (K) \\ \hline 10100111 \quad (C) \end{array}$$

Déchiffrage :

$$\begin{array}{r} 10100111 \quad (C) \\ \oplus 11001110 \quad (K) \\ \hline 01101001 \quad (D = M) \end{array}$$

## Confidentialité parfaite (2)

Pour un crypto-système parfait :

- ▶ il faut au moins autant de clés que de messages ;
- ▶ l'entropie des clés doit être supérieure ou égale à celle des messages.

Les **deux** aspects doivent être vérifiés.

## Confidentialité parfaite (2)

Pour un crypto-système parfait :

- ▶ il faut au moins autant de clés que de messages ;
- ▶ l'entropie des clés doit être supérieure ou égale à celle des messages.

Les **deux** aspects doivent être vérifiés.

- 👉 Conséquence : pour un système parfait, il faut des clés **suffisamment complexes** !

Système parfait  $\neq$  système *pratique* (où la clé doit être assez simple et facilement réutilisable)

# Sécurité algorithmique



sécurité parfaite :

*les données observables ( $C$ ) ne contiennent pas assez d'information pour craquer le code ( $M$  ou  $K$ )*

sécurité algorithmique (par complexité) :

*les données observables permettent en théorie de craquer le code, **mais** calculer  $M$  ou  $K$  à partir de  $C$  est **difficile***

- ☞ utiliser des problèmes au moins aussi difficiles que tous ceux de NP (théorie de la complexité)

# Fonctions à « sens unique »

Fonctions à sens unique :

$f$  est facile à calculer, mais  $f^{-1}$  est difficile (au sens algorithmique).

Utilisation en cryptographie :

- ▶ fonction de chiffrement :  $C = e(M, K) = e_K(M)$
- ▶ fonction de déchiffrement :  $M = d(C, K) = e_K^{-1}(C)$

de sorte que  $e_K$  soit à « sens unique ».

👉 le calcul  $C \mapsto M$  sera trop difficile à faire en pratique (sans  $K$ ).

Exemple : DES

# Principe de DES

Exemple de fonction à sens unique en cryptographie symétrique : DES

Problème NP-complet : résolution de systèmes d'équations non-linéaires dans  $\text{GF}(2)$  ( $= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

Exemple :

$$x_1 x_4 \oplus x_2 x_3 x_5 = 1$$

$$x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 x_4 = 1$$

$$x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_5 = 1$$

a pour solution :  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 1, 1, 0)$

Problème NP-complet (équivalent à SAT)

(plus de détails en annexe)

# Sécurité de DES

Craquer DES = NP-complet :  
résolution par substitution : système de  $n$  équations polynomiales

## MAIS

Le système DES est sûr tant que ( $P \neq NP$ , et surtout)  
 $n$  est **suffisamment grand**

« suffisamment grand » ? 56 bits (en 1978) ?...      ...aujourd'hui : ?...  
remplacé par d'autres algorithmes (AES)

Autre **problème de fond** :

*pour un problème NP-complet, quelqu'un pourrait **trouver la solution par hasard** (cf définition de NP)*

👉 la sécurité ne sera **jamais** garantie pour un cas précis !

## Fonctions à « sens unique » : autre exemple (hors cryptographie)

Exemple du stockage des mots de passe (**authentification**) :

- ▶ Comment garantir l'identification SANS stocker les mots de passe en clair (!) ?

## Fonctions à « sens unique » : autre exemple (hors cryptographie)

Exemple du stockage des mots de passe (**authentification**) :

- ▶ Comment garantir l'identification SANS stocker les mots de passe en clair (!) ?

**Solution :**

- ▶ on stocke les versions chiffrées par une fonction à sens unique.
- ▶ on chiffre le mot de passe entré à chaque login et on compare les chiffrages

Il est alors difficile en pratique de trouver les mots de passe à partir du fichier des mots chiffrés.

Exemple simple :

mots de passe =  $(n1, n2)$  (deux entiers)

mot de passe chiffré :  $e = n1 \times n2$  : facile à calculer

déchiffrage : factorisation de  $e$  : difficile !

# Plan de la leçon

- ▶ Principes de base
  - ▶ Menaces et Défenses
  - ▶ Exemple d'équilibre : cas de la destruction/perte
- ▶ Cryptographie
  - ▶ Cadre général
  - ▶ Cryptographie symétrique et asymétrique
  - ▶ Confidentialité :
    - ▶ Cryptographie parfaite et algorithmique
    - ▶ One-Time Pad
    - ▶ **RSA**
  - ▶ Intégrité
  - ▶ Responsabilité

# Cryptographie asymétrique (ou « à clés publiques »)

Problème : comment transmettre (rapidement) les clés de façon sûre ?

Une solution : ne pas transmettre de clé du tout !!

☞ **systemes à clés publiques**

Mais alors, chaque paire d'utilisateurs doit avoir une clé distincte :  
 $n$  utilisateurs  $\Rightarrow n(n - 1)$  clés *différentes*

☞ difficulté de les générer/mémoriser

Il faut un schéma systématique pour la *distribution des clés* !

Exemple dans ce cours :

