

Information, Calcul et Communication

Module 1 : Calcul

Leçon I.1 : Calcul et Algorithmes I

J. SAM & J.-C. CHAPPELIER
Cours donné par S. DOERAENE

Objectifs de la leçon

Dans la leçon précédente, nous avons vu combien l'informatique est devenue centrale à notre civilisation

- ▶ accélération(s)
- ▶ omniprésente dans tous les domaines de l'économie
- ▶ 4^e pilier de notre culture

Objectifs de la leçon

Dans la leçon précédente, nous avons vu combien l'informatique est devenue centrale à notre civilisation

- ▶ accélération(s)
- ▶ omniprésente dans tous les domaines de l'économie
- ▶ 4^e pilier de notre culture

Une question est maintenant de savoir comment *traiter/manipuler* toutes ces information(s).

☞ C'est tout l'objet du **calcul** informatique.

Objectifs de la leçon

Dans la leçon précédente, nous avons vu combien l'informatique est devenue centrale à notre civilisation

- ▶ accélération(s)
- ▶ omniprésente dans tous les domaines de l'économie
- ▶ 4^e pilier de notre culture

Une question est maintenant de savoir comment *traiter/manipuler* toutes ces information(s).

☞ C'est tout l'objet du **calcul** informatique.

Les objectifs de cette leçon sont de :

- ▶ Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- ▶ Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- ▶ Introduire quelques principales familles d'algorithmes : recherche, tri, plus court chemin
- ▶ Calculer (et exprimer) la complexité d'un algorithme

Qu'est-ce que l'Informatique ?

« *Science du **traitement automatique de l'information** (tri, transmission, utilisation), mis en œuvre sur des **ordinateurs**.* »

(\simeq Petit Robert)

Objectifs : permettre, à l'aide d'**ordinateurs**,

- ▶ la *simulation* de *modèles* et l'*optimisation* de solutions
- ▶ l'*automatisation* d'un certain nombre de tâches
- ▶ l'*organisation*, le *transfert* et la *recherche* d'information

Qu'est-ce que l'Informatique ?

« Science du **traitement automatique de l'information** (tri, transmission, utilisation), mis en œuvre sur des **ordinateurs**. »

(\simeq Petit Robert)

Objectifs : permettre, à l'aide d'**ordinateurs**,

- ▶ la *simulation* de *modèles* et l'*optimisation* de solutions
- ▶ l'*automatisation* d'un certain nombre de tâches
- ▶ l'*organisation*, le *transfert* et la *recherche* d'information

👉 Qu'est-ce qu'un ordinateur ?

Qu'est-ce qu'un ordinateur ?

[plus dans les leçons III.1 et III.2]

Un ordinateur est un exemple d'**automate programmable**.

Un **automate** est un dispositif capable d'assurer, sans intervention humaine, un enchaînement d'opérations correspondant à la réalisation d'une tâche donnée.

Exemples : montre, « ramasse-quilles », ...

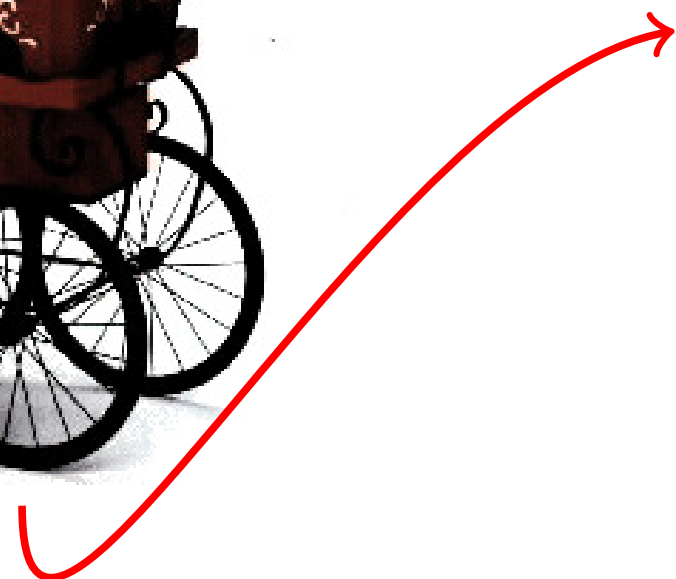
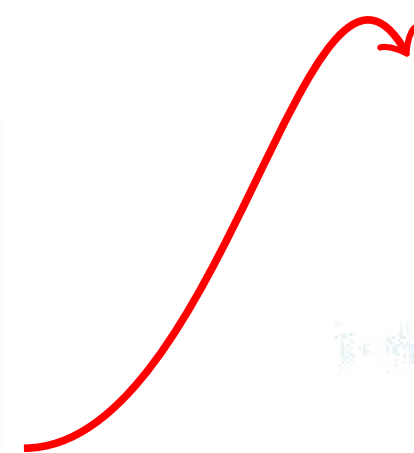
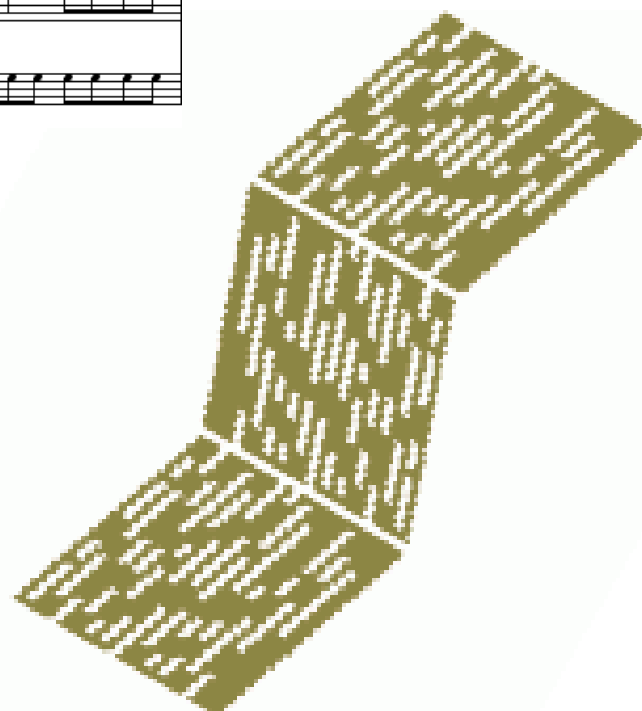
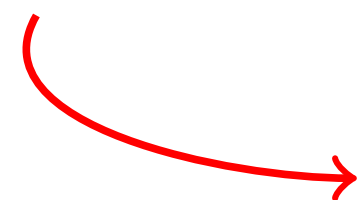
Un automate est **programmable** lorsque la nature de la *tâche* qu'il est capable de réaliser peut être *modifiée* à volonté.

