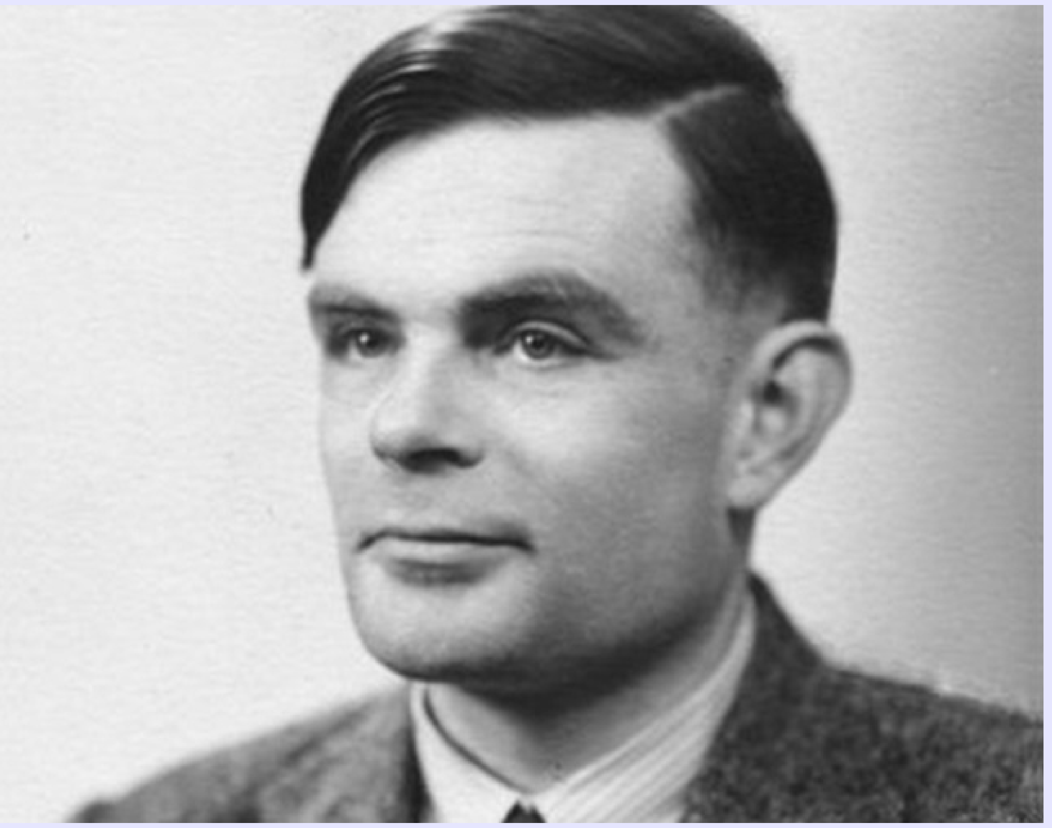
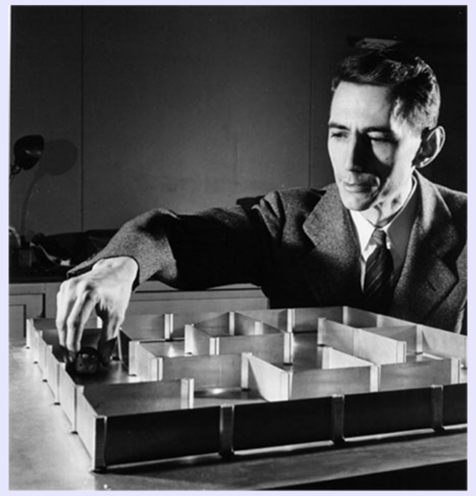
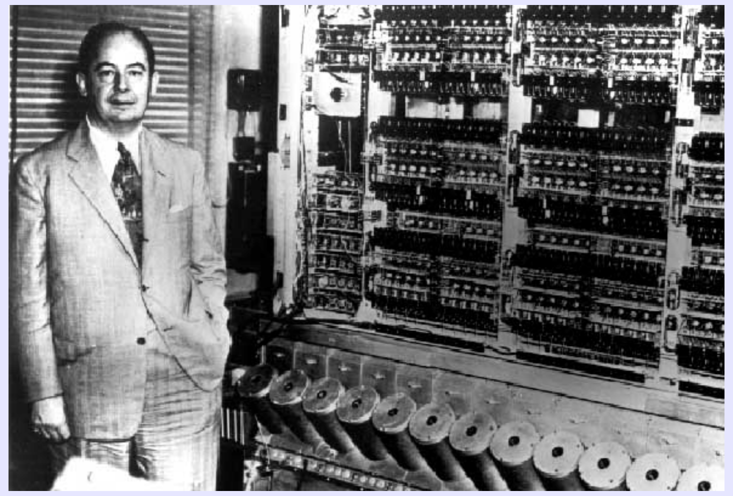
  

Information, Calcul et Communication

Module 1 : Calcul

EPFL

Leçon I.2 : Calcul et Algorithmes II

J.-C. Chappelier & J. Sam

EPFL

Objectifs de la leçon

La leçon précédente a présenté ce qu'est un algorithme et par quels moyens l'exprimer.

Mais reste la principale question :

comment concevoir un algorithme

permettant de résoudre un problème donné ?

L'objectif de cette leçon est de vous présenter des *méthodes de résolution de problèmes* :

- « Diviser pour régner » (« *Divide and Conquer* »)
- Récursion
- Programmation dynamique

Conception d'algorithmes

Comment **concevoir** un algorithme permettant de résoudre un problème donné ?

Il n'y a malheureusement pas de méthode miracle ni de recette toute faite pour construire des solutions algorithmiques à un problème donné.

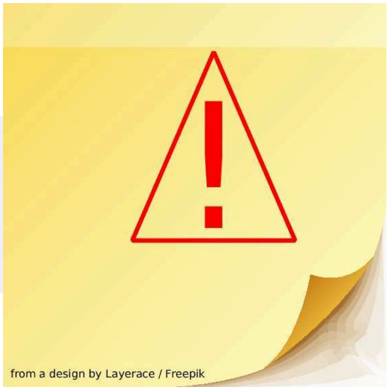
Une première démarche consiste à rechercher une ressemblance avec des problèmes déjà connus :

recherche *tri* *plus court chemin*

Sinon, il existe plusieurs **méthodes de résolution**, c.-à.d.des *schémas d'élaboration de solutions*.

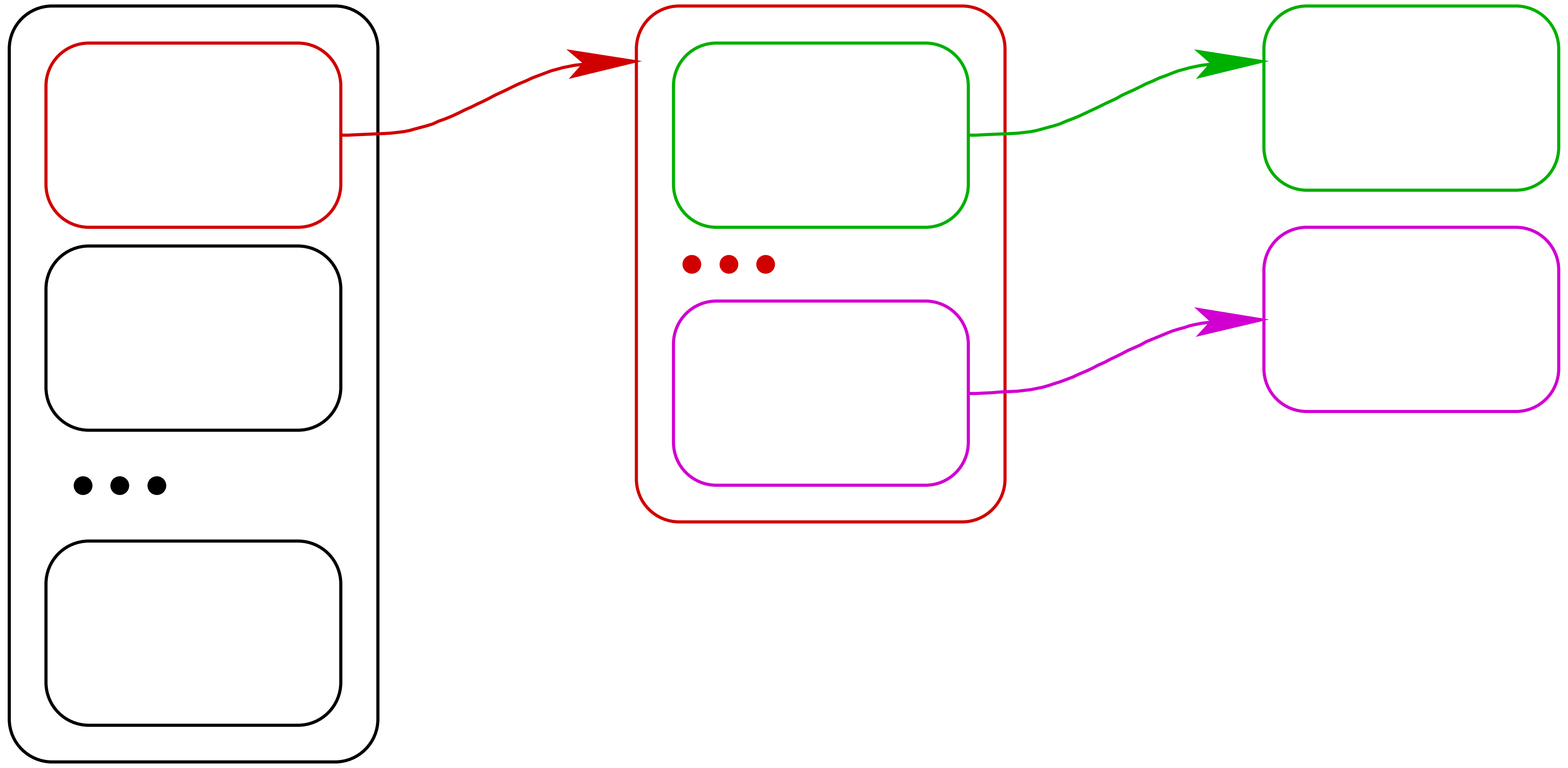
Plusieurs de ces méthodes suivent ce que l'on appelle **une approche descendante** (« *top-down* », procède par *analyse*), par opposition à ascendante (« *bottom-up* », procède par *synthèse*).

Approche descendante



Résoudre un problème par une **approche descendante** consiste à décomposer le problème général en sous-problèmes plus spécifiques, lesquels seront chacun décomposés en problèmes encore plus spécifiques, etc. (raffinements successifs)

Une telle analyse du problème se fait à l'aide de blocs imbriqués correspondant chacun à des résolutions de plus en plus spécifiques, décrites par des algorithmes de plus en plus spécialisés.



Exemple

Par exemple avec l'algorithme de tri par insertion vu à la leçon précédente :

On découpe le problème en sous-problèmes :

tri insertion

entrée : *un tableau (d'objets que l'on peut comparer)*
sortie : *le tableau trié*

Tant que il y a un élément *mal placé*

  on cherche sa *bonne place*

  on *déplace* l'élément à sa bonne place

Chaque *sous-problème* étant ensuite spécifié plus clairement puis résolu.

Tri par insertion : résolution détaillée

Le sous-problème $\boxed{\textit{rechercher un élément mal placé}}$

entrée : un tableau `tab`

sortie : position du 1er élément strictement plus petit que son prédécesseur, ou -1 s'il n'y en a pas

La solution est ici assez simple :

On effectue une **itération** sur les éléments de `tab` en s'arrêtant au premier élément strictement plus petit que son prédécesseur.

Comme le 1er élément de `tab` ne peut être mal placé (car sans prédécesseur), l'itération de recherche d'un élément mal placé commencera à partir du 2e élément

De même, s'il n'y a pas d'élément mal placé on retournera, par convention, la fausse position -1.

Tri par insertion : résolution détaillée (2)

Le sous-problème $\boxed{\textit{trouver la bonne place}}$

- entrée : un tableau `tab` et l'entier `pos`, position d'un élément mal placé
- sortie : la bonne position `pos_ok` de l'élément mal placé.

La « bonne position » correspond à la plus grande position `pos_ok` ($<$`pos`) dans le tableau `tab` telle que l'élément (`pos_ok-1`) de `tab` soit inférieur ou égal au `pos`-ième.

L'algorithme pour $\boxed{\textit{trouver la bonne place}}$ doit donc parcourir les éléments de `tab`, un à un, entre le premier et celui à la position `pos`, à la recherche de la bonne position.

Cet algorithme effectue donc aussi une **itération** sur les éléments du tableau, du premier élément à celui de position `pos`.

Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).

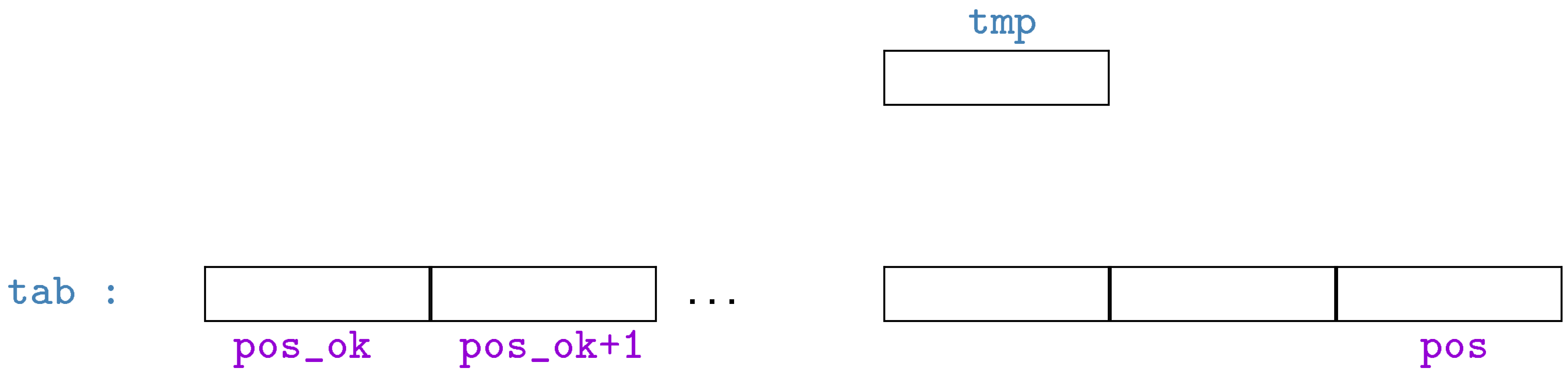
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



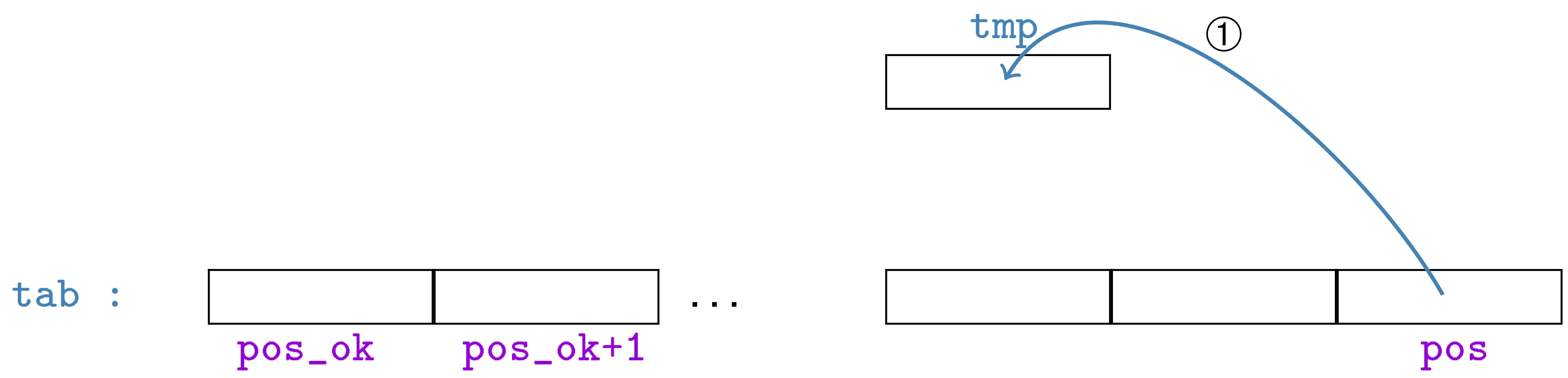
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



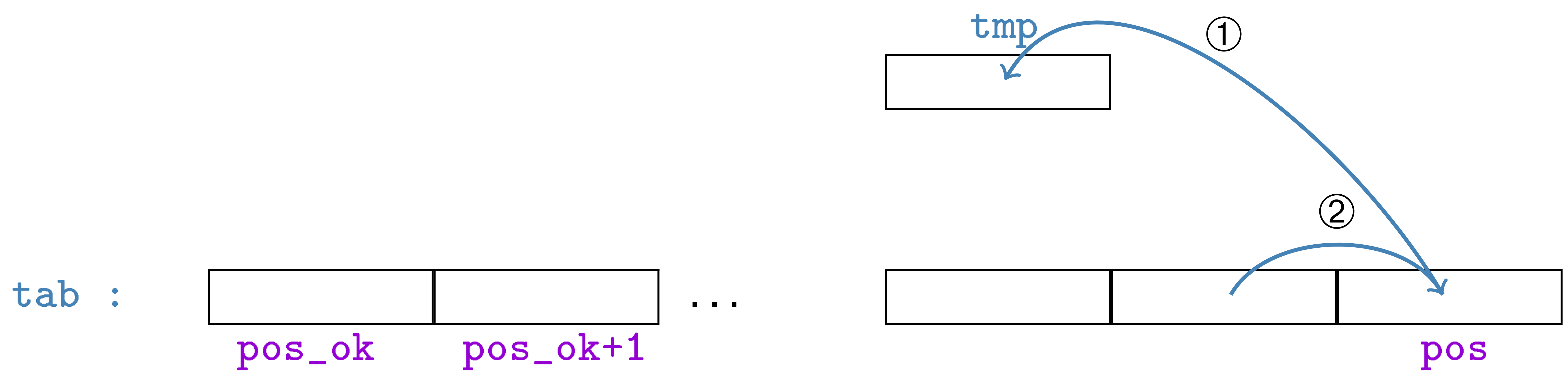
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