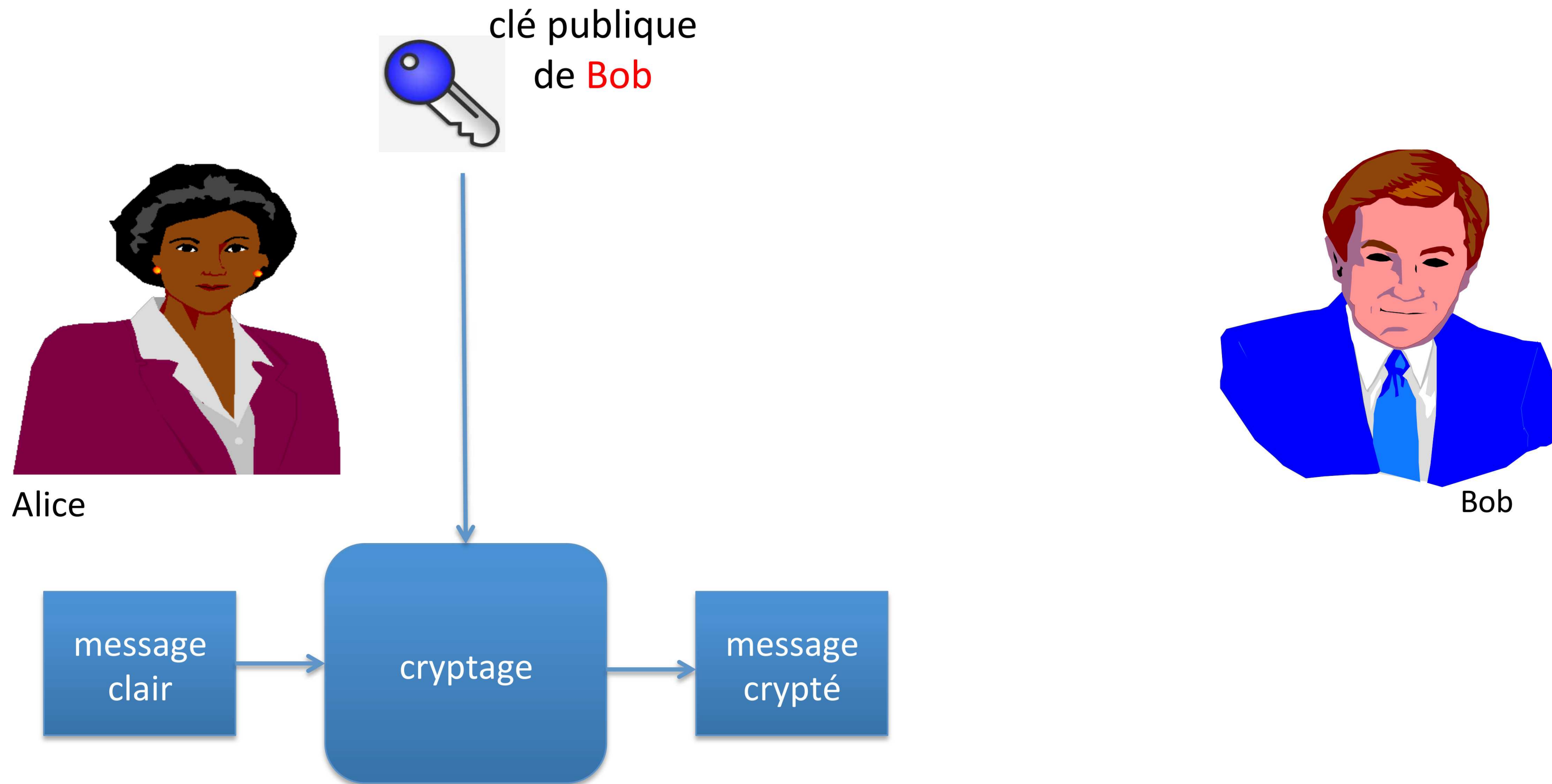
- ▶ **RSA** (Rivest-Shamir-Adleman, 1978)

# Cryptographie asymétrique

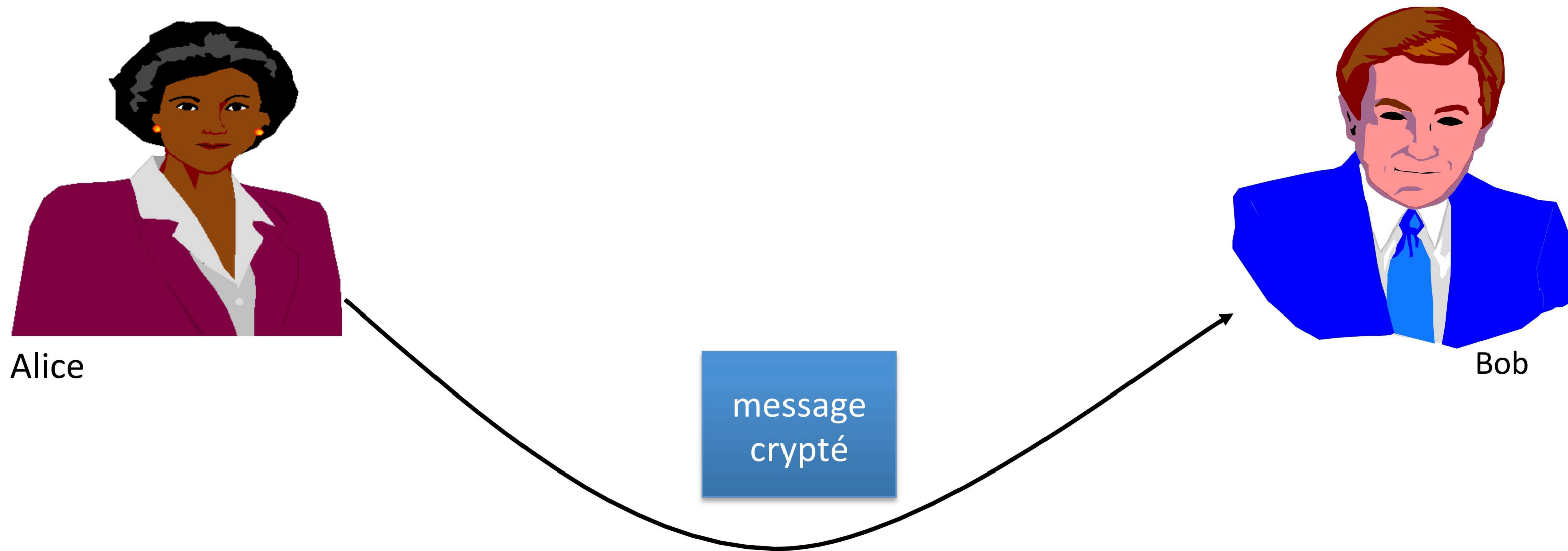


- ▶ Chaque utilisateur a deux clés
  - ▶ Une clé privée
  - ▶ Une clé publique
- ▶ Le **chiffrage** se fait avec la clé **publique** du *destinataire*
- ▶ Le **déchiffrage** se fait avec la clé **privée** du *destinataire*

# Chiffrage asymétrique



# Chiffrage asymétrique

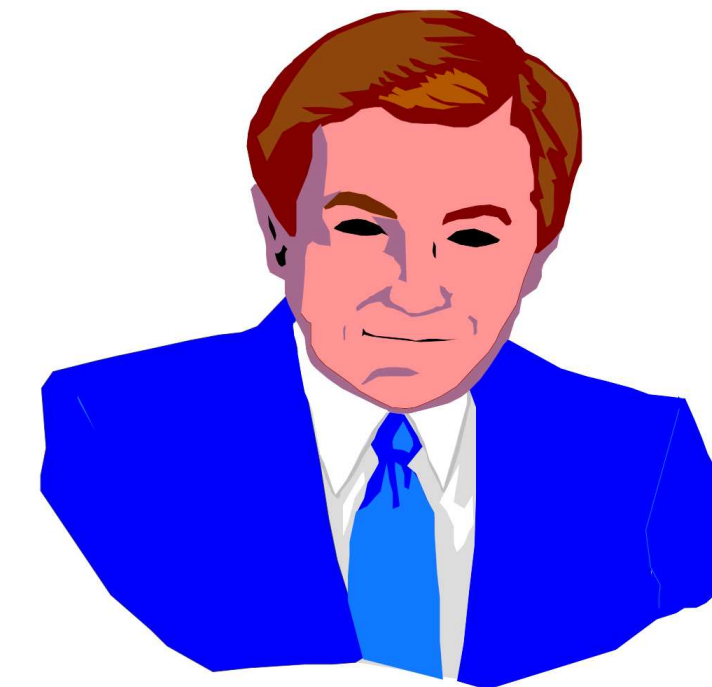


# Chiffrage asymétrique



Alice

clé privée  
de Bob



Bob



# RSA (Rivest-Shamir-Adleman, 1978)



$M, C$  = nombres entiers (modulo  $n$ )

- ▶ Choisir 2 nombres premiers  $p, q$  tels que tout message  $M < p \cdot q$
- ▶ Calculer  $n = pq$  et  $m = (p - 1)(q - 1)$
- ▶ Choisir un  $d < m$  qui n'a aucun facteur en commun avec  $m$
- ▶ Calculer  $e$  tel que  $ed = 1 \pmod{m}$ .
- ▶ Publier  $e$  et  $n$
- ▶ Garder secret  $d, m, p$  et  $q$ .