Dans ce cas, la description de la tâche à réaliser se fait par le biais d'un **programme**, c.-à-d. une séquence d'instructions et de données susceptibles d'être comprises et exécutées par l'automate.

Exemples : métier à tisser Jacquard, orgue de barbarie, ... et l'ordinateur !

👉 **Formalisation** : *Machine de Turing universelle* [leçon I.3]

Exemple d'automate programmable (rappel)



« **PROGRAMME** » :

Conception : quelles notes enchaîner ?

Réalisation : percer les trous aux bons endroits

Exécution : tourner la manivelle

Résultat : mélodie

Programmation de l'automate

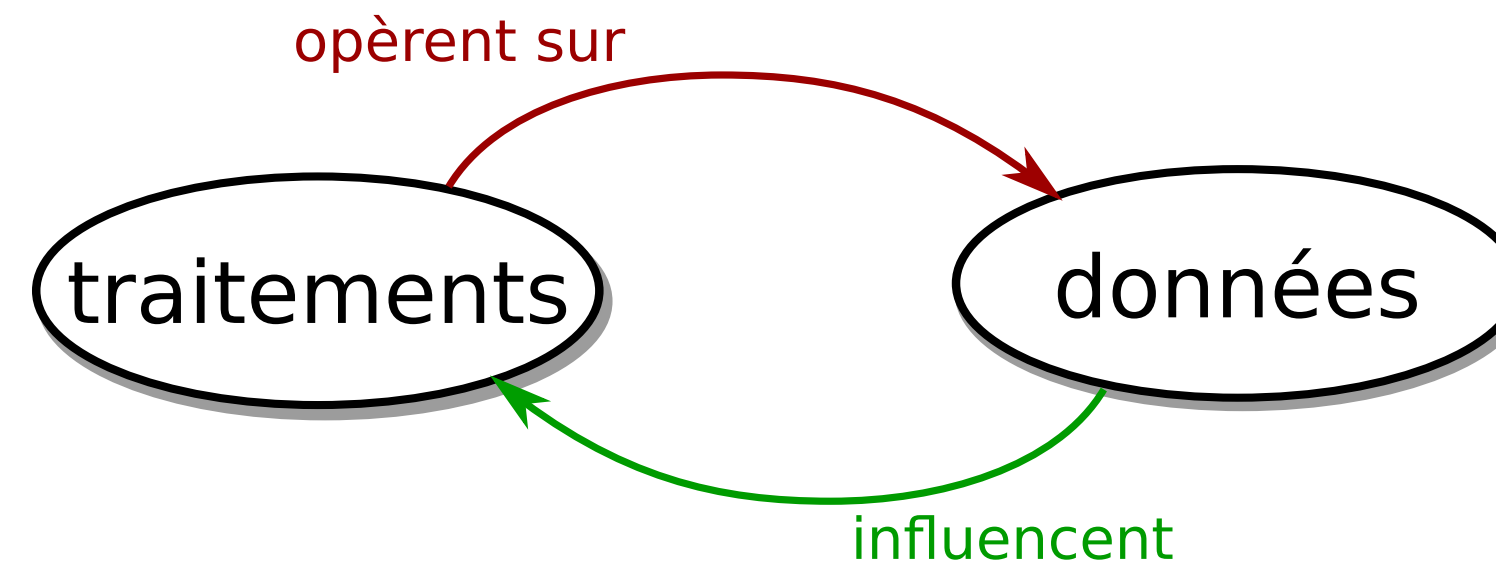
Un ordinateur doit donc permettre la *description* des différents traitements que l'on veut automatiser, des modèles que l'on veut simuler, des informations que l'on veut rechercher,