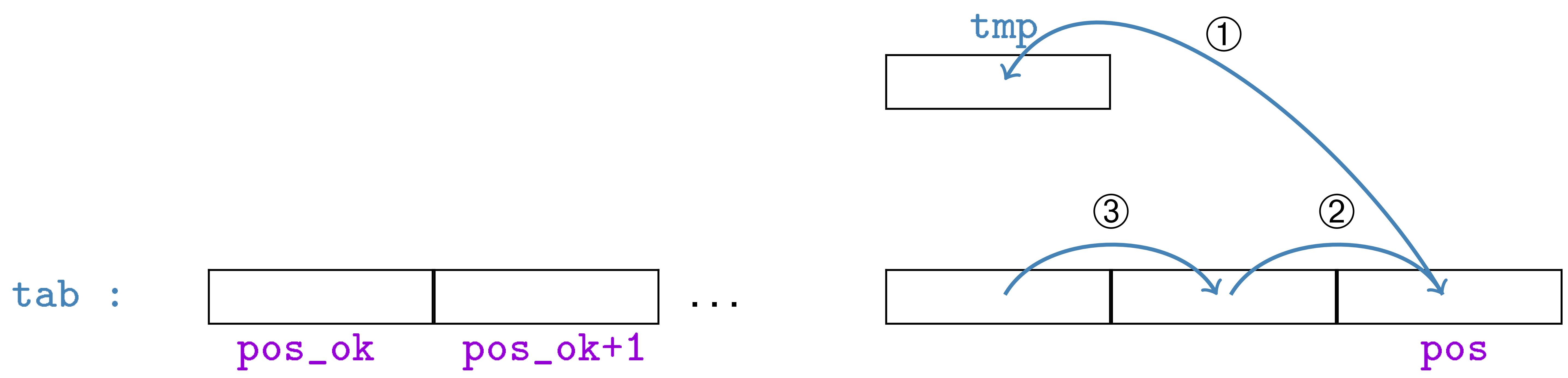
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



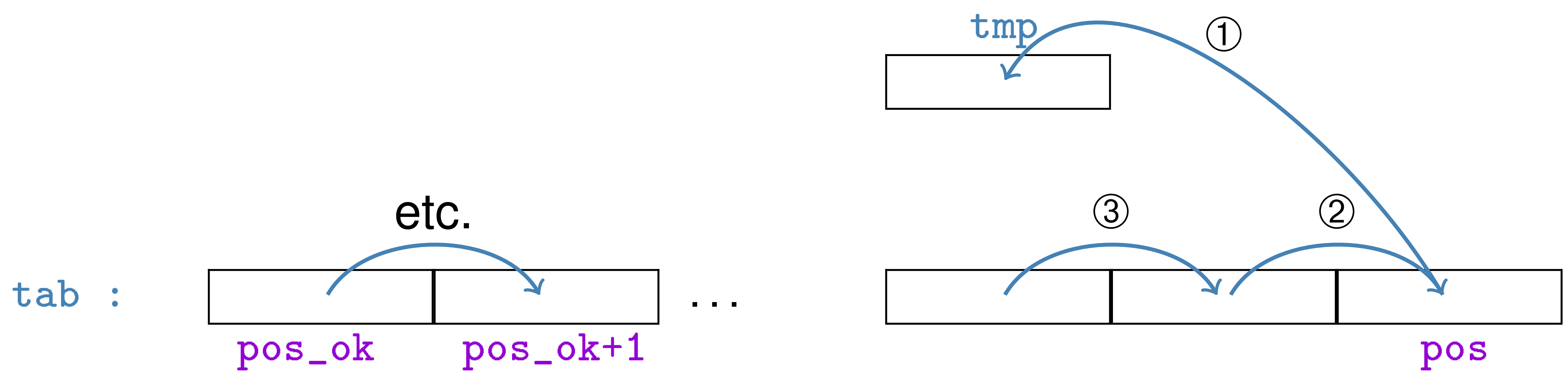
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



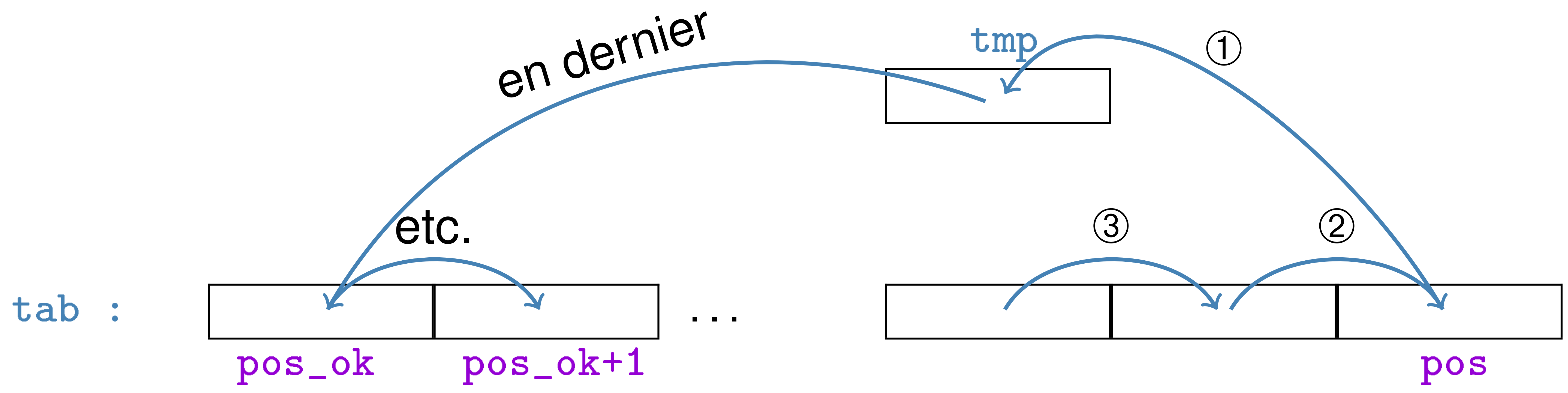
Tri par insertion : résolution détaillée (3)

Le sous-problème $\boxed{\textit{déplacer un élément}}$

entrée : un tableau `tab`, une position de départ `pos` et une position finale `pos_ok`

On doit déplacer l'élément de la position `pos` dans `tab` à la position `pos_ok`.

On peut effectuer cette opération par **décalages successifs** (en utilisant un stockage temporaire `tmp`).



Synthèse

tri insertion
entrée : *un tableau T* sortie : *le tableau trié*

pos $\longleftarrow$ **mal_placé**(T)
Tant que pos $\neq -1$
    pos_ok $\longleftarrow$ **bonne_place**(T, pos)
    déplace(T, pos, pos_ok)
    pos $\longleftarrow$ **mal_placé**(T)

avec :

mal_placé
entrée : *un tableau T* sortie : *position du premier élément mal placé*
...à vous de l'écrire...

etc.

Améliorations

1. Pour $\boxed{\textit{rechercher le prochain élément mal placé}}$, ce n'est pas la peine de recommencer du début (position 2) à chaque fois. On peut partir de *la dernière position mal placée*.
2. On pourrait $\boxed{\textit{trouver la bonne place}}$ et $\boxed{\textit{déplacer l'élément}}$ à cette place *en même temps* (c.-à-d. en *une seule* itération)

Si l'on regroupe tout ceci, on arrive à l'algorithme suivant :

Pour i de 1 à N exclu (= taille du tableau)
  tmp $\longleftarrow$ tableau[i]
  j $\longleftarrow$ i
  Tant que j $>$ 0 **et** tableau[j-1]>tmp
    tableau[j] $\longleftarrow$ tableau[j-1]
    j $\longleftarrow$ j-1
  tableau[j] $\longleftarrow$ tmp

Divide and Conquer

Parmi les méthodes descendantes, une qui est souvent mise en œuvre s'appelle « **diviser pour régner** » (divide and conquer).

Elle consiste à diviser/regrouper les données pour résoudre des (sous-)problèmes plus simples.

Cette idée n'est pas nouvelle :

> « *Diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il soit requis pour les mieux résoudre.* »

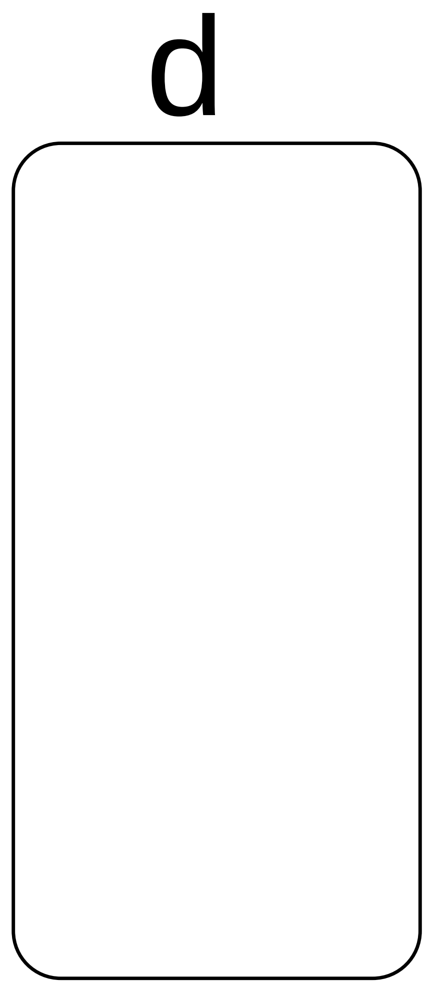
(Descartes, *Discours de la méthode*, 17e siècle)

Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :

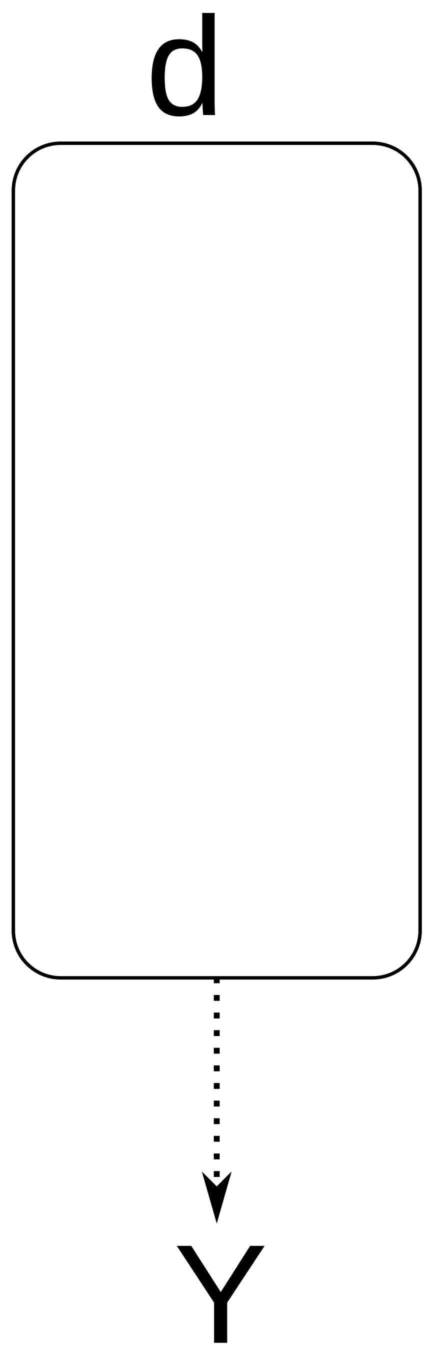
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



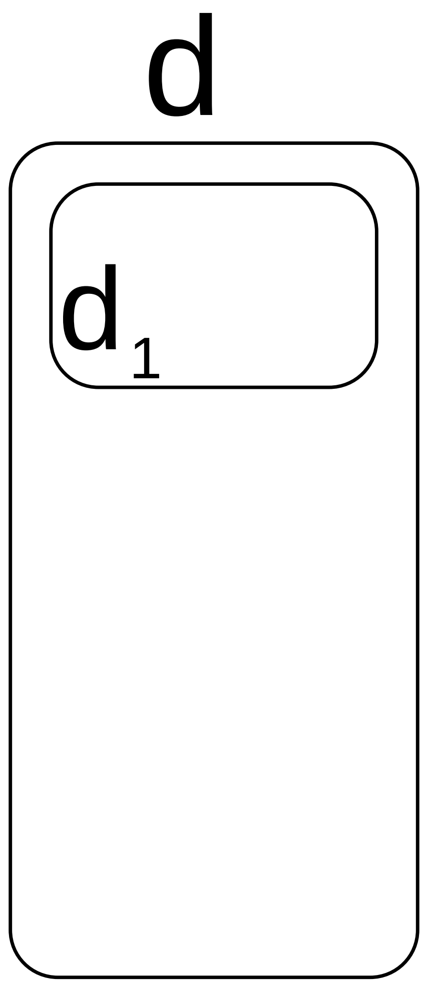
Divide and Conquer

Pour un problème *P* portant sur des **données** *d*, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



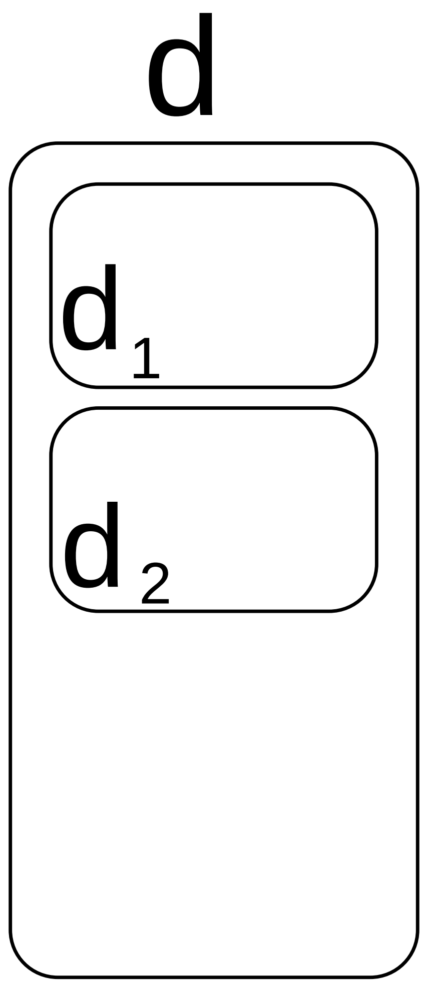
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



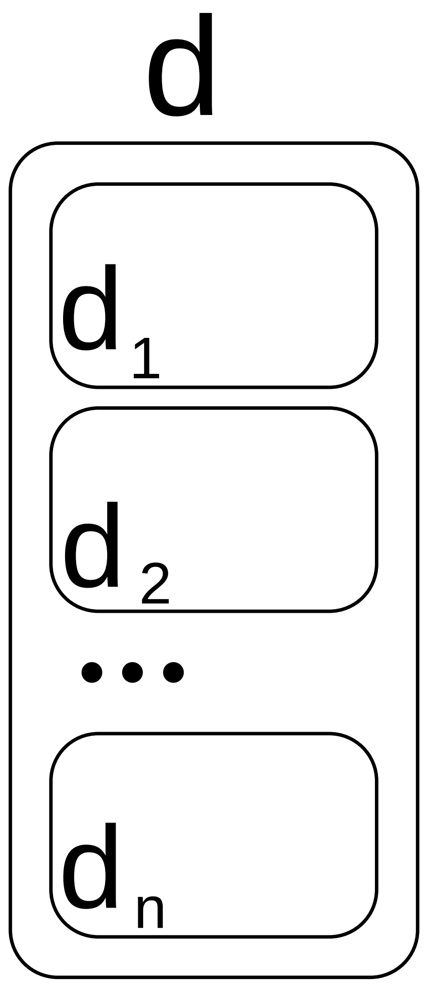
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



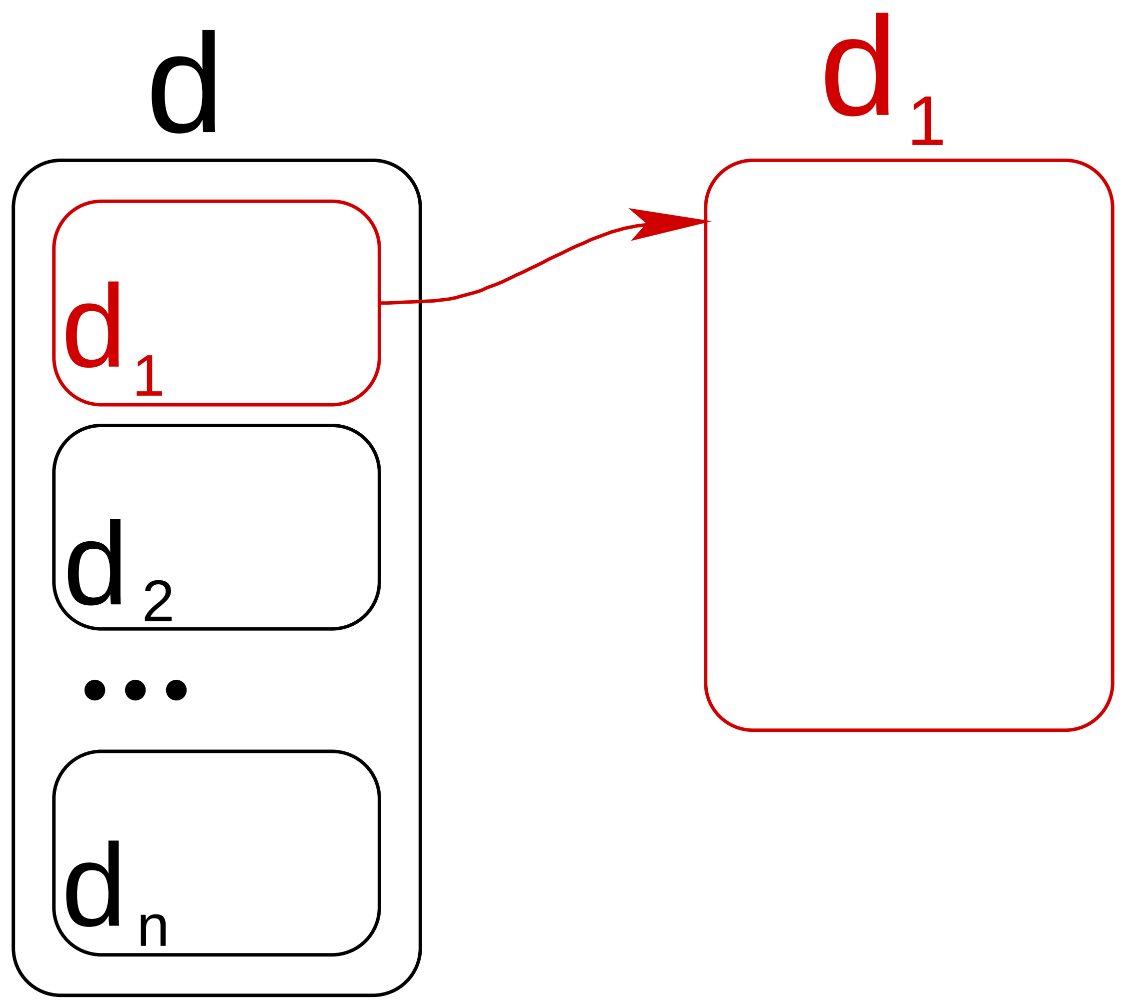
Divide and Conquer

Pour un problème *P* portant sur des **données** *d*, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