Chiffage :  $C = e(M) = M^e \pmod{n}$

Déchiffage :  $M = e^{-1}(C) = C^d \pmod{n}$

Pour communiquer, j'utilise **la clé publique de l'autre.**

## Exemple (simpliste) de RSA

Prenons  $p = 5$  et  $q = 11$  🖱️  $n = 55$  et  $m = (5 - 1) \cdot (11 - 1) = 40$

**Note** : bien sûr, ici  $p$  et  $q$  sont triviaux à deviner connaissant  $n$  car c'est un exemple simpliste de cours. En réalité c'est *pratiquement* infaisable (= infaisable en un temps raisonnable sur les machines actuelles [sauf preuve du contraire !]) pour des nombres à, disons, 600 chiffres (en décimal) car il n'y a pas d'algorithme efficace connu et que la recherche exhaustive prendrait littéralement des siècles.


## Exemple (simpliste) de RSA

Prenons  $p = 5$  et  $q = 11$  🖱️  $n = 55$  et  $m = (5 - 1) \cdot (11 - 1) = 40$


**Note** : bien sûr, ici  $p$  et  $q$  sont triviaux à deviner connaissant  $n$  car c'est un exemple simpliste de cours. En réalité c'est *pratiquement* infaisable (= infaisable en un temps raisonnable sur les machines actuelles [sauf preuve du contraire !]) pour des nombres à, disons, 600 chiffres (en décimal) car il n'y a pas d'algorithme efficace connu et que la recherche exhaustive prendrait littéralement des siècles.

Choisissons p.ex.  $d = 27$  ( $= 3^3$ , qui n'a aucun facteur commun avec  $m = 2^3 \times 5$ )


## Exemple (simpliste) de RSA

Prenons  $p = 5$  et  $q = 11$    $n = 55$  et  $m = (5 - 1) \cdot (11 - 1) = 40$


**Note** : bien sûr, ici  $p$  et  $q$  sont triviaux à deviner connaissant  $n$  car c'est un exemple simpliste de cours. En réalité c'est *pratiquement* infaisable (= infaisable en un temps raisonnable sur les machines actuelles [sauf preuve du contraire !]) pour des nombres à, disons, 600 chiffres (en décimal) car il n'y a pas d'algorithme efficace connu et que la recherche exhaustive prendrait littéralement des siècles.

Choisissons p.ex.  $d = 27$  ( $= 3^3$ , qui n'a aucun facteur commun avec  $m = 2^3 \times 5$ )  
  $e = 3$

## Exemple (simpliste) de RSA

Prenons  $p = 5$  et  $q = 11$    $n = 55$  et  $m = (5 - 1) \cdot (11 - 1) = 40$


**Note** : bien sûr, ici  $p$  et  $q$  sont triviaux à deviner connaissant  $n$  car c'est un exemple simpliste de cours. En réalité c'est *pratiquement* infaisable (= infaisable en un temps raisonnable sur les machines actuelles [sauf preuve du contraire !]) pour des nombres à, disons, 600 chiffres (en décimal) car il n'y a pas d'algorithme efficace connu et que la recherche exhaustive prendrait littéralement des siècles.

Choisissons p.ex.  $d = 27$  ( $= 3^3$ , qui n'a aucun facteur commun avec  $m = 2^3 \times 5$ )  
  $e = 3$


On veut envoyer le message 000010 (c.-à-d. 2 ; pourquoi sur 6 bits ici ?)

On envoie alors :  $C = 2^3 = 8 \pmod{55}$  (on envoie donc : « 001000 »)

## Exemple (simpliste) de RSA

Prenons  $p = 5$  et  $q = 11$    $n = 55$  et  $m = (5 - 1) \cdot (11 - 1) = 40$

**Note** : bien sûr, ici  $p$  et  $q$  sont triviaux à deviner connaissant  $n$  car c'est un exemple simpliste de cours. En réalité c'est *pratiquement* infaisable (= infaisable en un temps raisonnable sur les machines actuelles [sauf preuve du contraire !]) pour des nombres à, disons, 600 chiffres (en décimal) car il n'y a pas d'algorithme efficace connu et que la recherche exhaustive prendrait littéralement des siècles.

Choisissons p.ex.  $d = 27$  ( $= 3^3$ , qui n'a aucun facteur commun avec  $m = 2^3 \times 5$ )  
  $e = 3$

On veut envoyer le message 000010 (c.-à-d. 2 ; pourquoi sur 6 bits ici ?)

On envoie alors :  $C = 2^3 = 8 \pmod{55}$  (on envoie donc : « 001000 »)

Déchiffrage :

$$D = 8^{27} = 2 \pmod{55}$$

# Calcul de l'exponentielle discrète

L'exponentielle discrète est facilement calculable,  
(nécessitant au plus  $\Theta(\log_2 n)$  multiplications)  
en utilisant l'algorithme « mettre au carré et multiplier » :

<b>Exp</b>
entrée : $x, n \geq 1, p$ sortie : $x^n \bmod p$
<b>Si</b> $n = 1$   <b>sortir</b> : $x \bmod p$
<b>Sinon, si</b> $n$ est pair   <b>sortir</b> : <b>Exp</b> ( $x^2 \bmod p, n/2, p$ ) $\bmod p$
<b>Sinon</b>   <b>sortir</b> : $x \times$ <b>Exp</b> ( $x^2 \bmod p, (n-1)/2, p$ ) $\bmod p$

# Exemple de calcul de l'exponentielle discrète

Exemple :

$$x = 8, n = 27, p = 55$$

$$\begin{aligned}8^{27} \bmod 55 &= 8 \times 64^{13} = 8 \times 9^{13} \bmod 55 \\ &= 8 \times 9 \times 81^6 = 17 \times 26^6 \bmod 55 \\ &= 17 \times 676^3 = 17 \times 16^3 \bmod 55 \\ &= 17 \times 16 \times 256^1 = 52 \times 36 \bmod 55 \\ &= 2 \bmod 55\end{aligned}$$

# Pourquoi RSA fonctionne ?

RSA fonctionne si  $D = M$ , c.-à-d.  $M^{ed} = M \pmod n$ .