Cette description se fait en combinant :

- ▶ des **données**, qui permettent la représentation des objets du monde réel dans l'ordinateur ;
- ▶ **opérations**/traitements, qui permettent de manipuler les données et de modéliser les actions du monde réel.

Qu'est-ce que la programmation ? (résumé)

Programmer c'est **décomposer** la **tâche** à automatiser sous la forme d'une **séquence d'instructions (traitements)** et de **données** adaptées à l'automate utilisé.



Formalisation des **traitements** : **algorithmes**

☞ distinguer formellement les bons traitements des mauvais

Formalisation des **données** : **structures de données abstraites**

☞ distinguer formellement les bonnes structures de données des mauvaises

La **conception** consiste à choisir les bons algorithmes et bonnes structures de données pour résoudre un problème donné.

Plan

- ▶ Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- ▶ Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- ▶ Quelques familles d'algorithmes
- ▶ Complexité des algorithmes

Algorithme \neq Programme

Première définition :

Un algorithme est une description abstraite des étapes conduisant à la solution d'un **problème**.

Un algorithme est **indépendant du langage de programmation** dans lequel on va l'exprimer **et de l'ordinateur** utilisé pour le faire tourner.

algorithme = partie conceptuelle d'un **programme** (indépendante du langage)

programme = implémentation (réalisation) de l'*algorithme*, dans un langage de programmation et sur un système particulier.

Algorithme : premier exemple

Problème : trouver la valeur maximale dans une liste

Algorithme : premier exemple

Problème : trouver la valeur maximale dans une liste

« liste » ?

Algorithme : premier exemple

Problème : trouver la valeur maximale dans une liste

« liste » ?

≠ ensemble

☞ possibilité d'avoir plusieurs fois la même valeur

(formellement : élément du produit cartésien E^n , n : taille de la liste)

$\{3, 7, 11\}$

$(7, 3, 11, 7, 11)$

Algorithme : premier exemple

Problème : trouver la valeur maximale dans une liste

« liste » ?

≠ ensemble

☞ possibilité d'avoir plusieurs fois la même valeur

(formellement : élément du produit cartésien E^n , n : taille de la liste)

$\{3, 7, 11\}$

$(7, 3, 11, 7, 11)$

Comment faire ?

(quelles sont « *les étapes conduisant à la solution de ce problème* » ?)

Algorithme : premier exemple

Problème : trouver la valeur maximale dans une liste

« liste » ?

≠ ensemble

☞ possibilité d'avoir plusieurs fois la même valeur

(formellement : élément du produit cartésien E^n , n : taille de la liste)

$\{3, 7, 11\}$

$(7, 3, 11, 7, 11)$

Comment faire ?

(quelles sont « *les étapes conduisant à la solution de ce problème* » ?)

Problèmes annexes (similaires mais différents) :

- ▶ trouver *l'élément* maximal dans une liste ?

Algorithme : premier exemple

Problème : trouver la valeur maximale dans une liste

« liste » ?

≠ ensemble

☞ possibilité d'avoir plusieurs fois la même valeur

(formellement : élément du produit cartésien E^n , n : taille de la liste)

$\{3, 7, 11\}$

$(7, 3, 11, 7, 11)$

Comment faire ?

(quelles sont « *les étapes conduisant à la solution de ce problème* » ?)

Problèmes annexes (similaires mais différents) :

- ▶ trouver *un élément* maximal dans une liste ?
- ▶ trouver *tous les éléments* maximaux dans une liste ?

☞ **bien** comprendre le problème

Algorithme : un concept central

PageRank[®] : algorithme fondamental permettant au moteur de recherche Google de classer les pages web en fonction de leur popularité

Idée de base : le rang d'une page web (son importance) est mesuré en utilisant le nombre des autres pages la citant et leur rang.
(définition par *récurrence*)

- 👉 L'algorithme est une valeur en soi (marque déposée)
- 👉 La clé historique du succès de Google