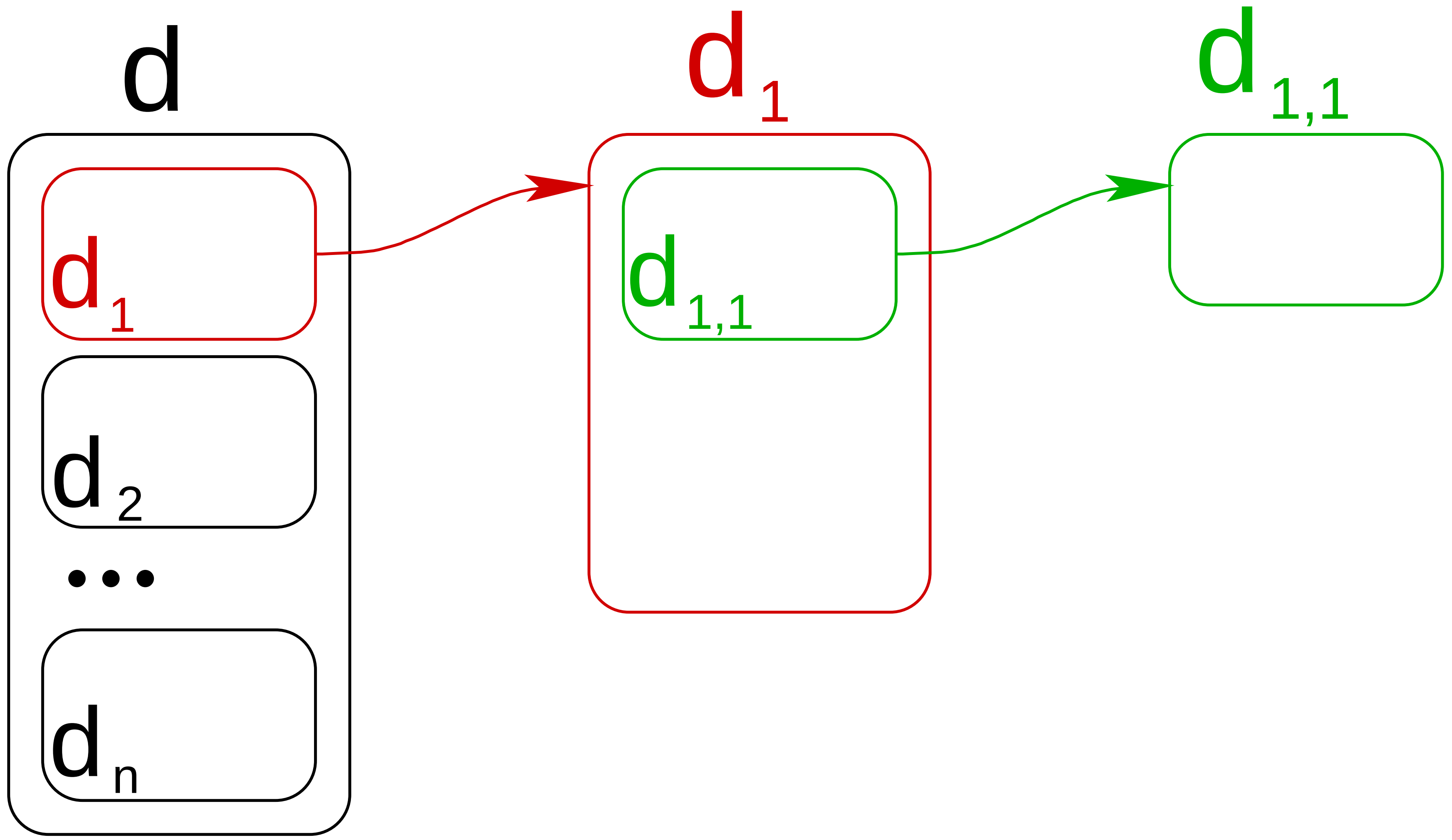
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



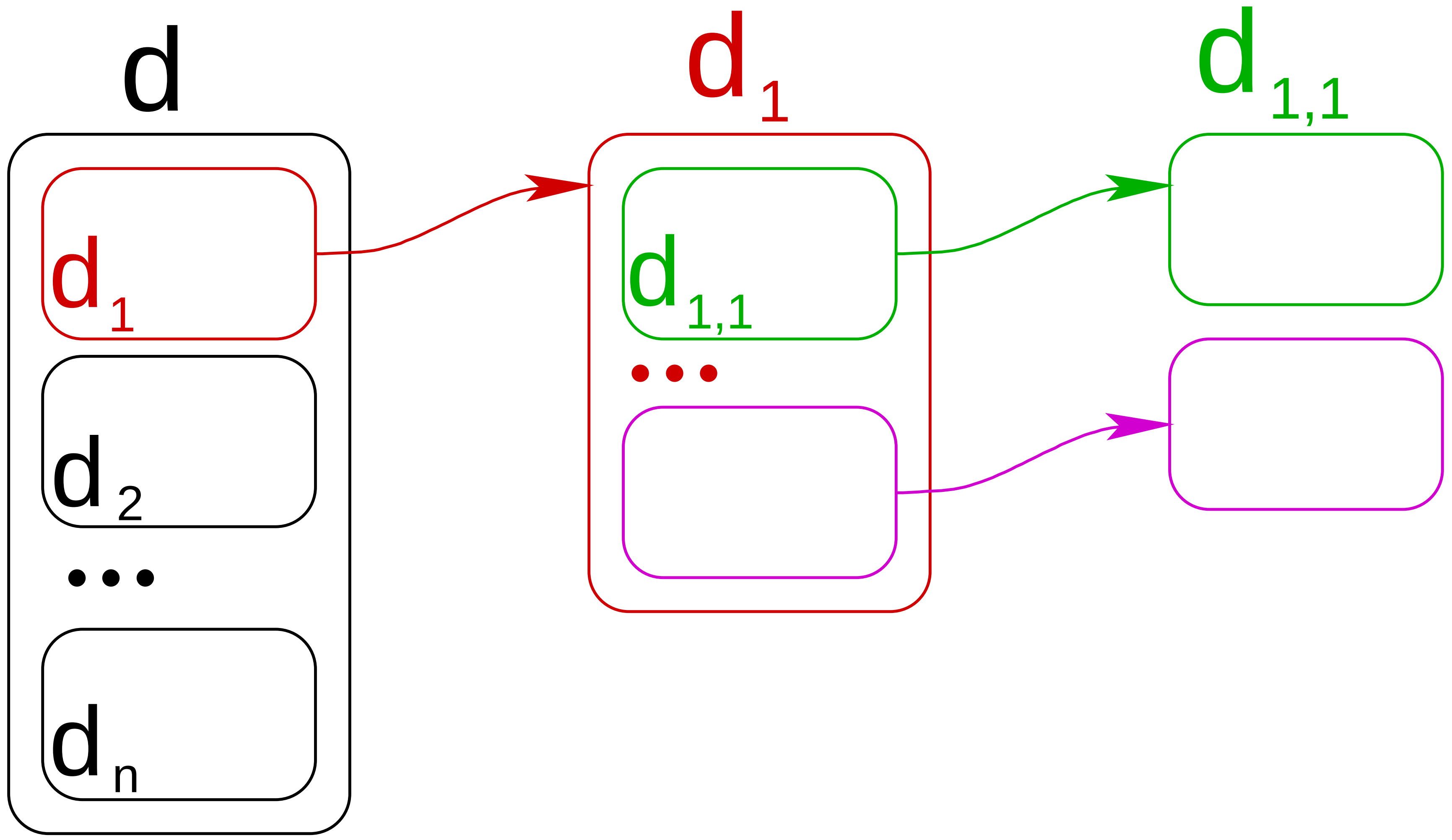
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



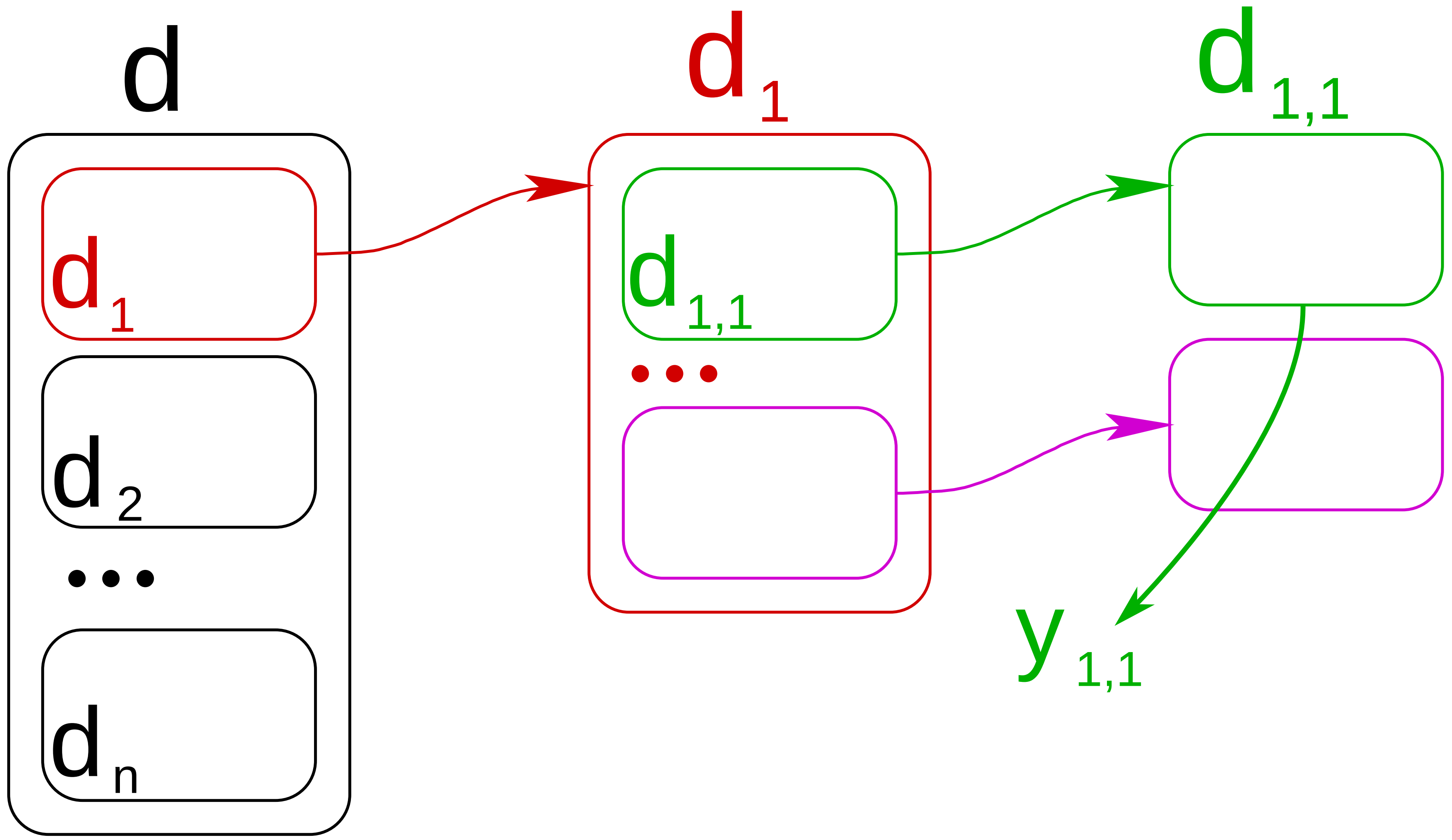
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



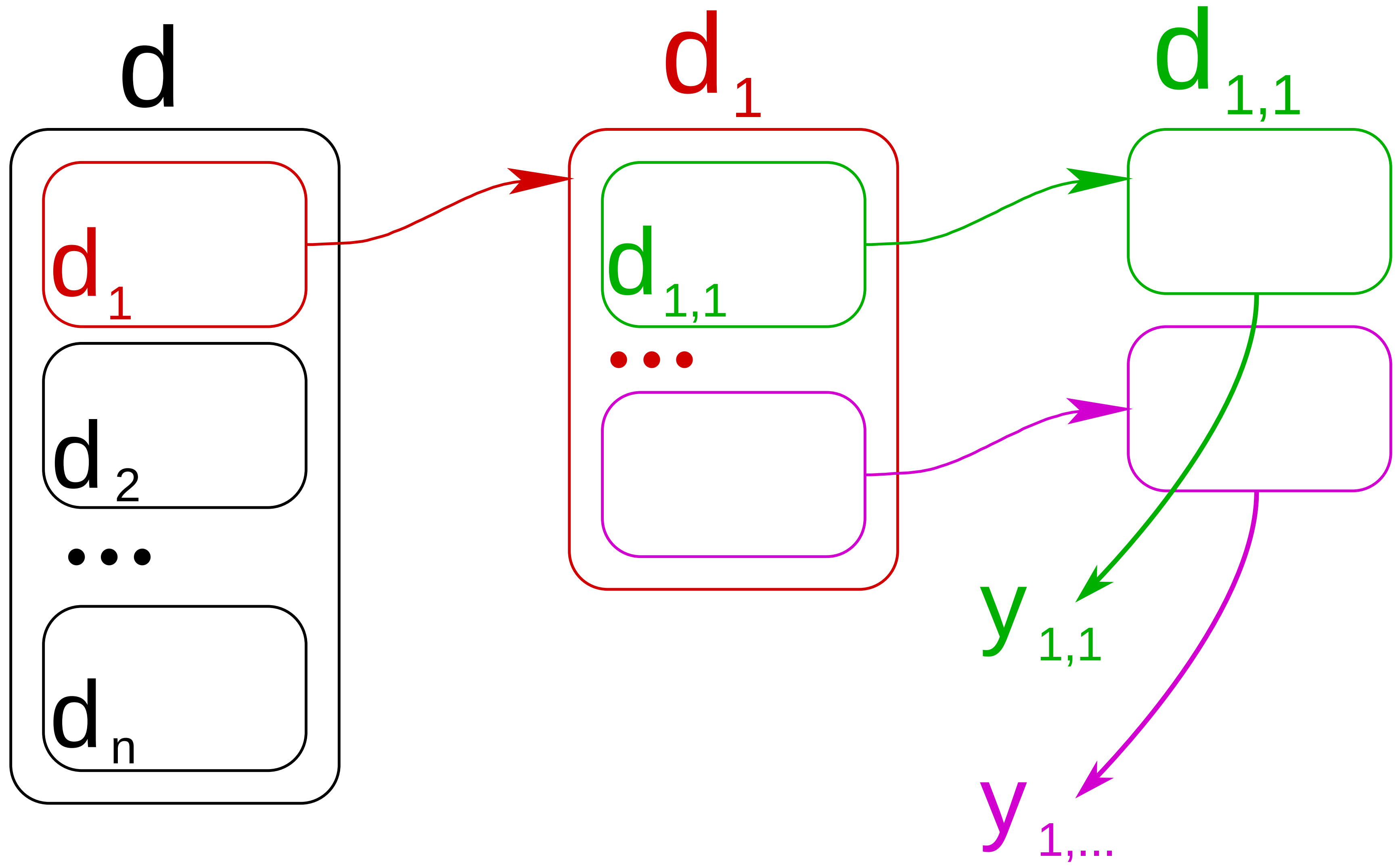
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



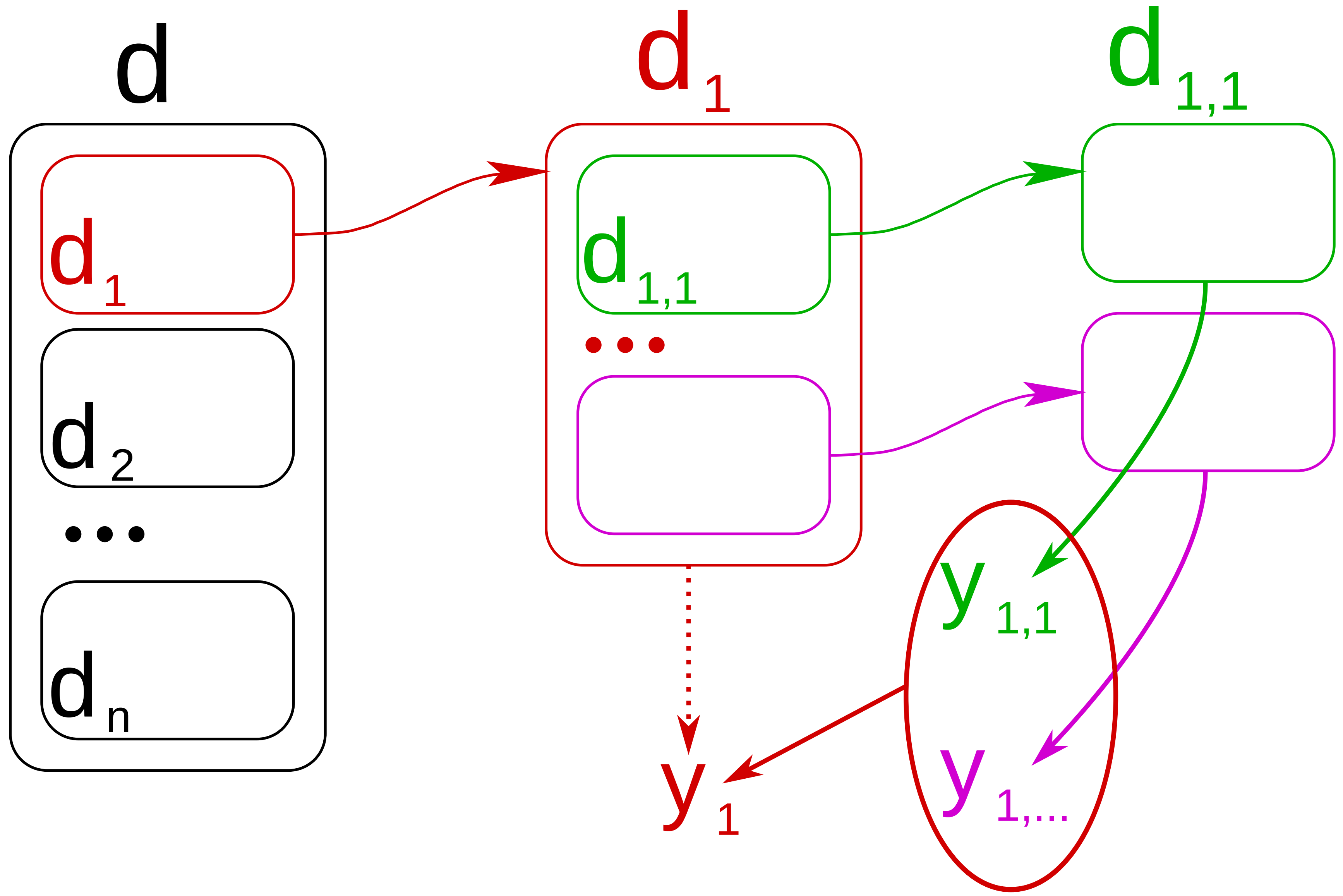
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