Puisque  $ed = 1 \pmod m$ , il existe  $k > 0$  tel que  $M^{ed} = M \cdot M^{km}$ .

En outre, comme  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers (th. d'Euler-Fermat) :

$$M^{p-1} = 1 \pmod p$$

$$M^{q-1} = 1 \pmod q$$

ainsi :

$$M^{ed} = M \cdot M^{km} = M \cdot M^{k(p-1)(q-1)} = M \cdot \left(M^{p-1}\right)^{k(q-1)} = M \cdot 1 \pmod p$$

De même :  $M^{ed} = M \pmod q$ .

Or, si  $p$  et  $q$  sont deux nombres premiers et si  $x = y \pmod p$  et  $x = y \pmod q$ , alors  $x = y \pmod{pq}$ .

Donc, nous avons bien  $M^{ed} = M \pmod n$ .

## Et comment résoudre $e \cdot d = 1 \pmod{m}$ ?

Trouver  $e$  et  $k$  tels que  $e \cdot d - k \cdot m = 1$  peut être fait en utilisant l'**algorithme d'Euclide de plus grand diviseur commun** (puisque le plus grand diviseur commun de  $d$  et de  $m$  est précisément 1).

Soient  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{t}$  des vecteurs de  $\mathbb{Z}^2$  (c.-à-d. des paires de nombres entiers).

L'étape d'initialisation de l'algorithme consiste en  $\mathbf{u} = (0, m)$ ,  $\mathbf{v} = (1, d)$ .

La condition d'arrêt est que la deuxième composante  $v_2$  de  $\mathbf{v}$  égale 1. Dans ce cas, la première composante est  $v_1 = e$ , c.-à-d. qu'à la fin de l'algorithme  $\mathbf{v} = (e, 1)$ .

Après l'étape d'initialisation, l'algorithme continue en boucle jusqu'à ce que la condition d'arrêt soit remplie :

$$\mathbf{t} \leftarrow \mathbf{u} - r\mathbf{v},$$

$$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v},$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{t}$$

$$\text{avec } r = \frac{u_2}{v_2}$$

## Exemple résoudre $27e = 1 \pmod{40}$ ?

Trouvons  $e$  tel que  $27e = 1 \pmod{40}$  (c.-à-d.  $d = 27$  et  $m = 40$ ) :

<b>u</b>	<b>v</b>	<b>r</b>	<b>t</b>
(0, 40)	(1, 27)	$\frac{40}{27} = 1$	(-1, 13)
(1, 27)	(-1, 13)	$\frac{27}{13} = 2$	(3, 1)
(-1, 13)	(3, 1)	(stop)	

ainsi  $e = 3 \pmod{40}$ .

# Sécurité de RSA

**Une** voie pour craquer RSA : trouver les facteurs de  $n : p, q$   
(permet de tout reconstruire)

Trouver les facteurs premiers d'un nombre est un problème difficile,  
mais faisable pour des  $n < 1024$  bits.

**MAIS** il n'est pas sûr qu'il soit *nécessaire* de trouver les facteurs de  $n$   
pour craquer RSA !

# Plan de la leçon

- ▶ Principes de base
  - ▶ Menaces et Défenses
  - ▶ Exemple d'équilibre : cas de la destruction/perte
- ▶ Cryptographie
  - ▶ Cadre général
  - ▶ Cryptographie symétrique et asymétrique
  - ▶ Confidentialité :
    - ▶ Cryptographie parfaite et algorithmique
    - ▶ One-Time Pad
    - ▶ RSA
  - ▶ **Intégrité**
  - ▶ Responsabilité