Voir https://www.youtube.com/watch?v=wR0wVxK3m_o

Algorithmes : introduction

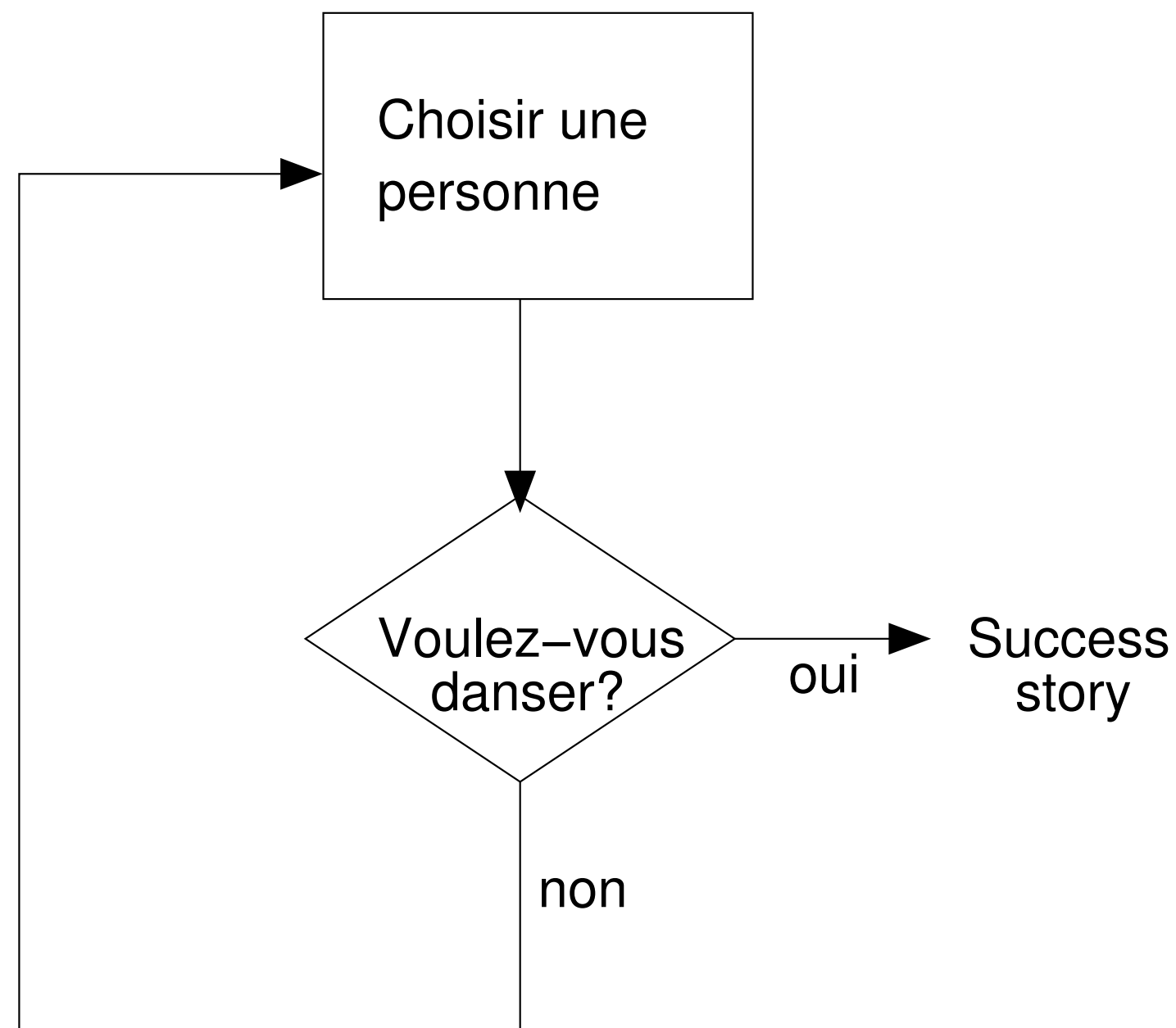


Do you want to dance with me ?

☞ algorithm(e)s / données ?..

Algorithmes : introduction

« Voulez-vous danser ? » : premier algorithme :