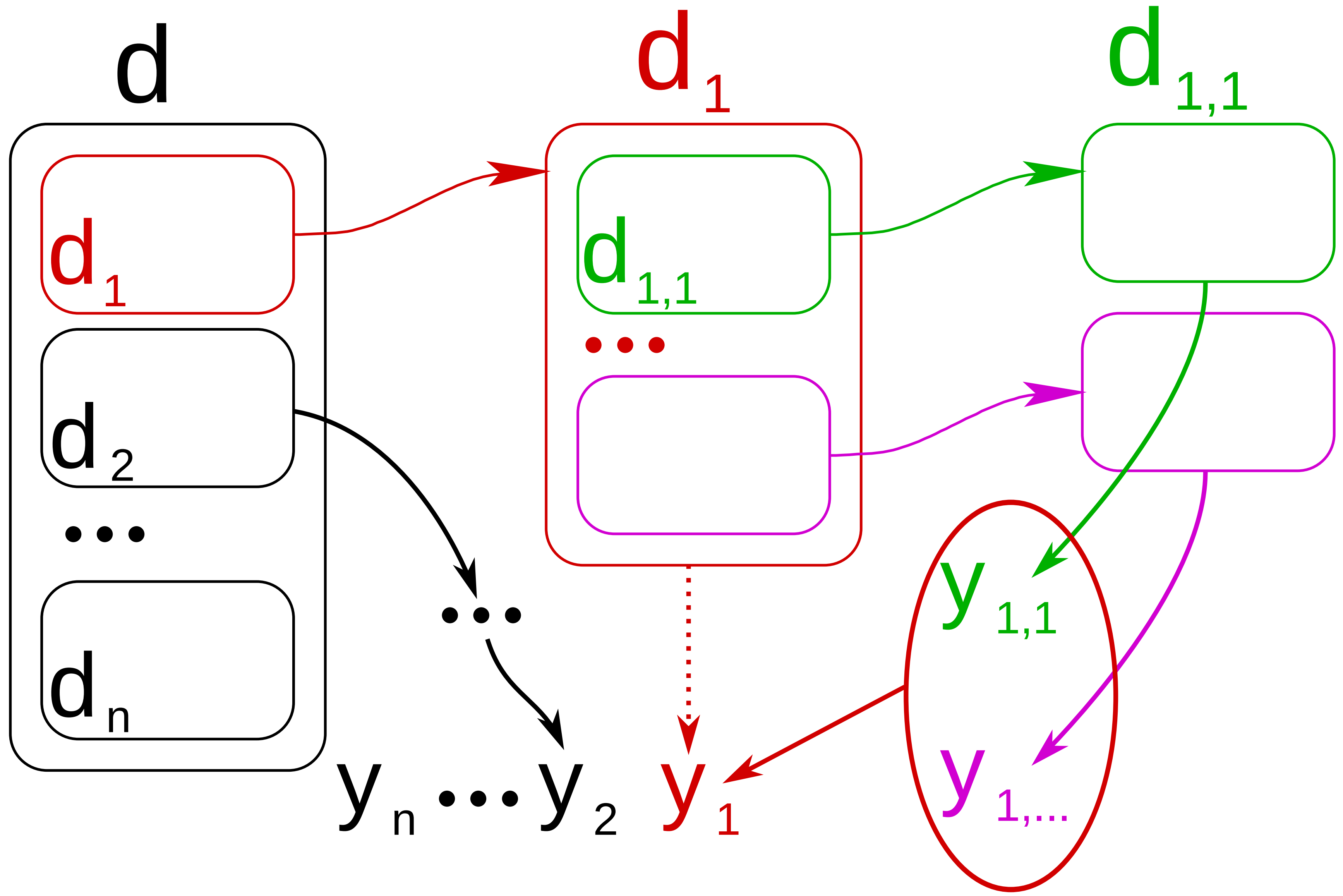
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



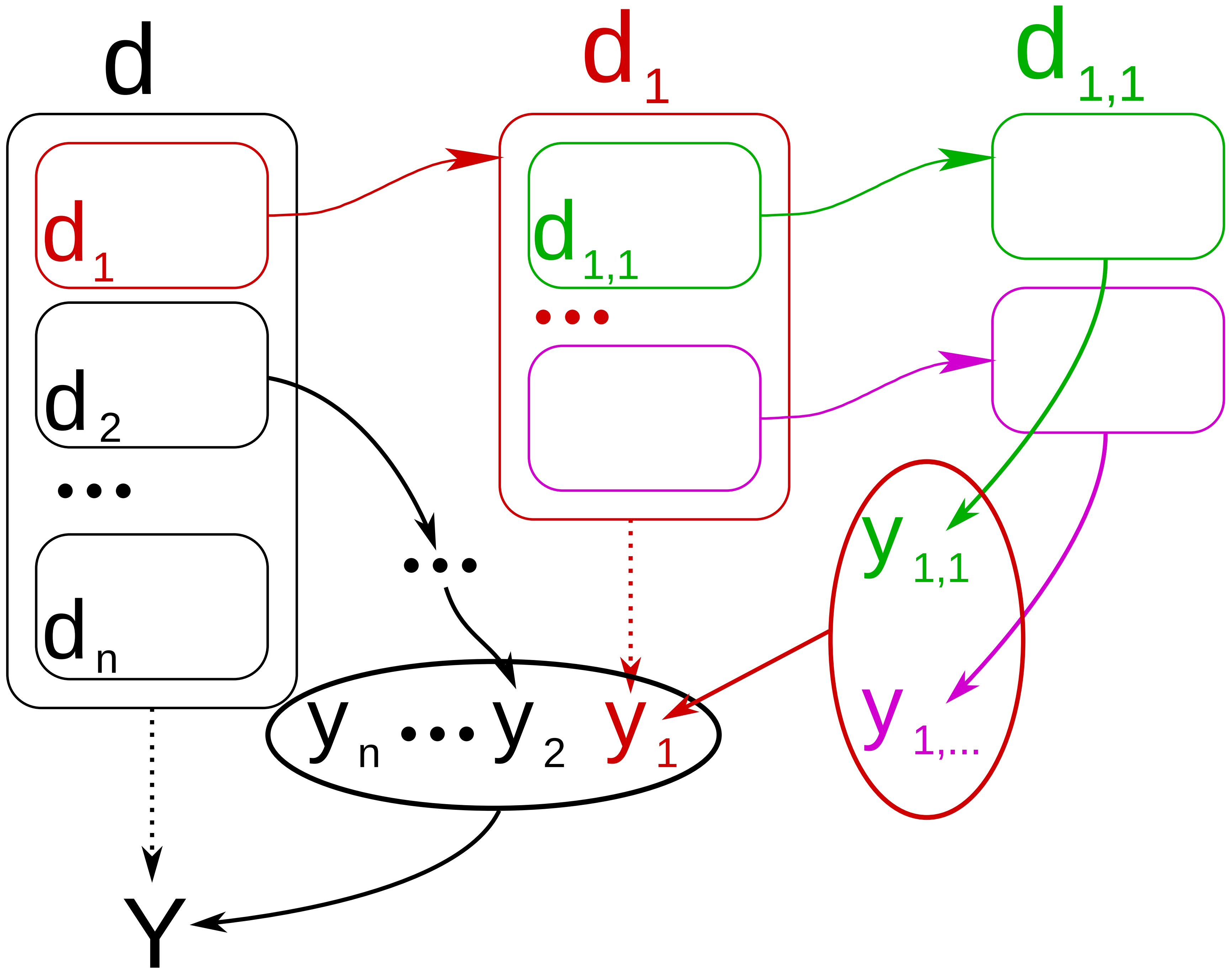
Divide and Conquer

Pour un problème *P* portant sur des **données** *d*, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



Divide and Conquer

Pour un problème *P* portant sur des **données** *d*, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :



Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :

- si d est « assez simple », appliquer un algorithme « *ad hoc* » permettant de résoudre le problème (traitement des cas triviaux)
- sinon,
  - décomposer d en instances plus petites d_1, ..., d_n
  - puis pour chacun des d_i : résoudre $P_i(d_i)$.
    On obtient alors une solution y_i
  - recombiner les y_i pour former la solution Y au problème de départ.

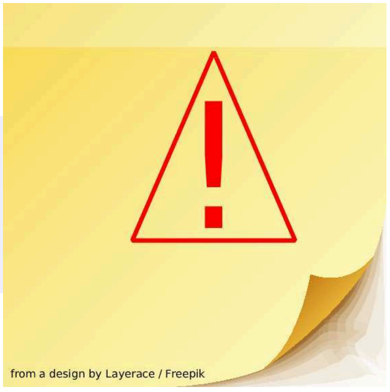
Divide and Conquer

Pour un problème P portant sur des **données** d, le schéma général de l'approche « *diviser pour régner* » est le suivant :

- si d est « assez simple », appliquer un algorithme « *ad hoc* » permettant de résoudre le problème (traitement des cas triviaux)
- sinon,
  - décomposer d en instances plus petites d_1, ..., d_n
  - puis pour chacun des d_i : résoudre $P_i(d_i)$.
    On obtient alors une solution y_i
  - recombiner les y_i pour former la solution Y au problème de départ.

☞ conduit souvent à des algorithmes récursifs

Récursion



Une catégorie particulière de méthodes de résolution de problèmes sont les solutions **récursives**.

Le principe de l'approche récursive est de

> *ramener le problème à résoudre à un sous-problème*, version simplifiée *du problème d'origine*.

Exemples :

- recherche par dichotomie (cf leçon précédente)
- exemple en mathématiques : le raisonnement par récurrence
- les algorithmes dits récursifs (à suivre)

Exemple : Les tours de Hanoï

Jeu des tours de Hanoï :
déplacer d'un pilier à un autre une colonne de disques de taille croissante

- en utilisant un seul pilier de transition (c.-à.d. 3 piliers en tout)
- en ne déplaçant qu'un seul disque à chaque fois
- en ne posant un disque que sur le sol ou sur un disque plus grand.

Exemple : Les tours de Hanoï

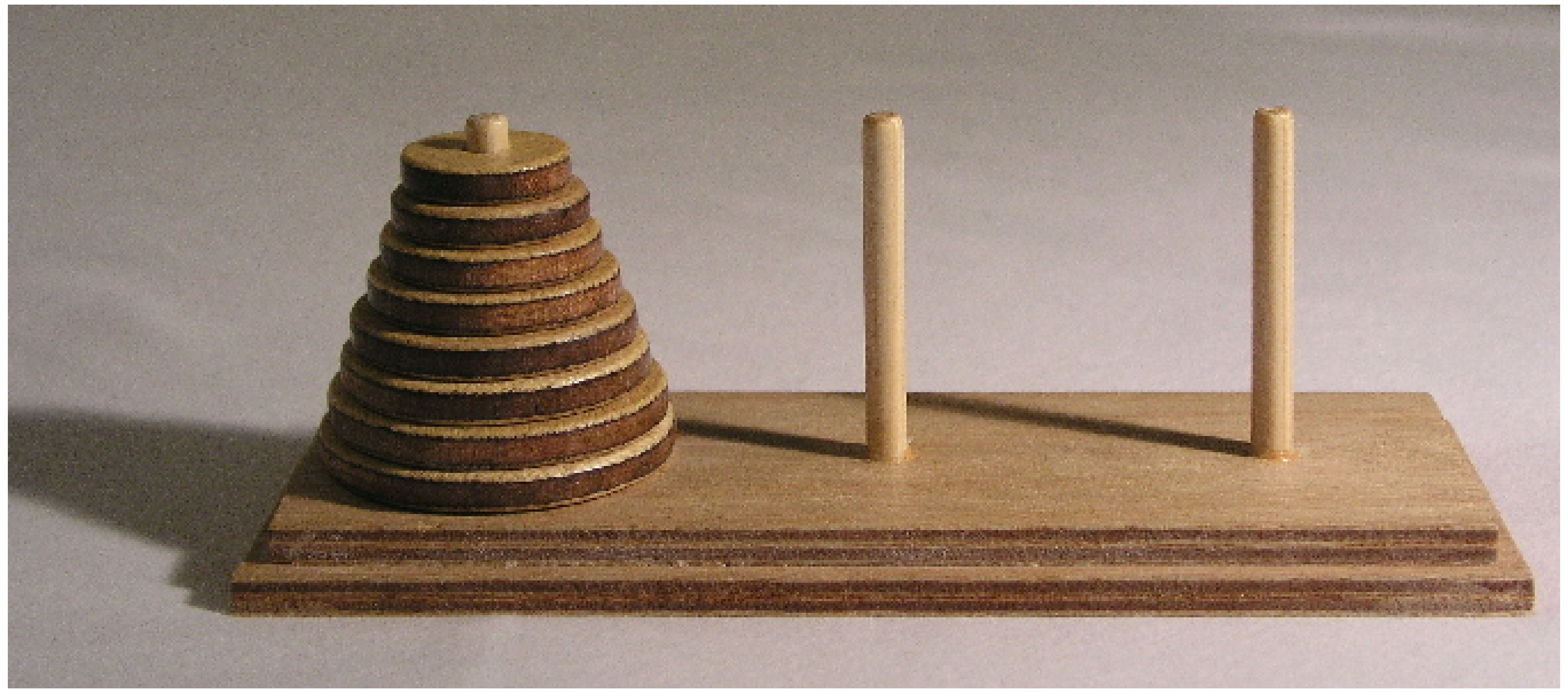
Jeu des tours de Hanoï :
déplacer d'un pilier à un autre une colonne de disques de taille croissante

- en utilisant un seul pilier de transition (c.-à.d. 3 piliers en tout)
- en ne déplaçant qu'un seul disque à chaque fois
- en ne posant un disque que sur le sol ou sur un disque plus grand.

Exemple : Les tours de Hanoï

Jeu des tours de Hanoï :
déplacer d'un pilier à un autre une colonne de disques de taille croissante

- en utilisant un seul pilier de transition (c.-à.d. 3 piliers en tout)
- en ne déplaçant qu'un seul disque à chaque fois
- en ne posant un disque que sur le sol ou sur un disque plus grand.



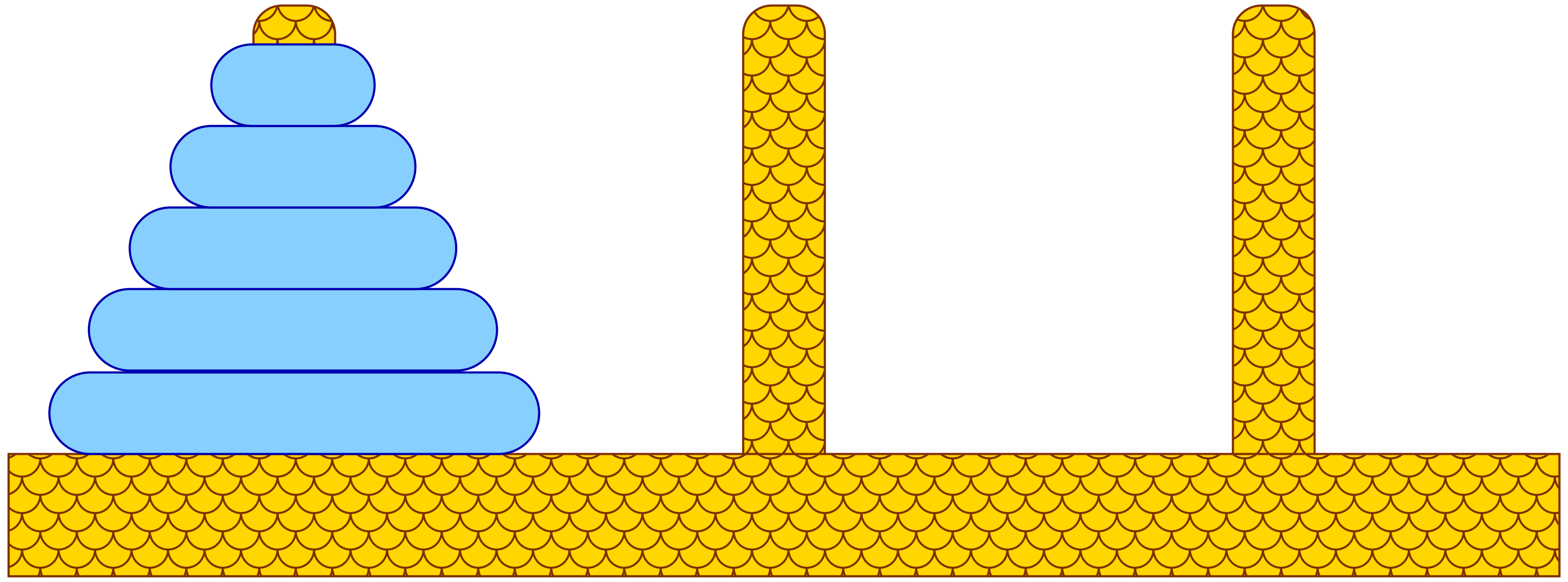
Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques,
je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques
(et je sais le faire pour une pile de 0 disque)

Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques,
je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques
(et je sais le faire pour une pile de 0 disque)

Démonstration :