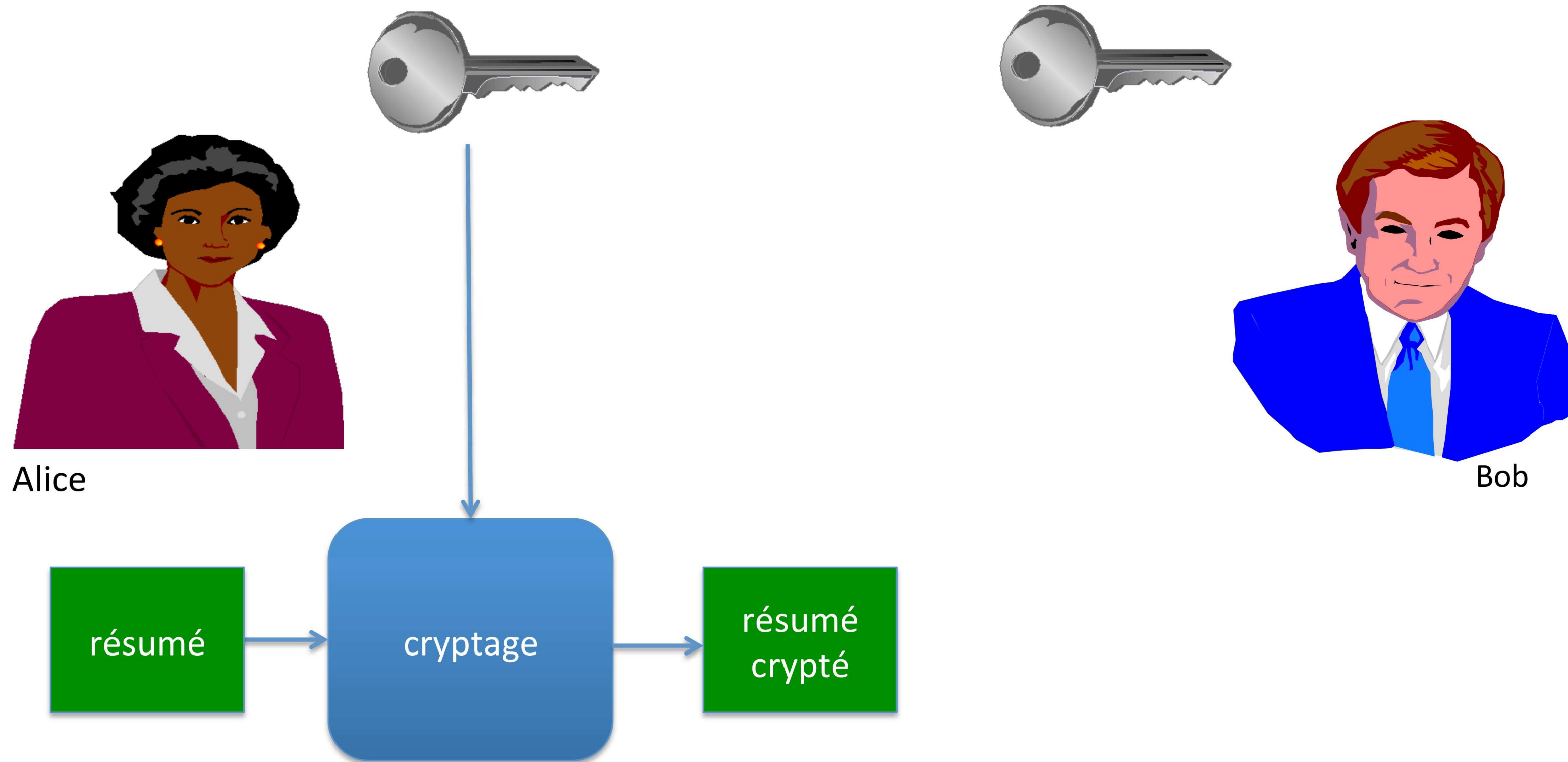
# Intégrité

- ▶ **Menace** : modification des données
- ▶ **Défense** : résumé confidentiel

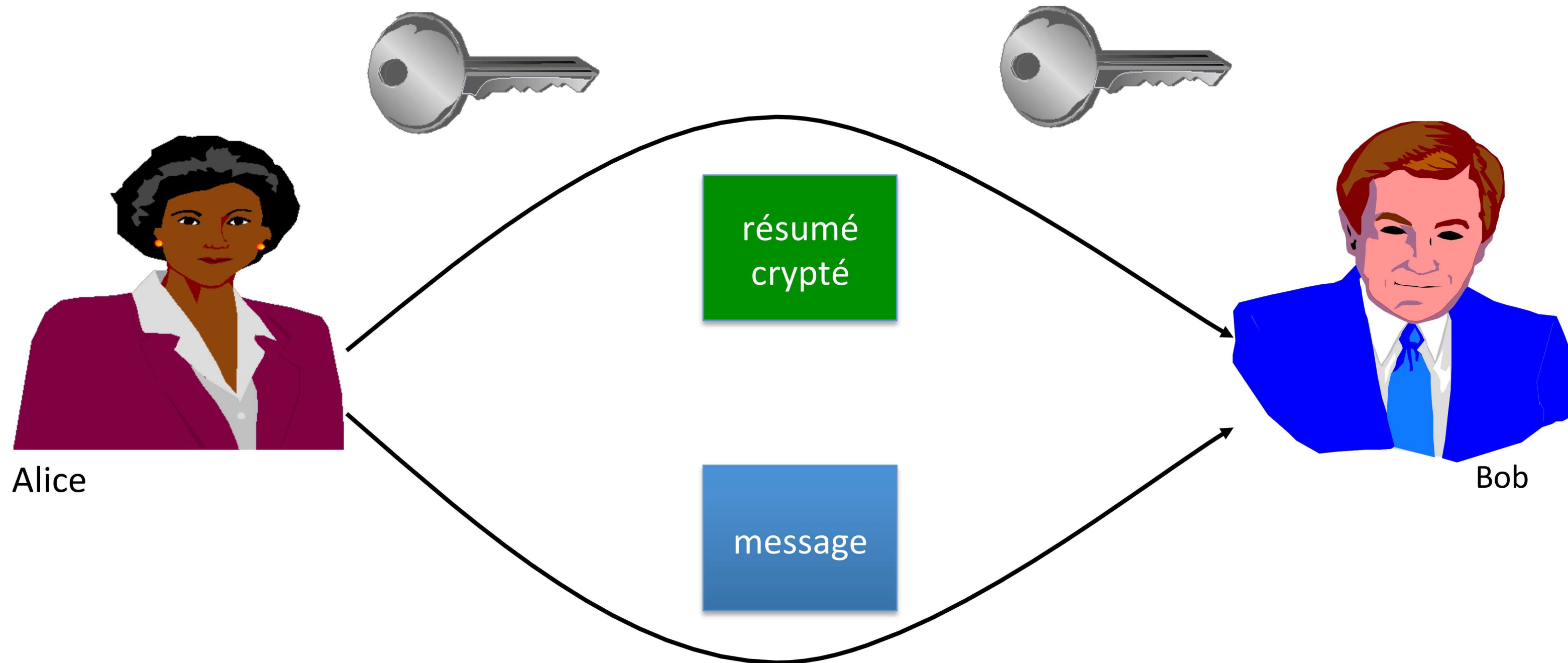
# Intégrité à base de cryptographie symétrique



# Intégrité à base de cryptographie symétrique



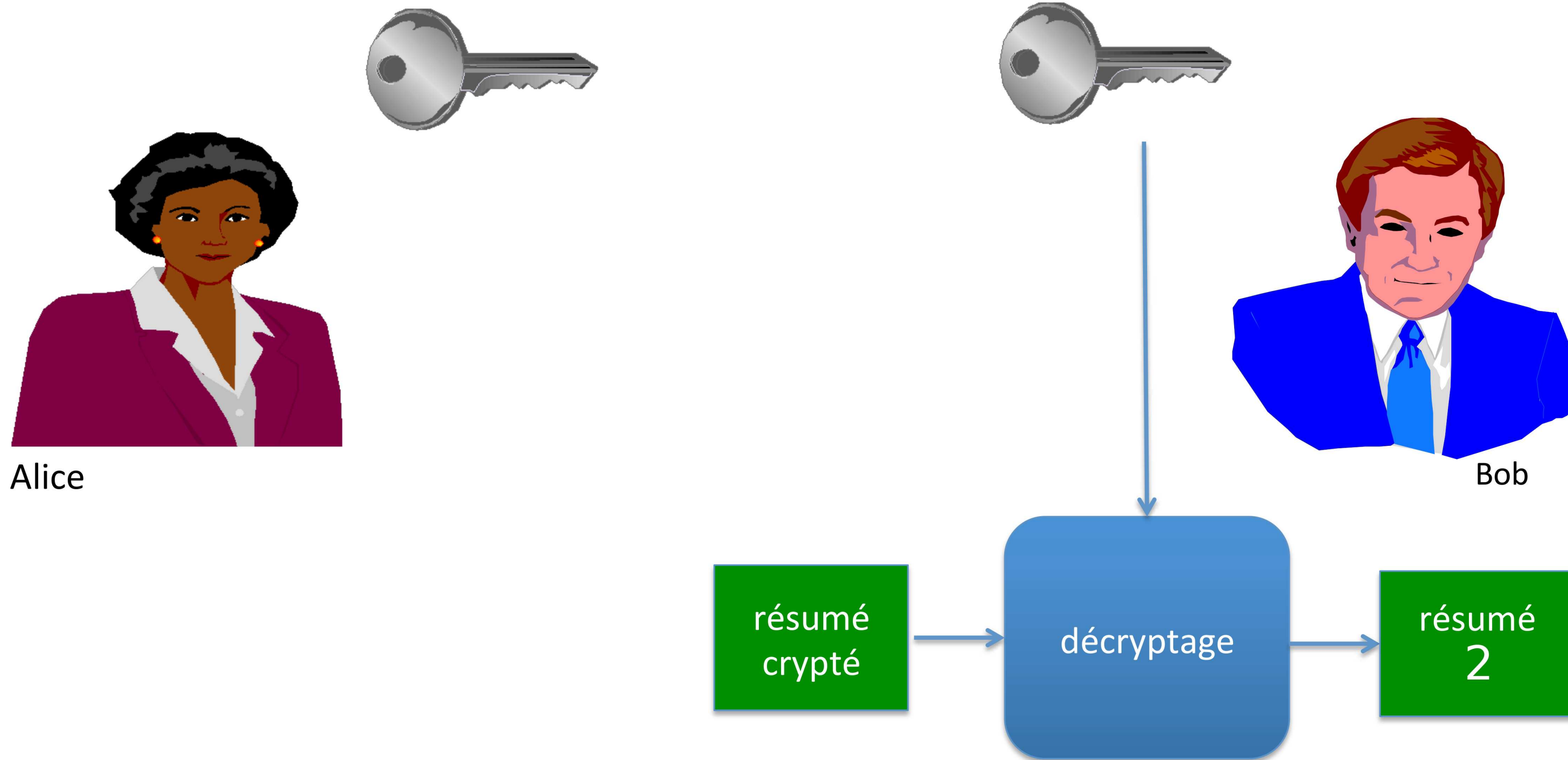
# Intégrité à base de cryptographie symétrique