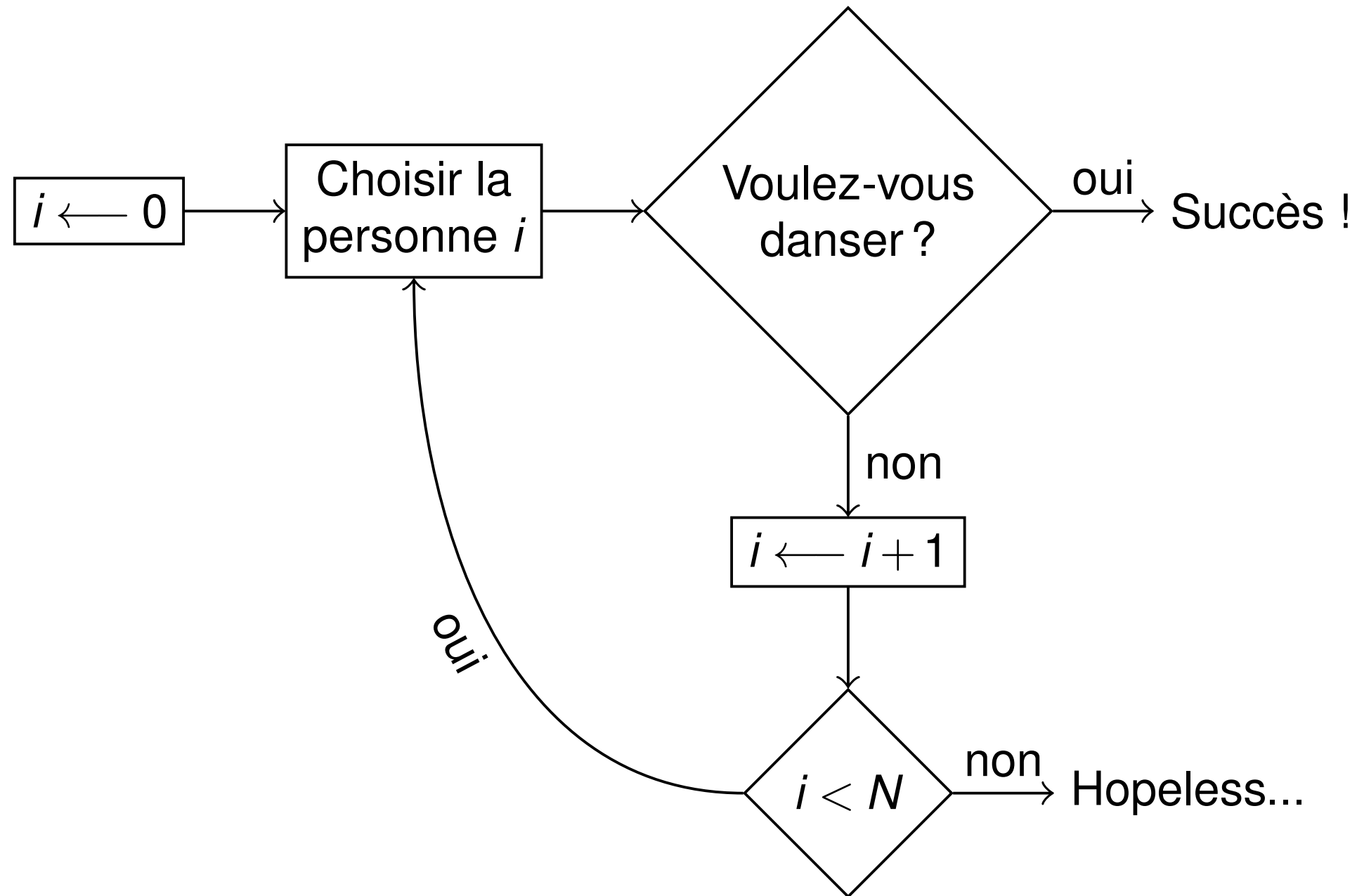
Données :

- ▶ Personne
- ▶ Ensemble de N personnes

👉 Il n'est pas garanti que l'algorithme puisse se terminer !

Algorithmes : introduction

« Voulez-vous danser ? » : deuxième algorithme :



Données *structurées* :

- ▶ Personne
- ▶ Ensemble **ordonné** de N personnes

👉 lien algorithme / représentation des données

- ▶ l'algorithme se **termine** nécessairement (au pire N essais successifs)

Algorithmes : méthodologie



But : Pour un *problème à résoudre* donné, trouver une séquence d'actions permettant de produire une *solution acceptable* en un *temps raisonnable*.

① bien identifier le **problème** :

- ▶ quelle question ?
- ▶ quelles entrées ?
- ▶ quelles sorties ?

② trouver un algorithme **correct**

☞ vérifier/démontrer qu'il est effectivement correct, qu'il se termine dans tous les cas.

③ trouver l'algorithme le plus **efficace** possible

Qu'est ce qu'un algorithme ?

Algorithme ?

- ☞ moyen pour un humain de représenter (pour un autre humain ou une machine) la **résolution** d'un **problème** donné

« *spécification d'un schéma de calcul sous forme d'une suite d'opérations élémentaires obéissant à un enchaînement déterminé* »

[Encyclopedia Universalis]

Les algorithmes existent depuis **bien avant les ordinateurs** : déjà dans l'Antiquité (p.ex. *division égyptienne, algorithme d'Euclide*)

Origine du nom : mathématicien persan Al-Khwarizmi du 9^e siècle, surnommé « le père de l'algèbre ».

Algorithme : exemples

Exemples :

- ▶ algorithmes de tri (d'objets, p.ex. cartes à jouer)
- ▶ chemin le plus rapide pour venir à l'EPFL depuis chez soi
(ou pour trouver le trajet le moins cher pour aller en vacances)
- ▶ algorithme d'Euclide (plus grand diviseur commun)
- ▶ résoudre une équation
- ▶ PageRank, EdgeRank, ...
- ▶ ...