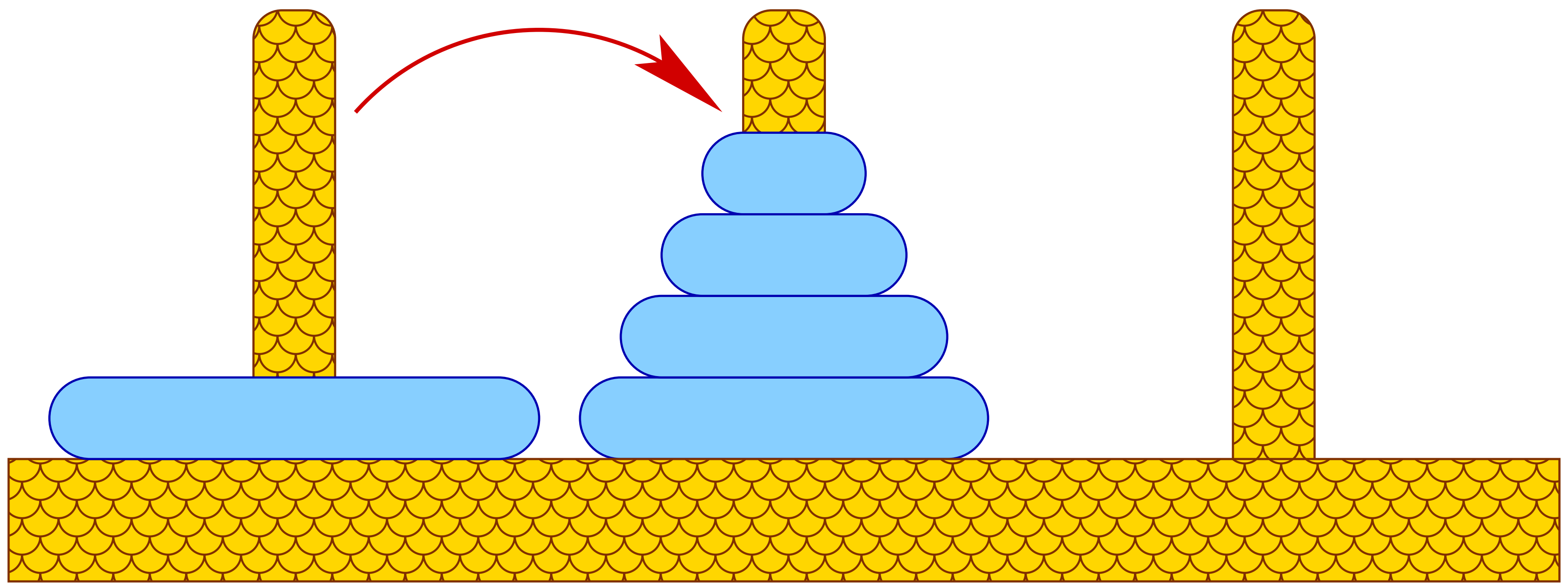


Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques,
je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques
(et je sais le faire pour une pile de 0 disque)

Démonstration :

- je déplace les n disques du haut sur le pilier de transition (en utilisant la méthode que je connais par hypothèse)

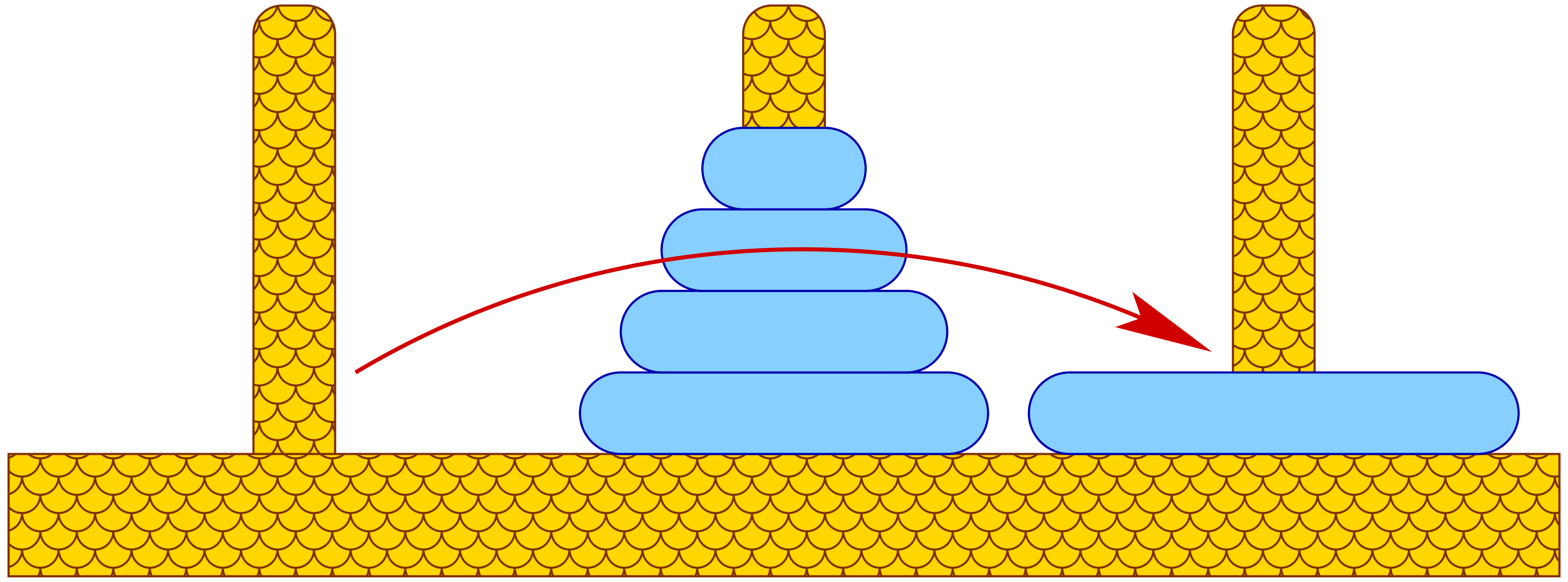


Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques,
je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques
(et je sais le faire pour une pile de 0 disque)

Démonstration :

- je déplace les n disques du haut sur le pilier de transition (en utilisant la méthode que je connais par hypothèse)
- je mets le dernier disque sur le pilier destination

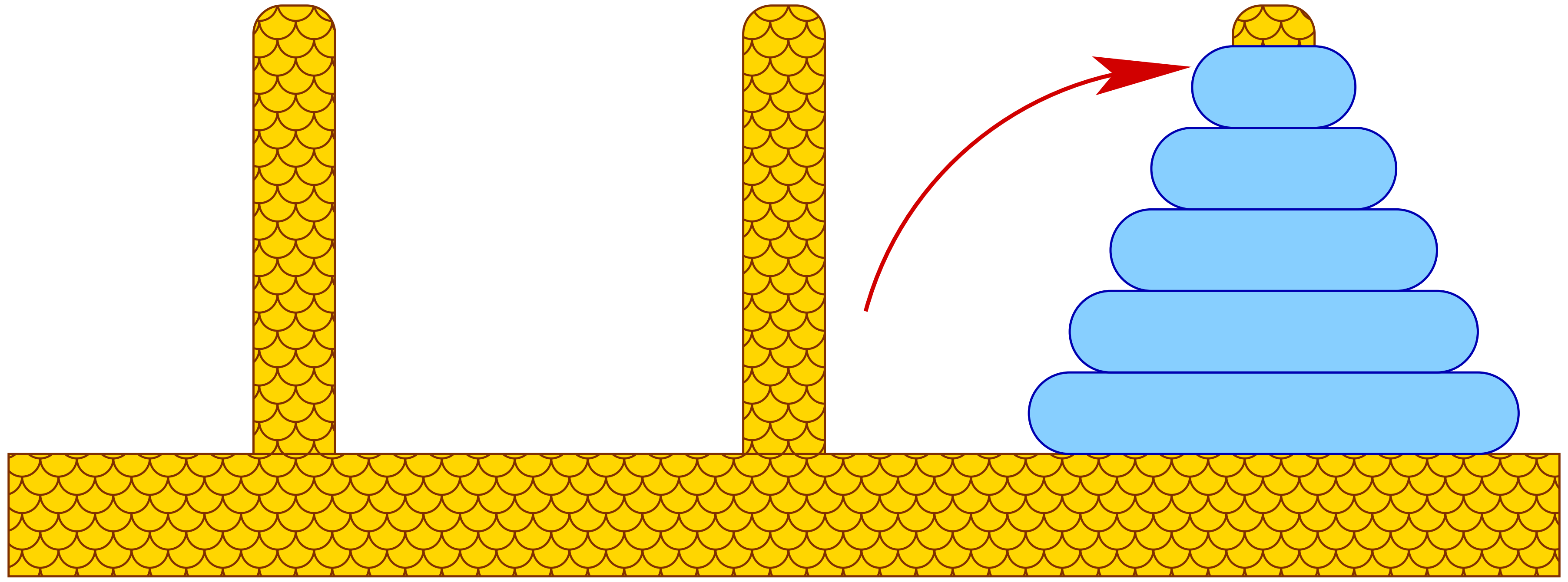


Les tours de Hanoï (2)

Idée : si je peux le faire pour une pile de n disques,
je peux le faire pour une pile de $n+1$ disques
(et je sais le faire pour une pile de 0 disque)

Démonstration :

- je déplace les n disques du haut sur le pilier de transition (en utilisant la méthode que je connais par hypothèse)
- je mets le dernier disque sur le pilier destination
- je redéplace la tour de n disques du pilier de transition au pilier destination (en utilisant à nouveau la méthode que je connais par hypothèse, et le pilier initial comme transition).



Les tours de Hanoï : algorithme

Tours de Hanoï

entrée : *jeu avec pile de n disques* (*correctement ordonnés*) *sur le pilier numéro i*, i, j $(\neq i)$, *nombre n de disques à déplacer*

sortie : *jeu avec pile de n disques* (*correctement ordonnés*) *sur le pilier numéro j*

Si $n > 0$

> Choisir k différent de i et j (par exemple $k \longleftarrow 3 - i - j$)
>
> **Tours de Hanoï**
>
> entrée : *jeu*, i, k, $n-1$
>
> Déplace disque du pilier i au pilier j
>
> **Tours de Hanoï**
>
> entrée : *jeu*, k, j, $n-1$

démo : `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Tower_of_Hanoi_4.gif`

Autre(s) exemple(s)

Calculer la somme des n premiers entiers.

Si je peux le faire pour n, je peux le faire pour $n+1$:

$$S(n+1) = (n+1) + S(n)$$

Note : se généralise trivialement au calcul de toute grandeur définie par une équation de récurrence.

Algorithme récursif

Le schéma général d'un algorithme récursif est le suivant :

monalgo_rec
entrée : *entrée du problème* sortie : *solution du problème*
. . . **monalgo_rec** entrée : *entrée du sous-problème* . . .

Algorithme récursif

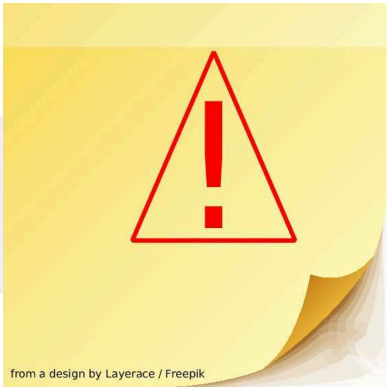
Le schéma général d'un algorithme récursif est le suivant :

monalgo_rec
entrée : *entrée du problème* sortie : *solution du problème*
... **monalgo_rec** entrée : *entrée du sous-problème* ...

Exemple (incomplet) :

somme
entrée : n sortie : $S(n)$
$m \longleftarrow$ **somme**$(n-1)$ **Sortir :** $n+m$

Condition de terminaison

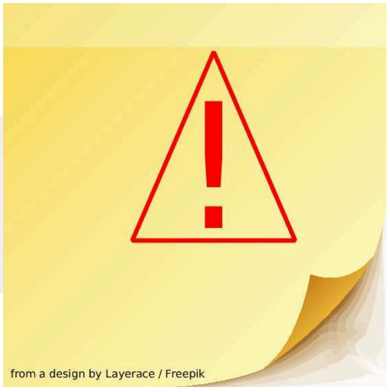


Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

condition de terminaison

sinon, on risque une boucle infinie.

Condition de terminaison



Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

condition de terminaison

sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :

somme

entrée : *3*
sortie : –

> **somme**
>
> entrée : *2*

$3 + \ldots$

Condition de terminaison

Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

condition de terminaison

sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :

somme
entrée : *3*
sortie : –

> **somme**
> entrée : *2*

$3 + \dots$

somme
entrée : *2*
sortie : –

> **somme**
> entrée : *1*

$2 + \dots$

Condition de terminaison

Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

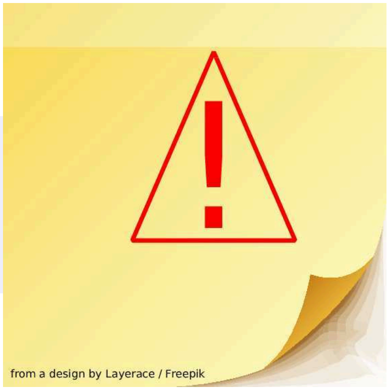
condition de terminaison

sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :

somme	**somme**	**somme**
entrée : *3* sortie : –	entrée : *2* sortie : –	entrée : *1* sortie : –
somme entrée : *2* $3 + \dots$	**somme** entrée : *1* $2 + \dots$	**somme** entrée : *0* $1 + \dots$

Condition de terminaison



Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

condition de terminaison

sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :

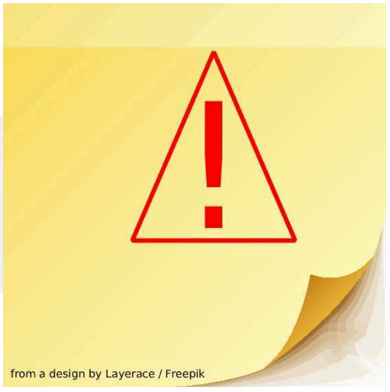
somme
entrée : *3*
sortie : –
somme
entrée : *2*
$3 + \ldots$

somme
entrée : *2*
sortie : –
somme
entrée : *1*
$2 + \ldots$

somme
entrée : *1*
sortie : –
somme
entrée : *0*
$1 + \ldots$

somme
entrée : *0*
sortie : –
somme
entrée : *-1*
$0 + \ldots$

Condition de terminaison



Attention ! Pour que la résolution récursive soit correcte, il faut une

condition de terminaison

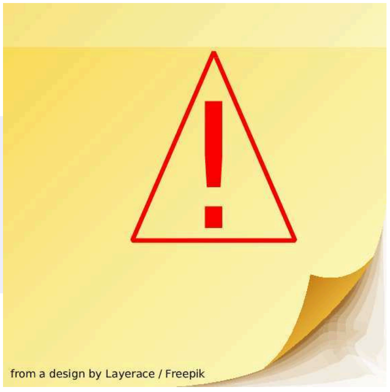
sinon, on risque une boucle infinie.

Exemple :

somme	somme	somme	somme
entrée : *3*	entrée : *2*	entrée : *1*	entrée : *0*
sortie : –	sortie : –	sortie : –	sortie : –
somme entrée : *2*	**somme** entrée : *1*	**somme** entrée : *0*	**somme** entrée : *-1*
$3 + \dots$	$2 + \dots$	$1 + \dots$	$0 + \dots$

$\dots$

Algorithme récursif (correct)



Le schéma général **correct** d'un algorithme récursif est donc le suivant :

monalgo_rec

entrée : X
sortie : Y

Si terminaison(X)
  $Y \leftarrow \dots$
Sinon
  $\dots$
  monalgo_rec
  entrée : *entrée de l'instance réduite*
  $\dots$

1^{er} exemple

Reprenons la somme des n premiers entiers positifs :

somme
entrée : n sortie : $S(n)$
Si $n \leq 0$ **Sortir :** 0 **Sortir :** $n +$ **somme**$(n-1)$

1^{er} exemple : déroulement

somme
entrée : 3 sortie : $S(3)$
Si $3 \leq 0$ **Sortir :** 0 **Sortir :** $3 +$ **somme**(2)

1^{er} exemple : déroulement

somme
entrée : 3 sortie : $S(3)$
Si $3 \leq 0$ **Sortir :** 0 **Sortir :** $3 +$ **somme**(2)

somme
entrée : 2 sortie : $S(2)$
Si $2 \leq 0$ **Sortir :** 0 **Sortir :** $2 +$ **somme**(1)

1^{er} exemple : déroulement

somme

entrée : 3
sortie : $S(3)$

Si $3 \leq 0$
    Sortir : 0

Sortir : $3 +$ **somme**(2)

somme

entrée : 2
sortie : *S(2)*

Si $2 \leq 0$
    Sortir : 0

Sortir : $2 +$ **somme**(1)

somme

entrée : 1
sortie : *S(1)*

Si $1 \leq 0$
    Sortir : 0

Sortir : $1 +$ **somme**(0)

1^{er} exemple : déroulement

somme
entrée : 3
sortie : $S(3)$
Si $3 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $3 + \textbf{somme}(2)$

somme
entrée : 2
sortie : *S(2)*
Si $2 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $2 + \textbf{somme}(1)$

somme
entrée : 1
sortie : *S(1)*
Si $1 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $1 + \textbf{somme}(0)$

somme
entrée : 0
sortie : *S(0)*
Si $0 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $0 + \textbf{somme}(-1)$

1er exemple : déroulement

somme

entrée : 3
sortie : $S(3)$

Si $3 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $3 + \textbf{somme}(2)$

somme

entrée : 2
sortie : *S(2)*

Si $2 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $2 + \textbf{somme}(1)$

somme

entrée : 1
sortie : *S(1)*

Si $1 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $1 + \textbf{somme}(0)$

somme

entrée : 0
sortie : *0*

Si $0 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $0 + \textbf{somme}(-1)$

1^{er} exemple : déroulement

somme
entrée : 3
sortie : $S(3)$
Si $3 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $3 + \textbf{somme}(2)$

somme
entrée : 2
sortie : *S(2)*
Si $2 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $2 + \textbf{somme}(1)$

somme
entrée : 1
sortie : *1*
Si $1 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $1 + 0$

somme
entrée : 0
sortie : *0*
Si $0 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $0 + \textbf{somme}(-1)$

1^{er} exemple : déroulement

somme
entrée : 3
sortie : $S(3)$
Si $3 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $3 +$ **somme**(2)

somme
entrée : 2
sortie : *3*
Si $2 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $2 + 1$

somme
entrée : 1
sortie : *1*
Si $1 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $1 + 0$

somme
entrée : 0
sortie : *0*
Si $0 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $0 +$ **somme**(-1)

1er exemple : déroulement

somme
entrée : 3
sortie : 6

Si $3 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $3 + 3$

somme
entrée : 2
sortie : *3*

Si $2 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $2 + 1$

somme
entrée : 1
sortie : *1*

Si $1 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $1 + 0$

somme
entrée : 0
sortie : *0*

Si $0 \leq 0$
  Sortir : 0
Sortir : $0 +$ **somme**(-1)

$$S(3) = 6$$

1$^{\text{er}}$ exemple : remarques

Notez qu'il est parfois préférable d'écrire la fonction sous une autre forme que la forme récursive.
Si l'on reprend l'exemple de la somme des n premiers entiers :

$$S(0) = 0$$
$$S(n+1) = (n+1) + S(n)$$

mais on a aussi (!) :

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

c'est-à-dire une itération.