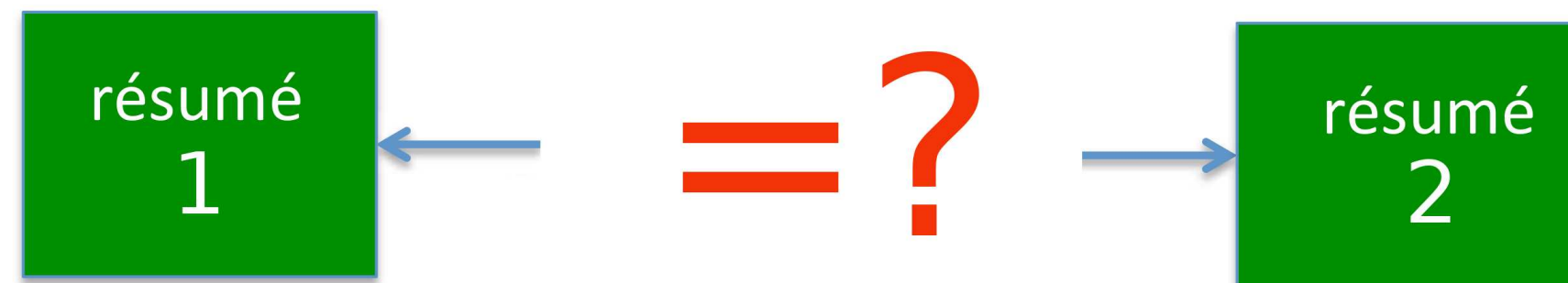
# Intégrité à base de cryptographie symétrique



# Intégrité à base de cryptographie symétrique



# Intégrité à base de cryptographie symétrique



# Responsabilité

- ▶ **Menace** : démenti  
(« *ce n'est pas moi qui ai envoyé ça* »  
ou « *c'est lui qui a envoyé ça* »)
- ▶ **Défense** : signature digitale

# Responsabilité

- ▶ **Menace** : démenti  
(« *ce n'est pas moi qui ai envoyé ça* »  
ou « *c'est lui qui a envoyé ça* »)
- ▶ **Défense** : signature digitale

Rappel :	Symétrique à clés secrètes	Asymétrique à clés publiques
Confidentialité :	oui	oui
Intégrité :	oui	oui
Responsabilité :	non	oui

# Responsabilité contre Confidentialité



Responsabilité : s'**assurer** ou **prouver** que  $M$  vient bien de son auteur.

Probabilité d'infraction = probabilité de créer un message correct (« acceptable ») alors qu'on n'est pas autorisé.

On peut prouver que pour avoir une petite probabilité d'infraction, il faut que **le cryptogramme donne beaucoup d'information sur la clé.**

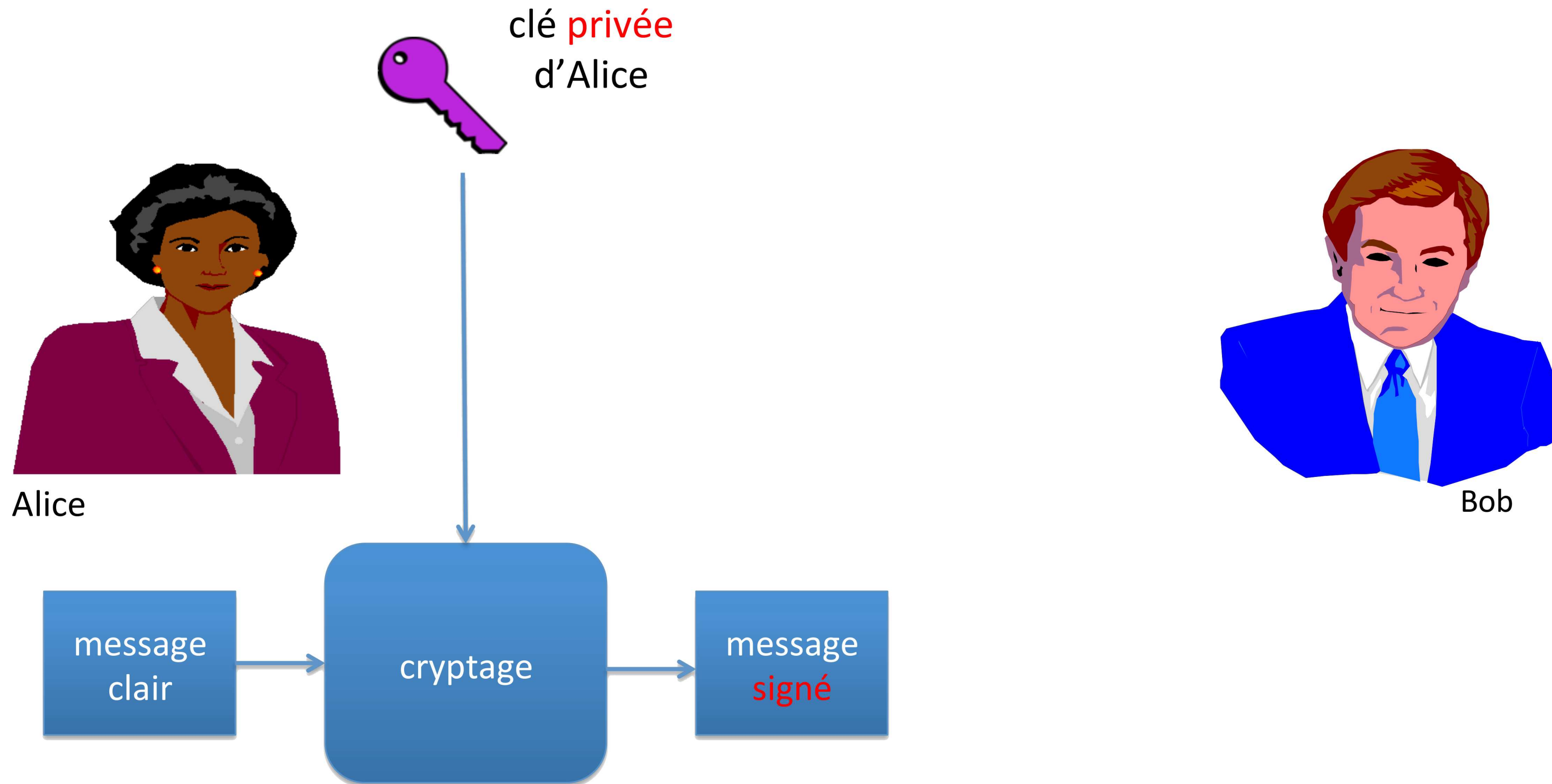
Or, pour assurer la confidentialité, on aimerait le contraire !