Qu'est ce qu'un algorithme ?



Algorithme : composition d'un ensemble fini d'opérations élémentaires bien définies (déterministes) opérant sur un nombre fini de données et effectuant un traitement bien défini :

- ▶ suite finie de règles à appliquer,
- ▶ dans un ordre déterminé,
- ▶ à un nombre fini de données,
- ▶ si possible, se terminant (c.-à-d. arriver, en un nombre fini d'étapes, à un résultat, et cela quelles que soient les données traitées).

Un algorithme peut être

- ▶ *séquentiel* : ses opérations s'exécutent en séquence
- ▶ *réparti* : certaines de ses opérations s'exécutent sur plusieurs machines (répartition géographique)
- ▶ *parallèle* : certaines de ses opérations s'exécutent en parallèle, simultanément

Définition formelle des algorithmes

Formalisation : dans les années (19)30 par des mathématiciens :

Gödel, Turing, Church, Post, Kleene, ...

👉 *fonctions « calculables »* et *machines de Turing* : abstraction mathématique des notions de **traitement** (suite d'opérations élémentaires), de **problème** et d'**algorithme**.

(cf leçon I.3)

Définition formelle des algorithmes

Formalisation : dans les années (19)30 par des mathématiciens :

Gödel, Turing, Church, Post, Kleene, ...

☞ *fonctions « calculables »* et *machines de Turing* : abstraction mathématique des notions de **traitement** (suite d'opérations élémentaires), de **problème** et d'**algorithme**.

(cf leçon I.3)

☞ Mais comment concrètement créer un algorithme ?

Plan

- ▶ Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- ▶ Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- ▶ Quelques familles d'algorithmes
- ▶ Complexité des algorithmes

Données et instructions

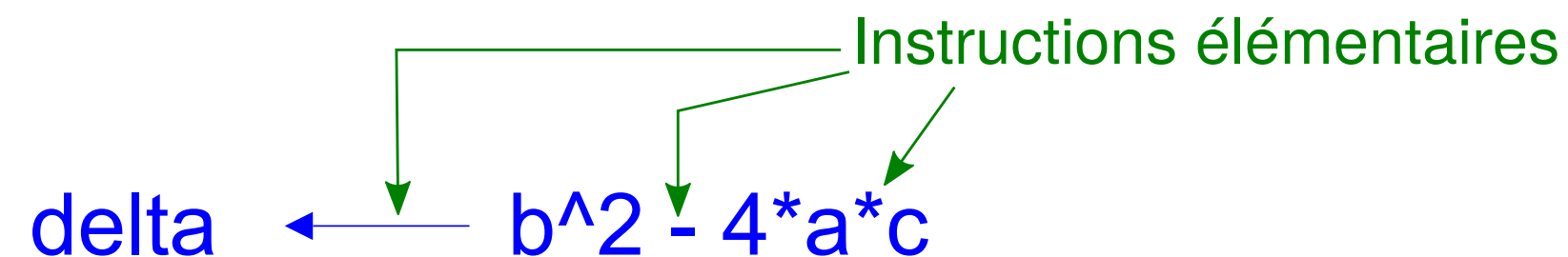


Un algorithme travaille sur des données qu'il utilise et/ou modifie.

- il doit **représenter**/référencer ces données, en les associant à un *nom*, pour pouvoir y faire référence au moment où elles lui sont nécessaires.

Une donnée nommée est ce que l'on appelle une *variable* dans un algorithme.

Les **traitements** sont représentés par des **expressions** qui combinent des **instructions** et des variables.