On peut parfois même utiliser une expression analytique (lorsqu'on en a une !) ; par exemple :

$$S(n) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

1^{er} exemple : complexités ?

- version récursive ?

somme
entrée : n sortie : $S(n)$
Si $n \leq 0$ **Sortir :** 0 **Sortir :** $n +$ **somme**$(n-1)$

- version itérative ($S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$) ?

Exemple 2 : version récursive du tri par insertion

On peut aussi concevoir le tri par insertion de façon récursive :

tri
entrée : *tableau de n éléments* sortie : *tableau trié*
condition arrêt : moins de 2 éléments **tri (instance réduite du problème)** entrée : *tableau de $n-1$ éléments* *insertion* de l'élément $n-1$ dans le tableau trié de $n-1$ éléments

Tri récursif : exemple

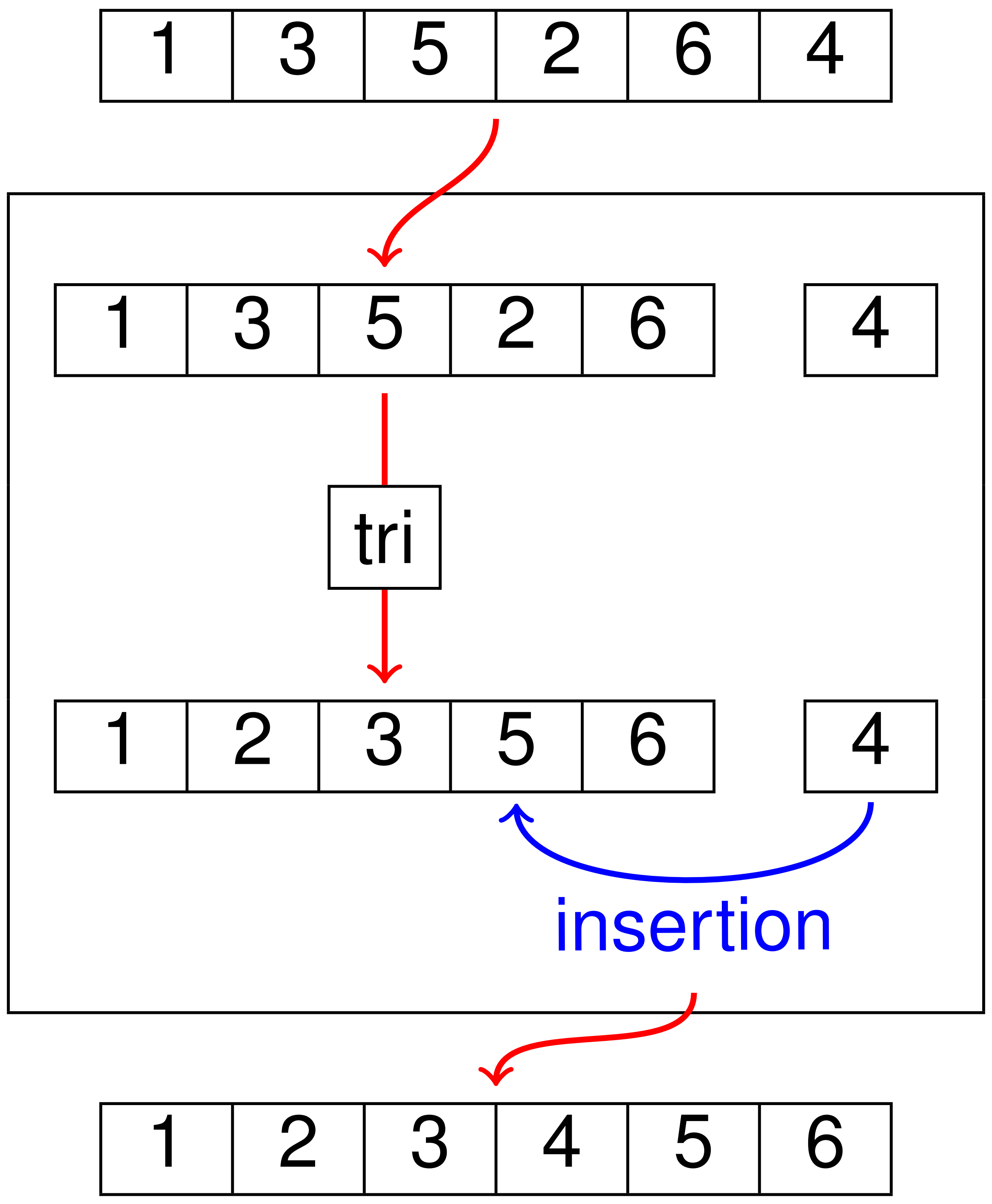


Schéma des appels récursifs (exemple)

tri_récursif({C,B,A})

Schéma des appels récursifs (exemple)

tri_récursif({C,B,A})

① $\downarrow$

tri_récursif({C,B}) ;

Schéma des appels récursifs (exemple)

tri_récursif({C,B,A})

$\downarrow$ ①

tri_récursif({C,B}) ;

$\downarrow$ ②

tri_récursif({C}) ;

Schéma des appels récursifs (exemple)

tri_récursif({C,B,A})

①

tri_récursif({C,B}) ;

②

tri_récursif({C}) ;

{C}

Schéma des appels récursifs (exemple)

tri_récursif({C,B,A})

①

tri_récursif({C,B}) ;

②

tri_récursif({C}) ; ③ insère(B, {C})

{C}

Schéma des appels récursifs (exemple)

tri_récursif({C,B,A})

①

tri_récursif({C,B}) ;

②

{B,C}

tri_récursif({C}) ;   ③ insère(B, {C})

{C}

Schéma des appels récursifs (exemple)

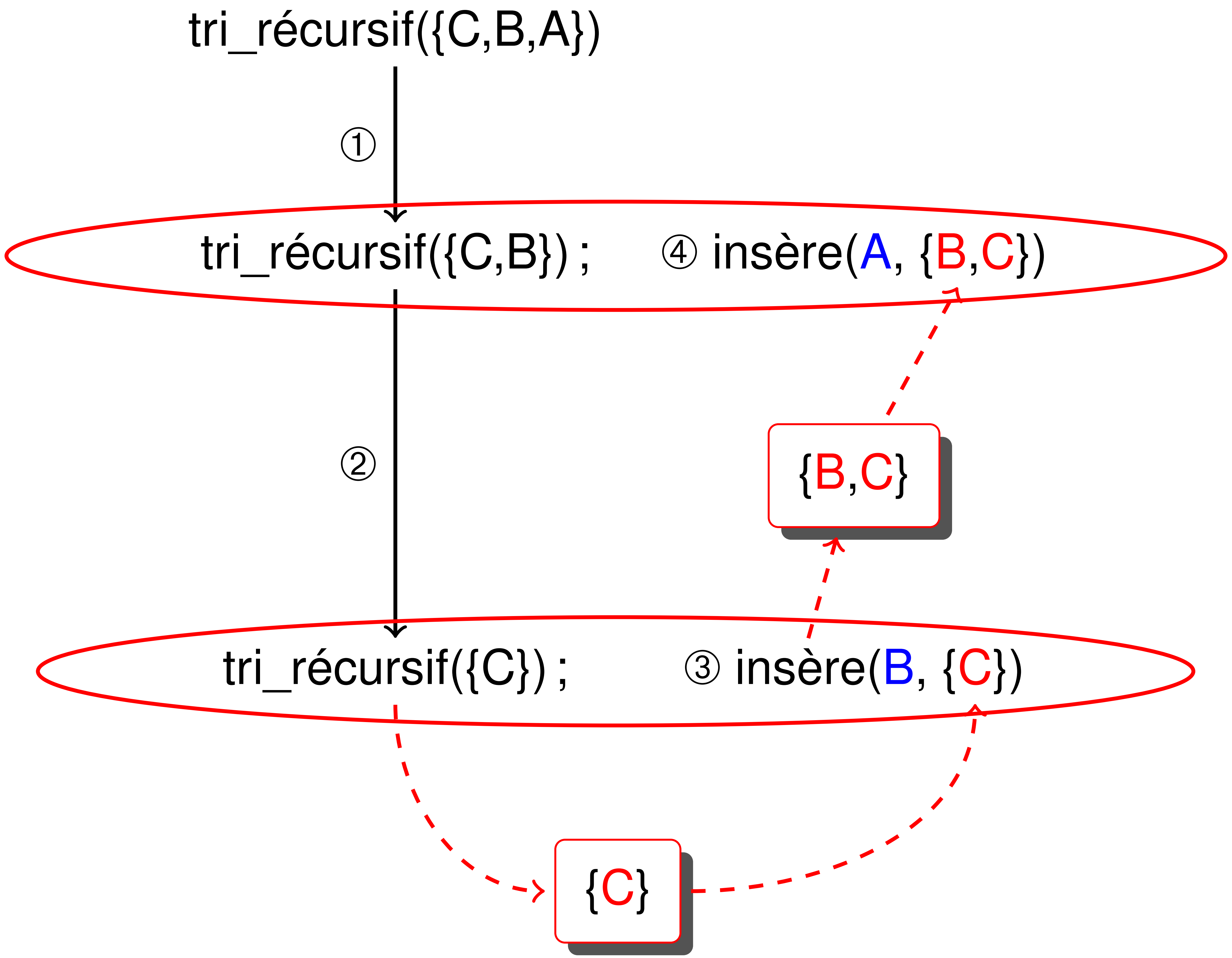
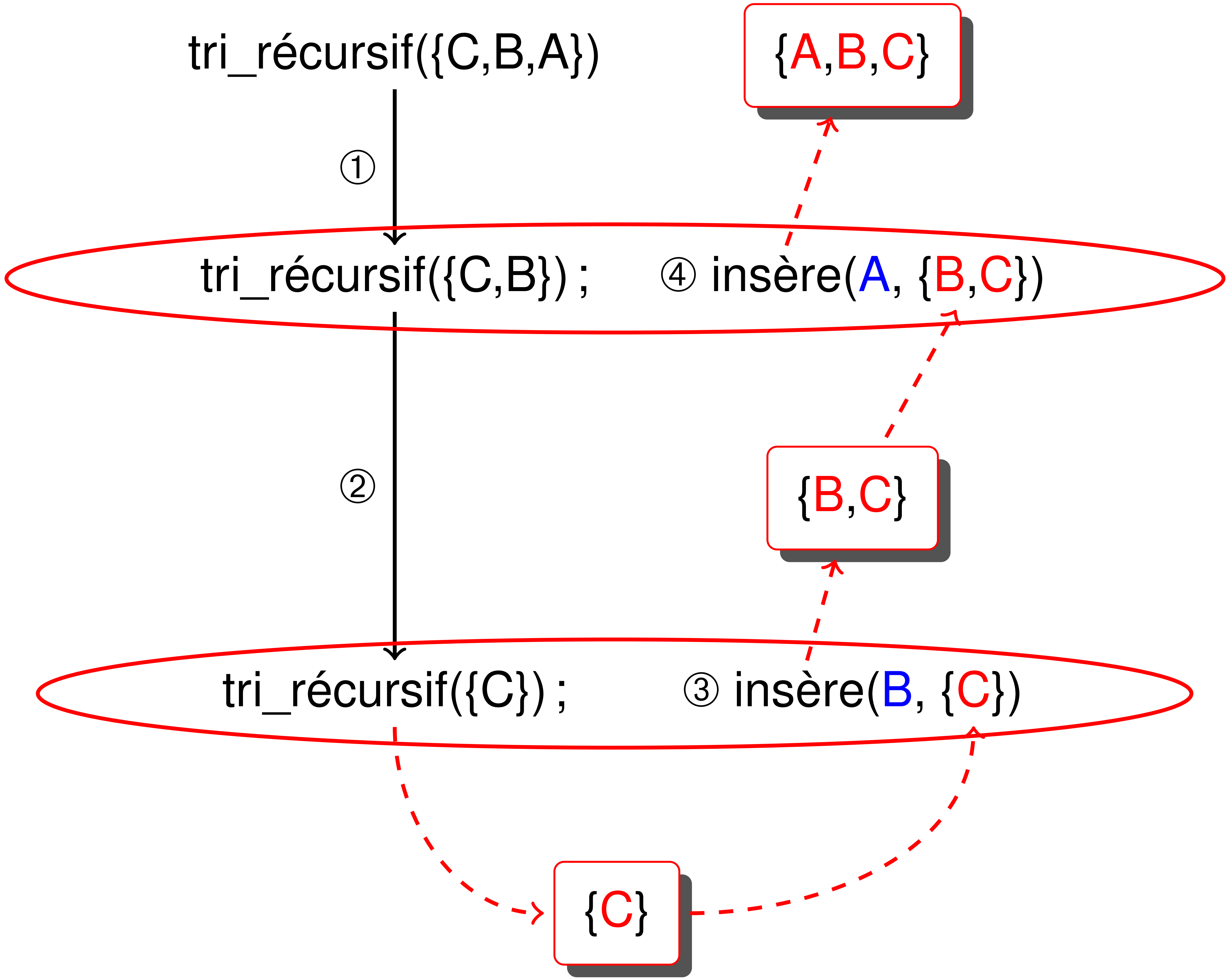


Schéma des appels récursifs (exemple)



Pour conclure sur la récursion

La solution récursive n'est pas toujours la seule solution...

...mais elle est parfois beaucoup **plus** simple/**pratique à mettre en œuvre** !

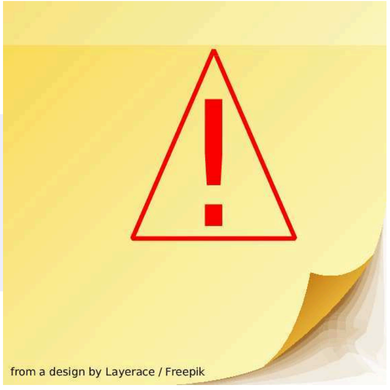
Exemples : tris, traitement de structures de données récursives (par exemple les arbres ou les graphes), etc.

Plan

Comment construit-on un algorithme ?

- Stratégies
  - « Divide and Conquer »
  - Récursion
  - Programmation dynamique

Programmation dynamique



La **programmation dynamique** est une méthode de résolution permettant de traiter des problèmes ayant une structure séquentielle répétitive.

« problèmes séquentiels » : pour lesquels on doit faire un ensemble de choix *successifs*/prendre des décisions *successives* pour arriver à une solution ;
au fur et à mesure que de nouvelles options sont choisies, des sous-problèmes apparaissent (aspect « séquentiel »).

☞ La programmation dynamique s'applique lorsqu'un *même sous-problème* apparait (avec les même données) dans *plusieurs* sous-solutions différentes.

Le principe est alors de stocker la solution à chaque sous-problème au cas où il réapparaitrait plus tard dans la résolution du problème global :

On évite de calculer plusieurs fois la même chose.

Programmation dynamique (2)

La programmation dynamique est souvent utilisée lorsque une solution récursive se révèle inefficace.

Elle permet souvent de changer un algorithme « naïf » coûteux en un algorithme, peut être plus complexe à concevoir, mais plus efficace.

Exemple

Prenons l'exemple du calcul des coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ (noté aussi C_n^k)

Problème $C(n,k)$:

Entrée : n, entier positif (ou nul) et k entier positif (ou nul), $k \leq n$.

Sortie : $\binom{n}{k}$

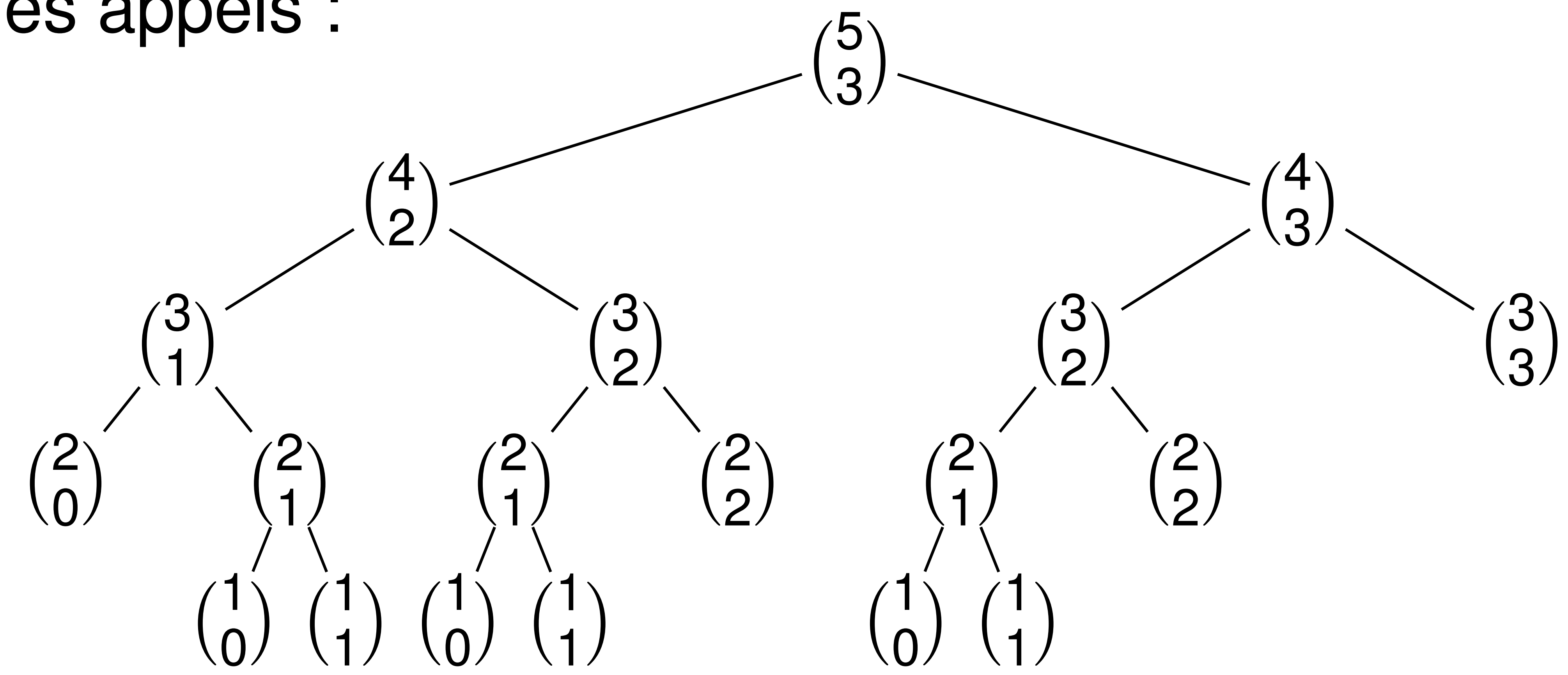
Approche récursive :