Du strict point de vue de la théorie de l'information, **responsabilité et confidentialité sont incompatibles...**

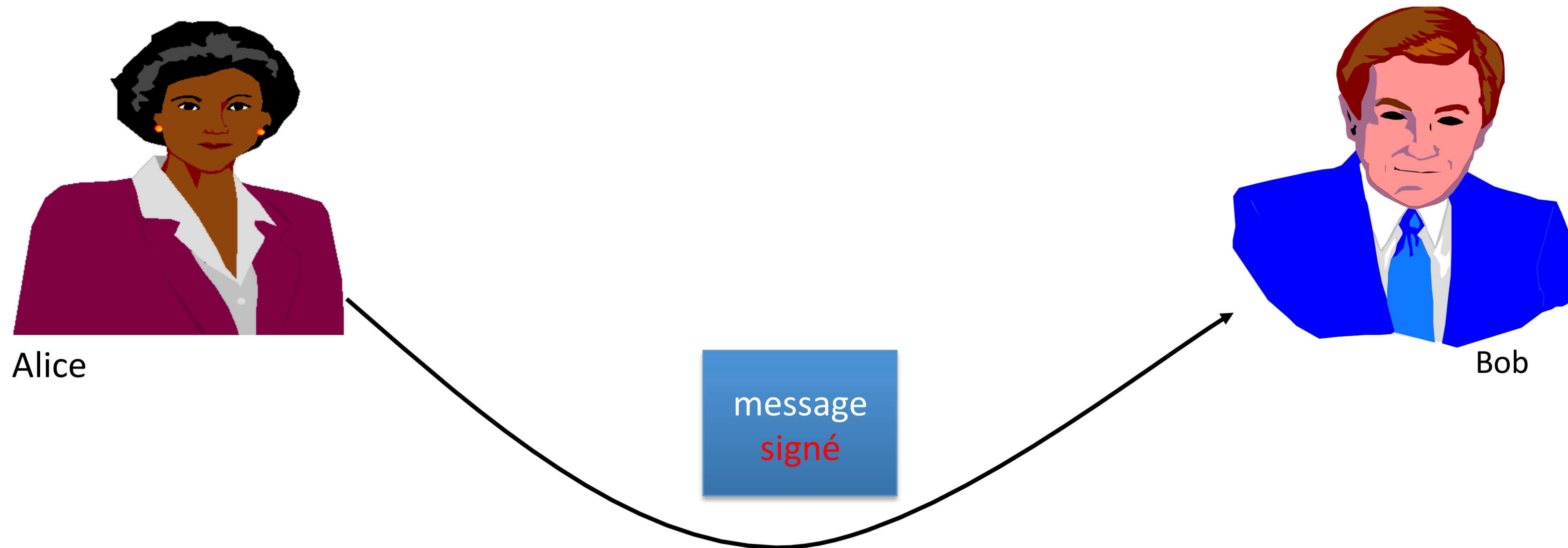
...donc :

Responsabilité  $\implies$  sécurité imparfaite :  
utilisation de la sécurité *algorithmique*

# Responsabilité avec cryptographie asymétrique



# Responsabilité avec cryptographie asymétrique

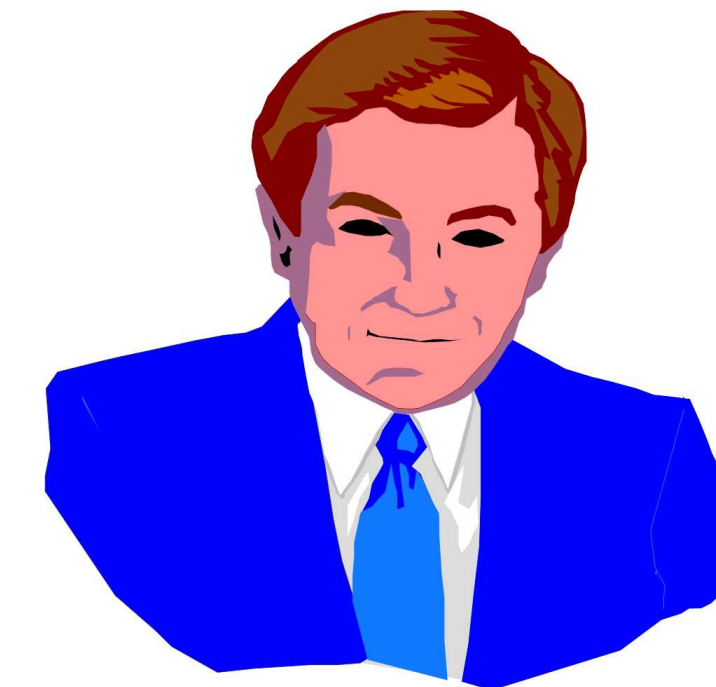


# Responsabilité avec cryptographie asymétrique



Alice

clé **publique**  
d'Alice



Bob



# Cryptographie asymétrique : responsabilité et intégrité

Le gros avantage du système de *responsabilité* de la cryptographie asymétrique est que nous assurons « pour le même prix » également l'**intégrité** du message signé :

la signature sert aussi de résumé :

le déchiffrement (correct) du message signé garantit en effet à la fois

- ▶ le message d'origine (intégrité)
- ▶ et son auteur (responsabilité)

car

- ▶ seul  $M$  a pu produire  $d_A(M)$  (sinon le crypto-système serait ambigu)
- ▶ seul-e  $A$  a pu produire  $d_A(M)$  (sinon le crypto-système n'est pas sûr)

**Note** : et si l'on chiffre pas le message signé, tout le monde peut faire cette double vérification (intégrité et responsabilité).