Données et instructions

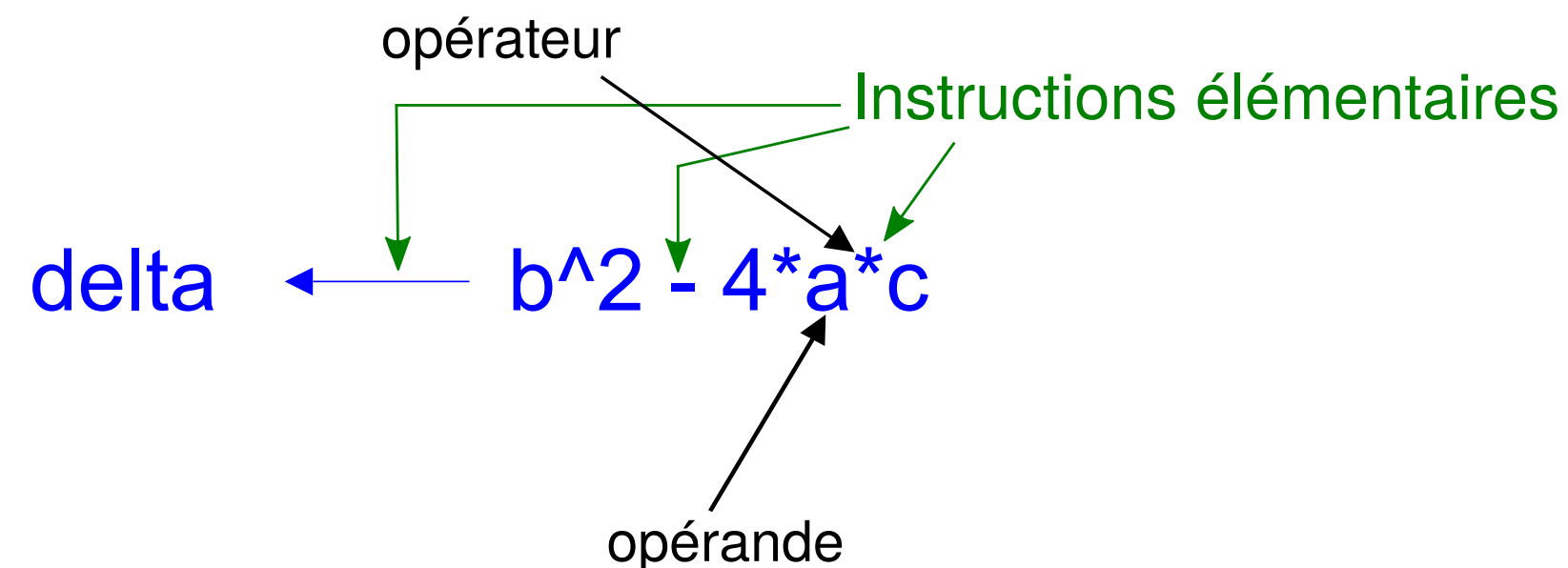


Un algorithme travaille sur des données qu'il utilise et/ou modifie.

- il doit **représenter**/référencer ces données, en les associant à un *nom*, pour pouvoir y faire référence au moment où elles lui sont nécessaires.

Une donnée nommée est ce que l'on appelle une *variable* dans un algorithme.

Les **traitements** sont représentés par des **expressions** qui combinent des **instructions** et des variables.



Données et instructions

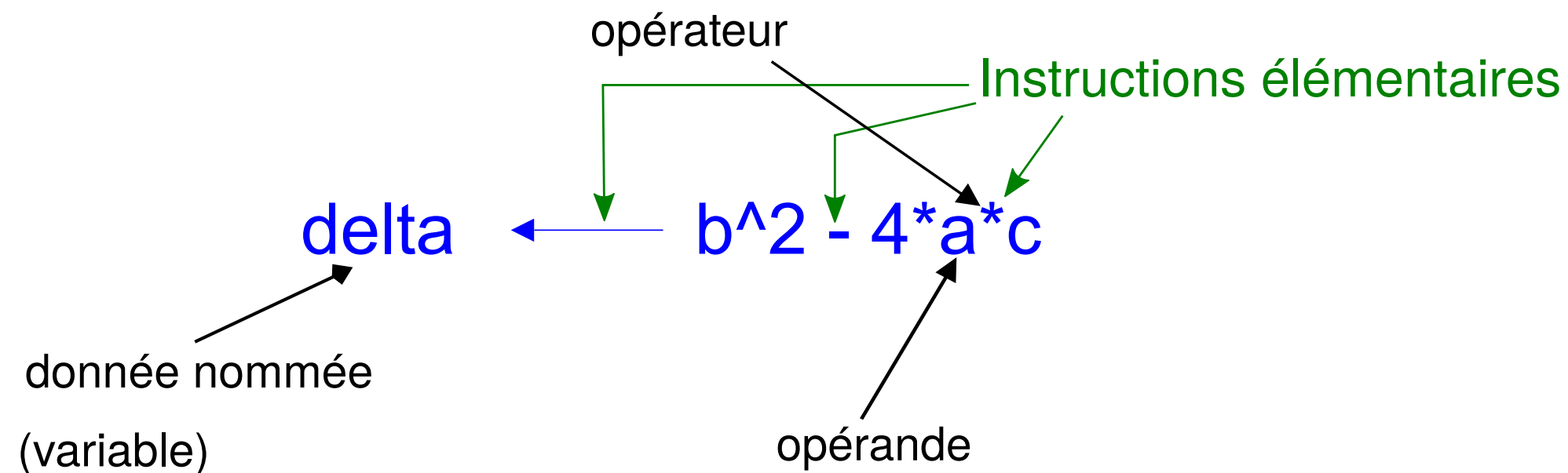


Un algorithme travaille sur des données qu'il utilise et/ou modifie.

- il doit **représenter**/référencer ces données, en les associant à un *nom*, pour pouvoir y faire référence au moment où elles lui sont nécessaires.

Une donnée nommée est ce que l'on appelle une *variable* dans un algorithme.

Les **traitements** sont représentés par des **expressions** qui combinent des **instructions** et des variables.