- si $k = 0$ ou $k = n$, renvoyer 1
- sinon retourner $C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$

Rappel : $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

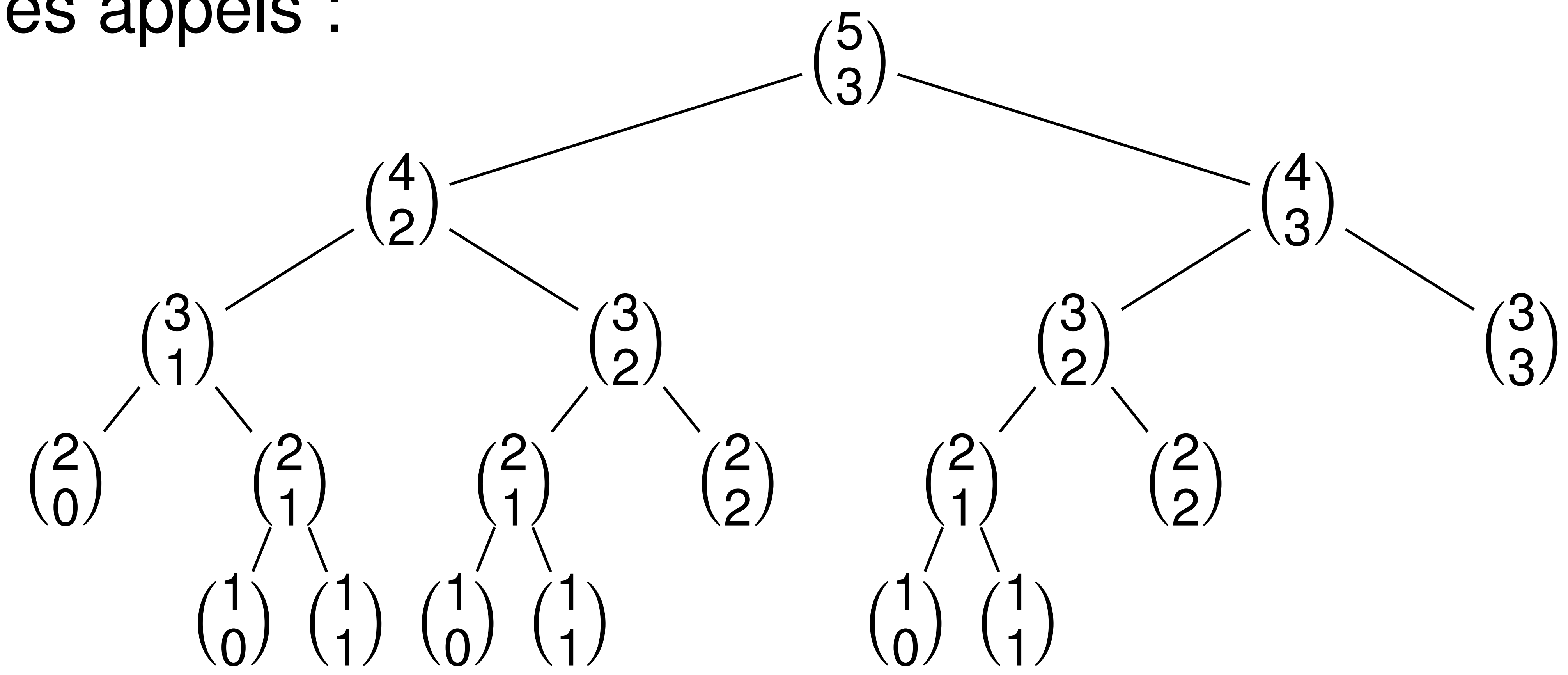
Coefficients du binôme
approche récursive

Schéma des appels :



Coefficients du binôme approche récursive

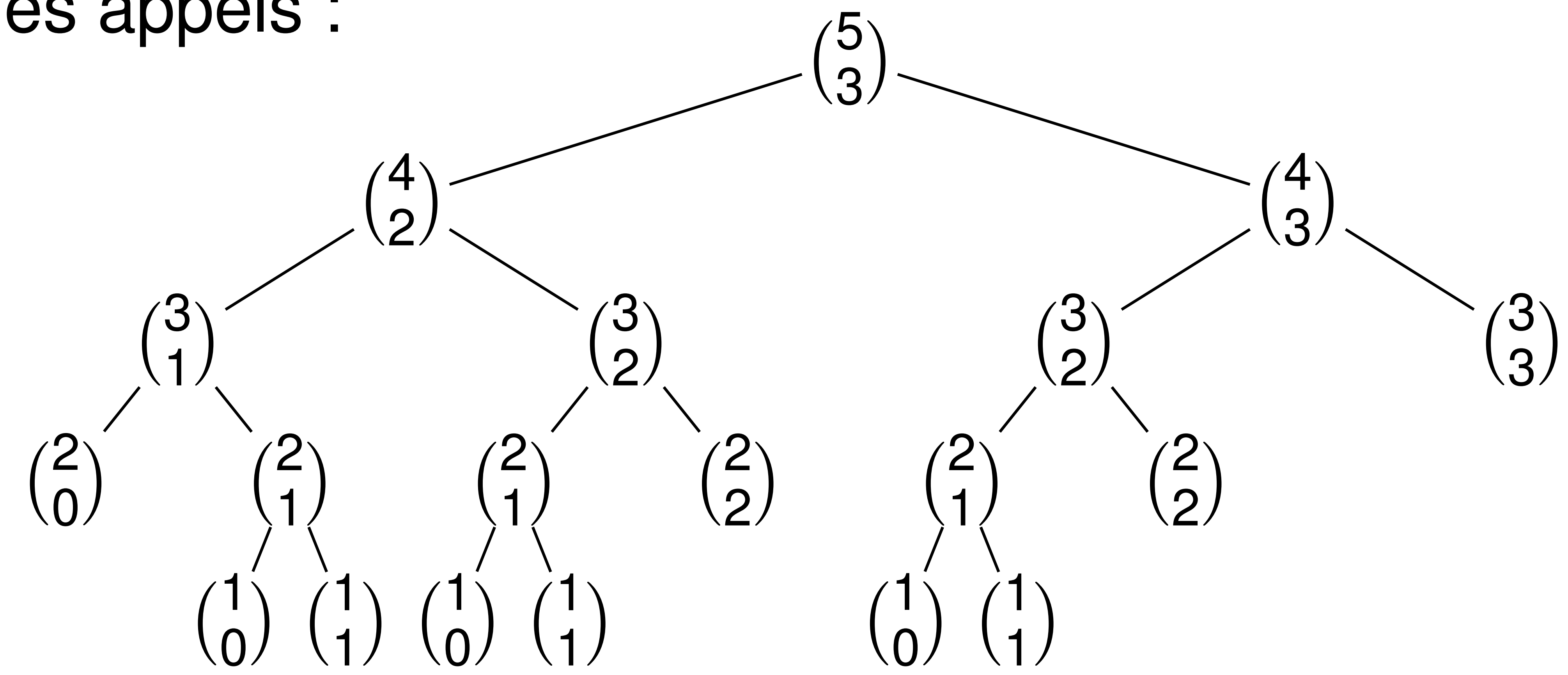
Schéma des appels :



Quelle est la complexité $T(n, k)$ de cette approche ?

Coefficients du binôme
approche récursive

Schéma des appels :



Quelle est la complexité $T(n,k)$ de cette approche ?

Du fait de la récursion, on a :
(Supposons que les comparaisons et les additions soient des instructions élémentaires.)

$$T(n,k) = T(n-1,k-1) + T(n-1,k) + \Theta(1)$$

et d'autre part $T(0,0) = \Theta(1)$ et $T(n,n) = \Theta(1)$

Coefficients du binôme approche récursive (2)

$$\begin{aligned}
T(n,k) &= T(n-1,k-1) + T(n-1,k) + \Theta(1) \\
T(n,n/2) &= T(n-1,n/2-1) + T(n-1,n/2) + \Theta(1) \\
&\approx T(n-1,(n-1)/2) + T(n-1,(n-1)/2) + \Theta(1) \text{ car } n/2 \approx n/2-1 \approx (n-1)/2 \\
&= 2T(n-1,(n-1)/2) + \Theta(1)
\end{aligned}$$

Soit $S(n) = T(n,n/2)$. Alors $S(n) \approx 2S(n-1) + \Theta(1) \in \Theta(2^n)$.

☞ temps « exponentiel » en fonction de n

Coefficients du binôme approche récursive (2)

$$\begin{aligned}
T(n,k) &= T(n-1,k-1) + T(n-1,k) + \Theta(1) \\
T(n,n/2) &= T(n-1,n/2-1) + T(n-1,n/2) + \Theta(1) \\
&\approx T(n-1,(n-1)/2) + T(n-1,(n-1)/2) + \Theta(1) \text{ car } n/2 \approx n/2-1 \approx (n-1)/2 \\
&= 2T(n-1,(n-1)/2) + \Theta(1)
\end{aligned}$$

Soit $S(n) = T(n,n/2)$. Alors $S(n) \approx 2S(n-1) + \Theta(1) \in \Theta(2^n)$.

☞ temps « exponentiel » en fonction de n

Y'a-t-il une meilleure solution ?

Coefficients du binôme approche récursive (2)

$$
\begin{aligned}
T(n,k) &= T(n-1,k-1) + T(n-1,k) + \Theta(1) \\
T(n,n/2) &= T(n-1,n/2-1) + T(n-1,n/2) + \Theta(1) \\
&\approx T(n-1,(n-1)/2) + T(n-1,(n-1)/2) + \Theta(1) \text{ car } n/2 \approx n/2-1 \approx (n-1)/2 \\
&= 2T(n-1,(n-1)/2) + \Theta(1)
\end{aligned}
$$

Soit $S(n) = T(n,n/2)$. Alors $S(n) \approx 2S(n-1) + \Theta(1) \in \Theta(2^n)$.

☞ temps « exponentiel » en fonction de n

Y'a-t-il une meilleure solution ?

Idée : **ne pas recalculer plusieurs fois la même chose**

(Regardez par exemple combien de fois nous avons calculé $\binom{2}{1}$!)

☞ stocker dans un **tableau** les valeurs déjà calculées et utiles pour la suite.

Coefficients du binône par programmation dynamique

« tabuler les valeurs déjà calculées »
☞ Concrètement ici : le triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & \overset{j}{\longrightarrow} & & k \\
\hline
 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & & \\
i\downarrow & 1 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 \\
n & 1 & 5 & 10 & 10
\end{array}
$$

Calcul par programmation dynamique du coefficient $\binom{n}{k}$:

- On remplit le début (k éléments) de chaque ligne du triangle de Pascal, une après l'autre, de haut en bas.
- On arrête à la ligne n.

Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Coefficients du binôme programmation dynamique (2)

Le nombre d'opération le plus grand est requis lorsque $k = n - 1$
(on aurait pu utiliser la symétrie, mais cela ne change pas fondamentalement le propos)

Dans ce cas, le nombre d'opérations effectuées est :

$$\begin{aligned} & 1 + (1+1) + (1+1+1) + (1+1+1+1) \\ & + \ldots + (1 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} i \\ & = \frac{n(n+1)}{2} \\ & = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \end{aligned}$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de mémoriser tout le tableau, $k-1$ cases suffisent (pourriez-vous trouver l'algorithme ?)

Programmation Dynamique – Autre exemple

Calcul du **plus court chemin**, par exemple entre toutes les gares du réseau CFF

Voyons une solution par programmation dynamique : l'Algorithme de Floyd

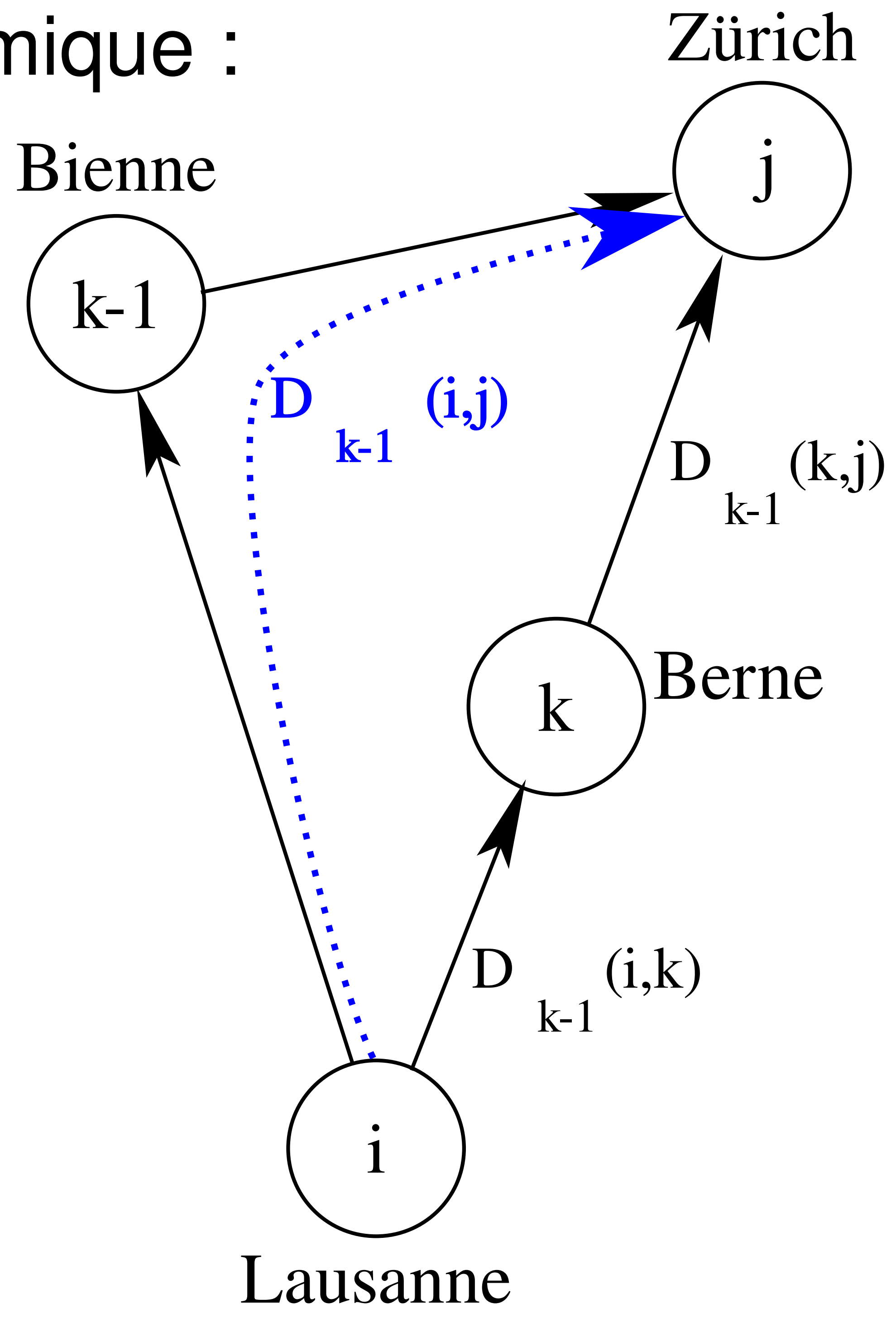


Illustration de l'idée de base :

le plus court chemin pour aller de Lausanne à Zürich est le minimum entre :

1. le plus court chemin connu pour aller de Lausanne à Zürich,
2. le chemin allant de Lausanne à Zürich en passant par une ville intermédiaire non encore considérée.

$$D_k(i,j) = \min\left\{ D_{k-1}(i,j),\ D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \right\}$$

Programmation Dynamique
Autre exemple (2)

L'algorithme est donc le suivant, pour n gares dans le réseau :

Initialisation :

Pour i de 0 à n exclu

  Pour j de 0 à n exclu

    $D(i,j) \leftarrow$ distance *directe* de i à j, ∞ si i et j ne sont pas directement connectés

Déroulement :

Pour k de 0 à n exclu

  Pour i de 0 à n exclu

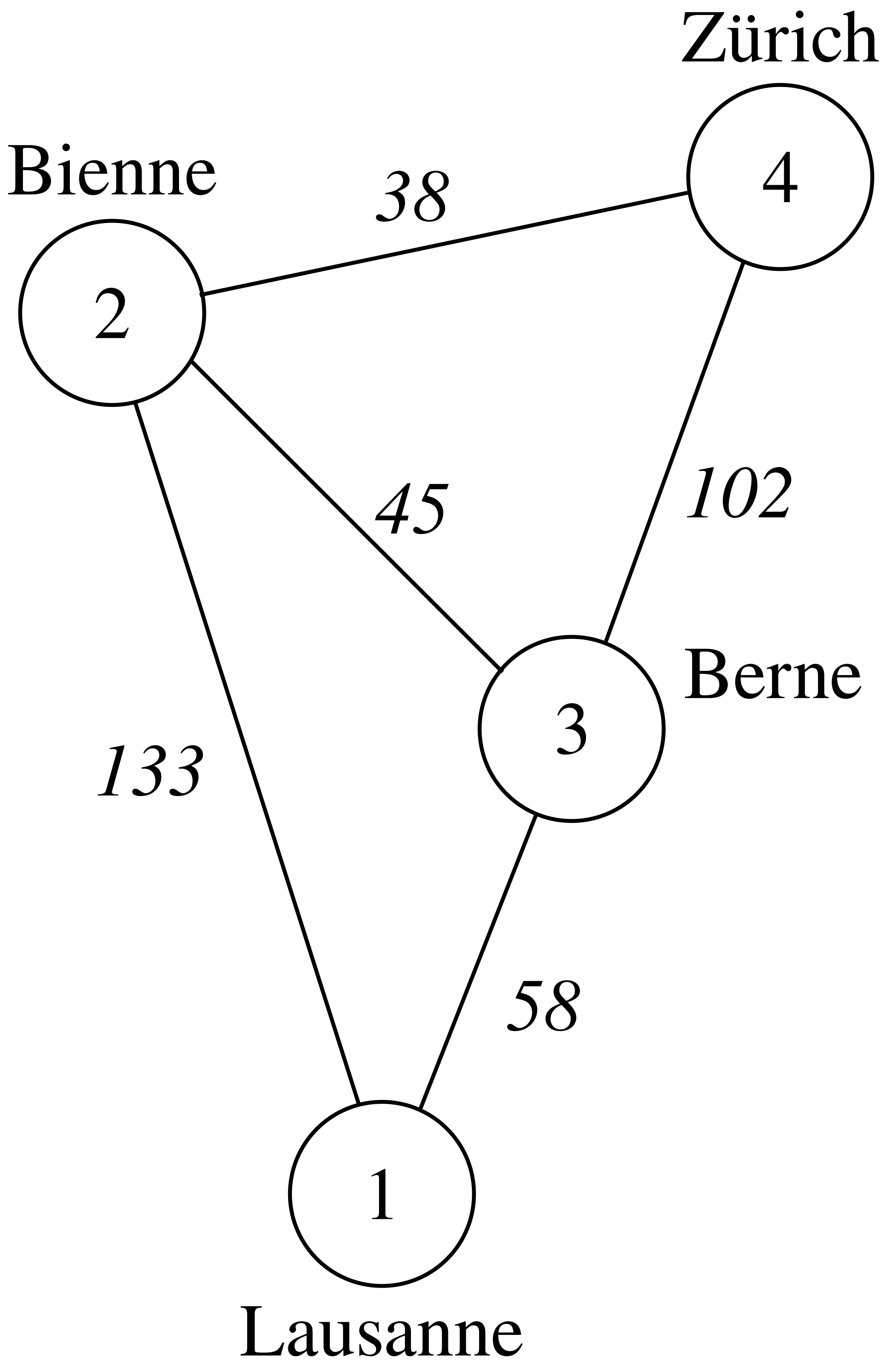
    Pour j de 0 à n exclu

      $D(i,j) \leftarrow \min\{D(i,j), D(i,k)+D(k,j)\}$

Complexité ?