# Signature dans un système RSA

Utilisateur A envoie  $M$  à B (message codé  $C = e_B(M)$ )

Signature :

$$S(M) = e_B(d_A(M))$$

Vérification :

$$e_A(d_B(S(M))) \stackrel{?}{=} M$$

Cela présuppose que  $d_A(M)$  est dans le domaine de  $e_B$ , c'est-à-dire pour RSA que  $d_A(M) < n_B$ .

En pratique, on ne signe pas  $M$  lui-même, mais un résumé unique (hash) de  $M$

# Ce que j'ai appris aujourd'hui

- ▶ Savoir identifier les menaces et connaître les niveaux de défense appropriés  
la sécurité totale n'existe pas !
- ▶ Principes de base de la cryptographie
- ▶ Protection parfaite .vs. algorithmique
- ▶ Confidentialité : One-time pad et RSA
- ▶ Intégrité et Responsabilité dans un crypto-système

# ANNEXE

## (base de) DES (2)

Soit  $M$  un message binaire de  $2n$  bits.

- ▶  $M$  est divisé en deux parties de longueur égale ( $n$ ) :  $M = (M_0, M_1)$
- ▶ on utilise  $d - 1$  clés :  $k_1, \dots, k_{d-1}$  chacune de  $m$  bits
- ▶  $f$  est une fonction de  $GF(2)^m \times GF(2)^n$  dans  $GF(2)^n$  :

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = (z_1, \dots, z_n)$$

- ▶  $f$  est non-linéaire en  $x$  (multiplications entre des  $x_i$  et des  $x_j$  )

## (base de) DES (3)

Chiffrage par transformations *itératives*,  $i = 2 \dots d$  :

$$M_i = M_{i-2} \oplus f(k_{i-1}, M_{i-1})$$

On envoie :

$$C = (M_{d-1}, M_d)$$

## (base de) DES (3)

Chiffrage par transformations *itératives*,  $i = 2 \dots d$  :

$$M_i = M_{i-2} \oplus f(k_{i-1}, M_{i-1})$$

On envoie :

$$C = (M_{d-1}, M_d)$$

Déchiffrage par transformation,  $i = d \dots 2$  :

$$M_{i-2} = M_i \oplus f(k_{i-1}, M_{i-1})$$

(On refait simplement les mêmes calculs dans l'autre sens.

Notez que, dans GF(2),  $\ominus = \oplus$ )

## (base de) DES : exemple, chiffrage

Considérons la fonction non linéaire suivante ( $n = 3$  et  $m = 3$ ) :

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1 x_2 y_1 y_2, \quad x_2 x_3 y_1 y_3, \quad (x_1 \oplus x_2) y_1 y_3)$$

et choisissons la clé  $K = 101011$  ( $d = 3$ ) :

$$K_1 = 101, \quad K_2 = 011$$

## (base de) DES : exemple, chiffrage

Considérons la fonction non linéaire suivante ( $n = 3$  et  $m = 3$ ) :

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1 x_2 y_1 y_2, \quad x_2 x_3 y_1 y_3, \quad (x_1 \oplus x_2) y_1 y_3)$$

et choisissons la clé  $K = 101011$  ( $d = 3$ ) :

$$K_1 = 101, \quad K_2 = 011$$

On veut envoyer  $M = 101111$  :

$$M = 101111 \longrightarrow M_0 = 101, \quad M_1 = 111$$

## (base de) DES : exemple, chiffrage

Considérons la fonction non linéaire suivante ( $n = 3$  et  $m = 3$ ) :

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1 x_2 y_1 y_2, \quad x_2 x_3 y_1 y_3, \quad (x_1 \oplus x_2) y_1 y_3)$$

et choisissons la clé  $K = 101011$  ( $d = 3$ ) :

$$K_1 = 101, \quad K_2 = 011$$

On veut envoyer  $M = 101111$  :

$$M = 101111 \longrightarrow M_0 = 101, \quad M_1 = 111$$

Itérations :

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0 \oplus f(K_1, M_1) = (1, 0, 1) \oplus f((1, 0, 1), (1, 1, 1)) \\ &= (1, 0, 1) \oplus (0, 0, 1) &&= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

## (base de) DES : exemple, chiffrage

Considérons la fonction non linéaire suivante ( $n = 3$  et  $m = 3$ ) :

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1 x_2 y_1 y_2, \quad x_2 x_3 y_1 y_3, \quad (x_1 \oplus x_2) y_1 y_3)$$

et choisissons la clé  $K = 101011$  ( $d = 3$ ) :

$$K_1 = 101, \quad K_2 = 011$$

On veut envoyer  $M = 101111$  :

$$M = 101111 \longrightarrow M_0 = 101, \quad M_1 = 111$$

Itérations :

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0 \oplus f(K_1, M_1) = (1, 0, 1) \oplus f((1, 0, 1), (1, 1, 1)) \\ &= (1, 0, 1) \oplus (0, 0, 1) &&= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= M_1 \oplus f(K_2, M_2) = (1, 1, 1) \oplus f((0, 1, 1), (1, 0, 0)) \\ &= (1, 1, 1) \oplus (0, 0, 0) &&= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

## (base de) DES : exemple, chiffrage

Considérons la fonction non linéaire suivante ( $n = 3$  et  $m = 3$ ) :

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1 x_2 y_1 y_2, \quad x_2 x_3 y_1 y_3, \quad (x_1 \oplus x_2) y_1 y_3)$$

et choisissons la clé  $K = 101011$  ( $d = 3$ ) :

$$K_1 = 101, \quad K_2 = 011$$

On veut envoyer  $M = 101111$  :

$$M = 101111 \longrightarrow M_0 = 101, \quad M_1 = 111$$

Itérations :

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0 \oplus f(K_1, M_1) = (1, 0, 1) \oplus f((1, 0, 1), (1, 1, 1)) \\ &= (1, 0, 1) \oplus (0, 0, 1) &&= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= M_1 \oplus f(K_2, M_2) = (1, 1, 1) \oplus f((0, 1, 1), (1, 0, 0)) \\ &= (1, 1, 1) \oplus (0, 0, 0) &&= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Donc finalement,  $C = (M_2, M_3) = 100111$  est envoyé.

## (base de) DES : exemple, déchiffrage

On reçoit  $C = 100111$  :

$$C = 100111 \longrightarrow M_2 = 100, \quad M_3 = 111$$

Itérations :

$$\begin{aligned} M_1 &= M_3 \oplus f(K_2, M_2) = (1, 1, 1) \oplus f((0, 1, 1), (1, 0, 0)) \\ &= (1, 1, 1) \oplus (0, 0, 0) &&= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= M_2 \oplus f(K_1, M_1) = (1, 0, 0) \oplus f((1, 0, 1), (1, 1, 1)) \\ &= (1, 0, 0) \oplus (0, 0, 1) &&= (1, 0, 1) \end{aligned}$$

Donc finalement,  $D = (M_0, M_1) = 101111$  a été envoyé.