☞ $\Theta(n^3)$

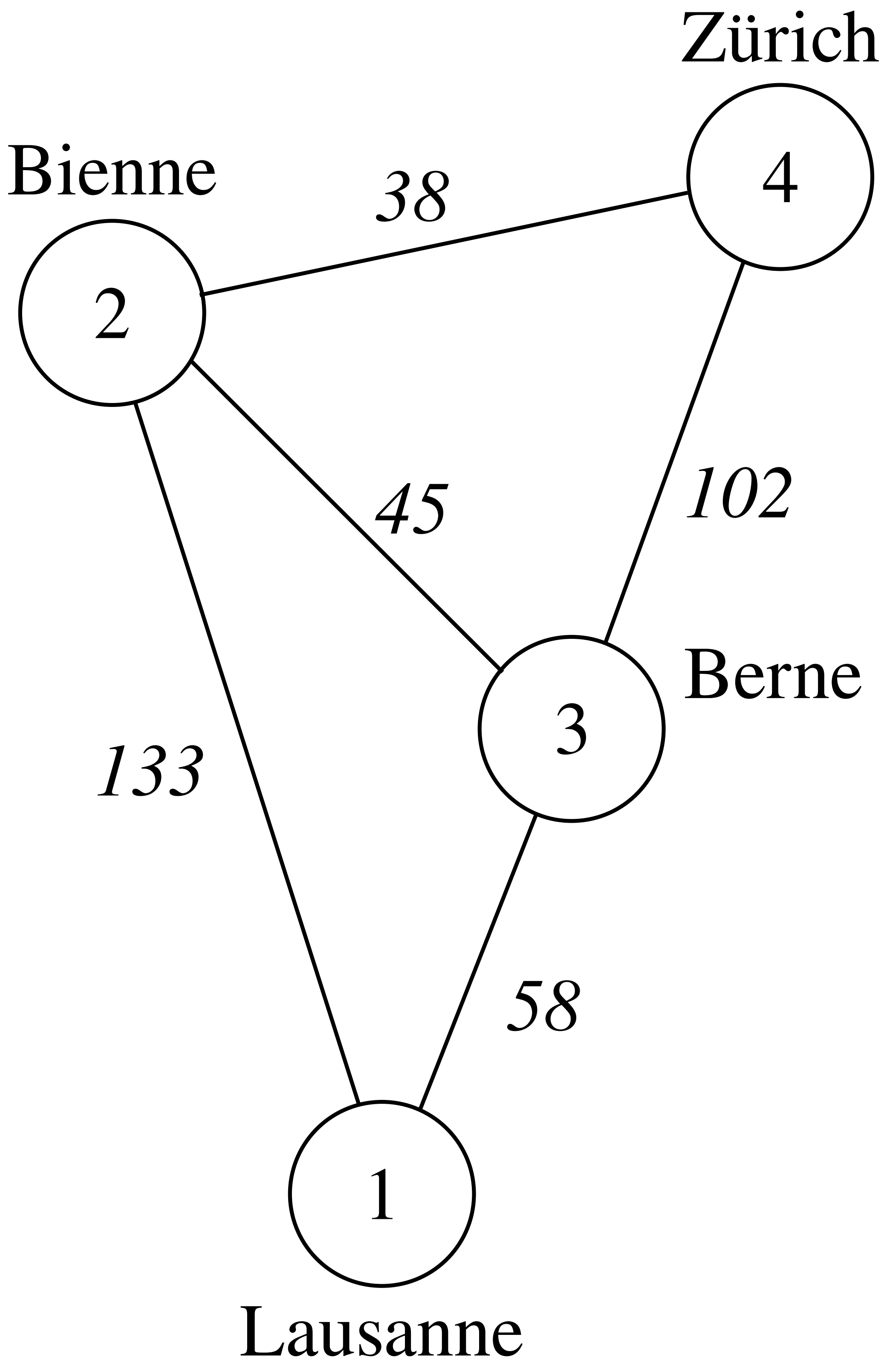
Algorithme de Floyd : exemple



(données fictives)

$$D_1 = D_0 = \begin{array}{rrrr} \text{Lausanne} & \text{Bienne} & \text{Berne} & \text{Zürich} \\ 0 & 133 & 58 & \infty \\ 133 & 0 & 45 & 38 \\ 58 & 45 & 0 & 102 \\ \infty & 38 & 102 & 0 \end{array}$$

Algorithme de Floyd : exemple

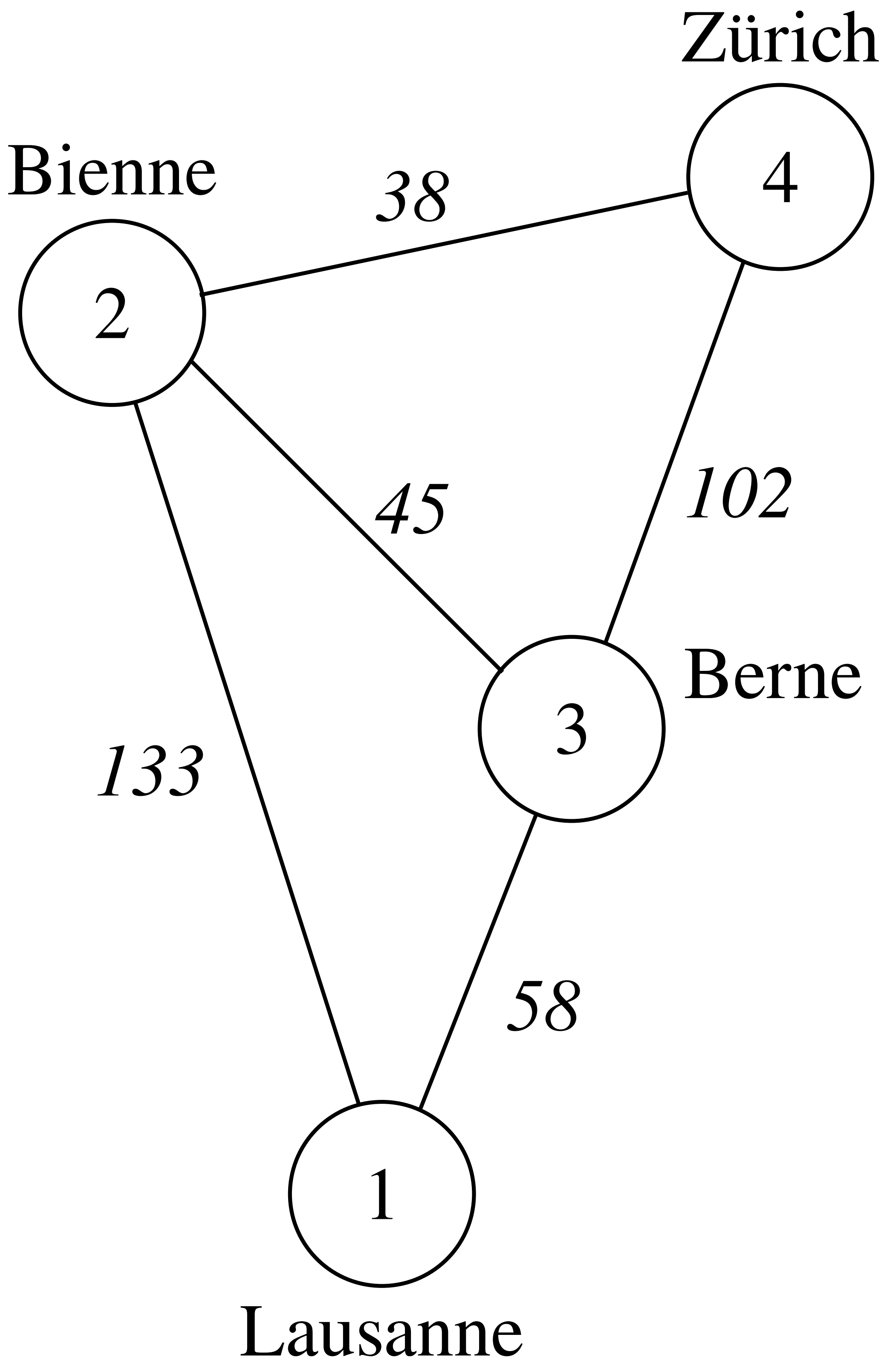


(données fictives)

$$D_1 = D_0 = \begin{array}{cccc} \text{Lausanne} & \text{Bienne} & \text{Berne} & \text{Zürich} \\ 0 & 133 & 58 & \infty \\ 133 & 0 & 45 & 38 \\ 58 & 45 & 0 & 102 \\ \infty & 38 & 102 & 0 \end{array}$$

$$D_2 = \begin{array}{cccc} \text{Lausanne} & \text{Bienne} & \text{Berne} & \text{Zürich} \\ 0 & 133 & 58 & \boxed{171} \\ 133 & 0 & 45 & 38 \\ 58 & 45 & 0 & \boxed{83} \\ \boxed{171} & 38 & \boxed{83} & 0 \end{array}$$

Algorithme de Floyd : exemple



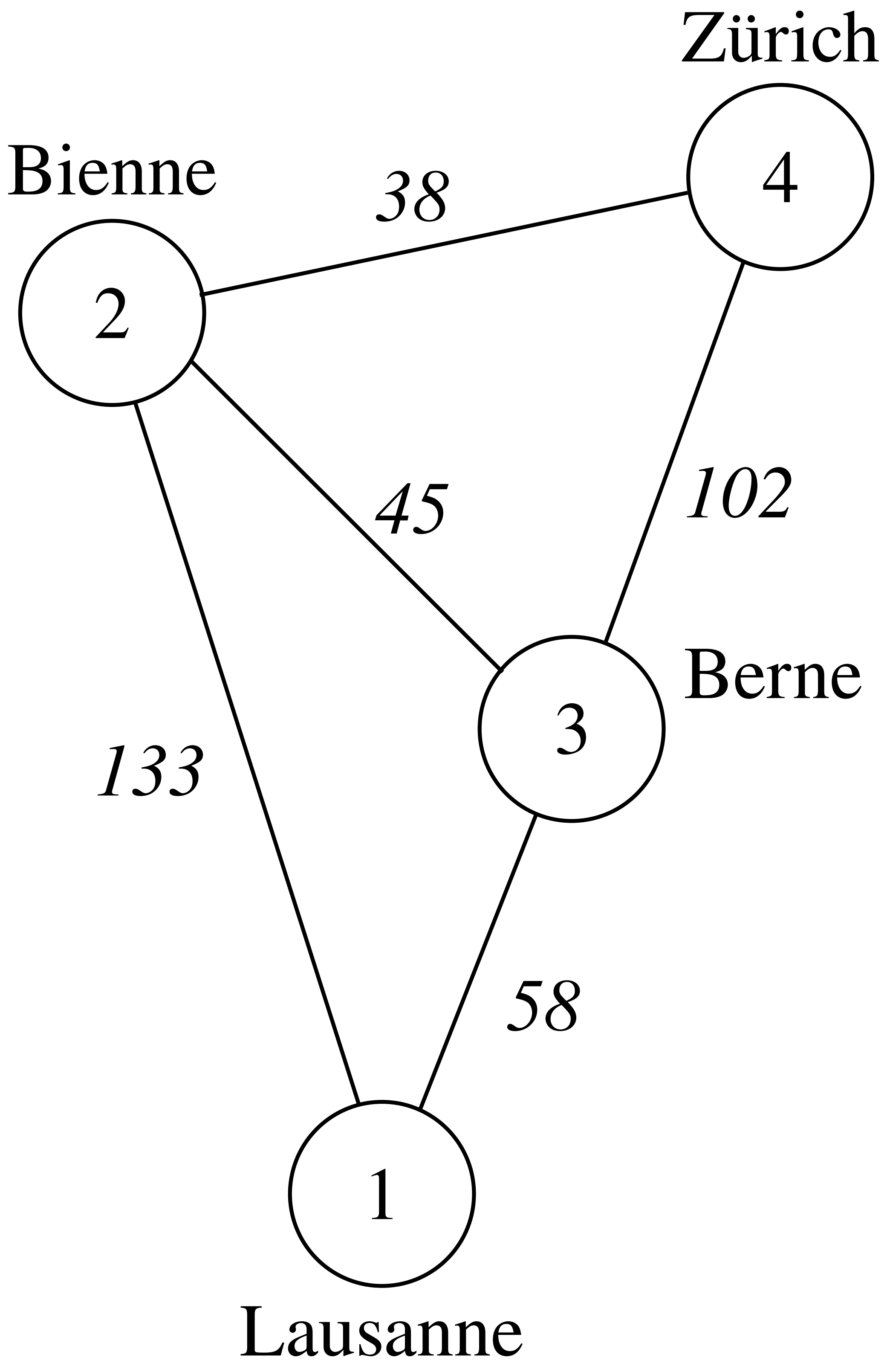
(données fictives)

$$D_1 = D_0 = \begin{array}{cccc} \text{Lausanne} & \text{Bienne} & \text{Berne} & \text{Zürich} \\ 0 & 133 & 58 & \infty \\ 133 & 0 & 45 & 38 \\ 58 & 45 & 0 & 102 \\ \infty & 38 & 102 & 0 \end{array}$$

$$D_2 = \begin{array}{cccc} \text{Lausanne} & \text{Bienne} & \text{Berne} & \text{Zürich} \\ 0 & 133 & 58 & \boxed{171} \\ 133 & 0 & 45 & 38 \\ 58 & 45 & 0 & \boxed{83} \\ \boxed{171} & 38 & \boxed{83} & 0 \end{array}$$

$$D_4 = D_3 = \begin{array}{cccc} \text{Lausanne} & \text{Bienne} & \text{Berne} & \text{Zürich} \\ 0 & \boxed{103} & 58 & \boxed{141} \\ \boxed{103} & 0 & 45 & 38 \\ 58 & 45 & 0 & 83 \\ \boxed{141} & 38 & 83 & 0 \end{array}$$

Algorithme de Floyd : exemple



(données fictives)

$D_1 = D_0 =$

Lausanne	Bienne	Berne	Zürich
0	133	58	∞
133	0	45	38
58	45	0	102
∞	38	102	0

$D_2 =$

Lausanne	Bienne	Berne	Zürich
0	133	58	$\boxed{171}$
133	0	45	38
58	45	0	$\boxed{83}$
$\boxed{171}$	38	$\boxed{83}$	0

$D_4 = D_3 =$

Lausanne	Bienne	Berne	Zürich
0	$\boxed{103}$	58	$\boxed{141}$
$\boxed{103}$	0	45	38
58	45	0	83
$\boxed{141}$	38	83	0

Note : fonctionne aussi pour des graphes asymétriques (graphes orientés)

Algorithmes de plus court chemin

L'algorithme de Floyd présenté ici résout en $\Theta(n^3)$ étapes le problème du plus court chemin entre toutes les paires de gares

En appliquant le même genre d'idées (programmation dynamique) :

- l'algorithme de Dijkstra résout en $\Theta(n^2)$ le problème du plus court chemin entre une gare donnée et toutes les autres (1956–1959)
- amélioré par Fredman et Tarjan en $\Theta(m + n \log n)$ (1984)
- **en 2025**, Duan, Mao, Mao, Shu et Yin ont conçu un nouvel algorithme, beaucoup plus compliqué, en $\Theta(m \log^{2/3} n)$
- l'algorithme A* (« *A star* ») est une généralisation de l'algorithme de Dijkstra qui est plus efficace si l'on possède un moyen d'estimer une borne inférieure de la distance restant à parcourir pour arriver au but (on appelle cela une « heuristique admissible » ; Dijkstra est un A* avec l'heuristique nulle)
- l'algorithme de Viterbi résout en $\Theta(n)$ le problème du plus court chemin entre deux gares données (sans cycle : DAG)

Conclusion (1)

Formalisation des données : **structures de données abstraites**

Formalisation des traitements : **algorithmes**

- ☞ trouver des solutions correctes et distinguer formellement les solution efficaces de celles inefficaces

Problèmes typiques : recherche, tris, plus « court » chemin.

La **conception** d'une méthode de résolution automatisée d'un problème consiste à choisir les *bons algorithmes* **et** les *bonnes structures de données*.

Conclusion (2)

La **conception** d'une méthode de résolution automatisée d'un problème consiste à choisir les *bons algorithmes* **et** les *bonnes structures de données*.

☞ Il n'y a pas de recette miracle pour cela, mais il existe des grandes familles de stratégies de résolution :

- **décomposer** (« Divide and Conquer ») : essayer de résoudre le problème en le décomposant en instances plus simples

  Les algorithmes récursifs sont des illlustrations de cette stratégie.

- **regrouper** (« programmation dynamique ») : mémoriser les calculs intermédiaires pour éviter de les effectuer plusieurs fois

La suite

- La prochaine leçon :
  Qu'est-ce qui est calculable et ne l'est pas ?
- Puis :
  Comment représenter l'information (les données sur lesquelles calculer) ?