Données et instructions

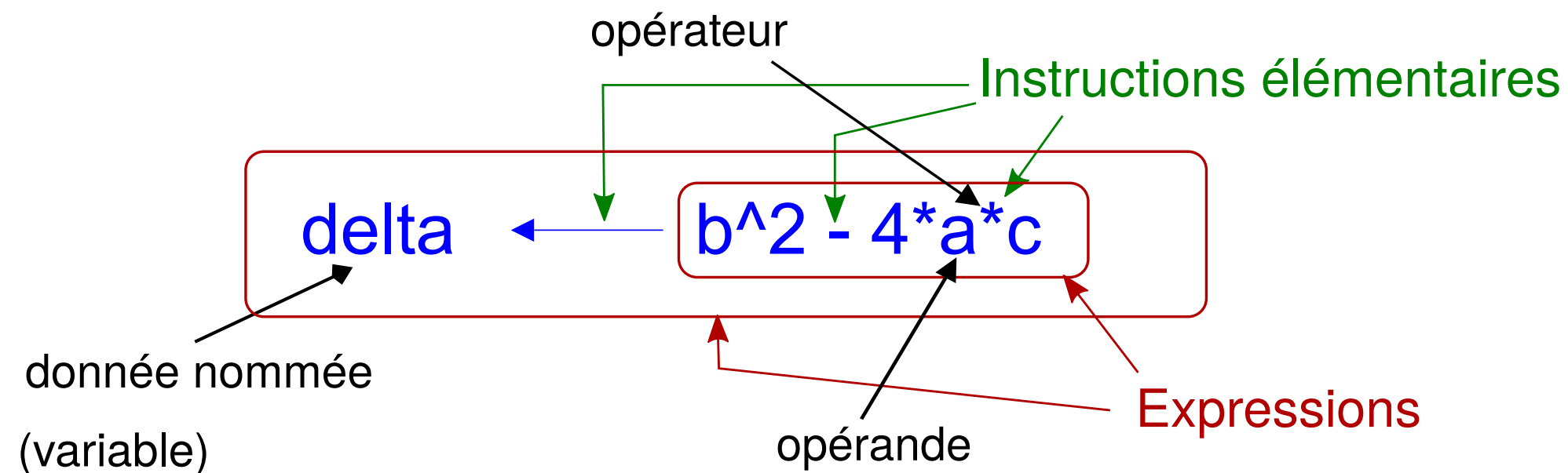


Un algorithme travaille sur des données qu'il utilise et/ou modifie.

- il doit **représenter**/référencer ces données, en les associant à un *nom*, pour pouvoir y faire référence au moment où elles lui sont nécessaires.

Une donnée nommée est ce que l'on appelle une *variable* dans un algorithme.

Les **traitements** sont représentés par des **expressions** qui combinent des **instructions** et des variables.



Instruction élémentaire

Certaines instructions sont dites **élémentaire** : « *atome de calcul* ».

Une instruction élémentaire est une instruction dont le coût d'exécution est **constant** (c.-à-d. indépendant de la taille des données manipulées par les algorithmes écrits avec ce jeu d'instructions).

Exemples :

- ▶ instruction élémentaire : associer une donnée de base (comme un nombre) à un nom (variable)

delta ← $b^2 - 4*a*c$

- ▶ instruction non élémentaire : compter le nombre de caractères contenus dans une phrase (dépend de la longueur de la phrase).

Structures de contrôle

Pour pouvoir exprimer des traitements intéressants/complexes, un algorithme ne peut se réduire à une séquence linéaire d'instructions.

☞ structures de contrôle

Une structure de contrôle sert à **modifier l'ordre linéaire d'exécution** d'un programme.

- ☞ faire exécuter à la machine des tâches de façon *répétitive*, ou *en fonction de certaines conditions* (ou les deux).

Structures de contrôle de base



On distingue 3 types de structures de contrôle :
les branchements conditionnels : *si ... alors ...*

```
Si  $\Delta = 0$ 
|
|  $x \leftarrow -\frac{b}{2}$ 
Sinon
|
|  $x_1 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x_2 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$ 
```

les boucles conditionnelles : *tant que ...*

```
Tant que pas arrivé
|
| avancer d'un pas
```

```
Répéter
|
| poser la question
jusqu'à réponse valide
```

les itérations : *pour ... allant de ... à ...* , ou alors : *pour ... parmi ...*

$$x = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2}$$

```
 $x \leftarrow 0$ 
Pour  $i$  de 1 à 6 exclu
|
|  $x \leftarrow x + \frac{1}{i^2}$ 
```

Structures de contrôle de base



On distingue 3 types de structures de contrôle :

les branchements conditionnels : *si ... alors ...*

les boucles conditionnelles : *tant que ...*

les itérations : *pour ... allant de ... à ...* , ou alors : *pour ... parmi ...*

Note : on peut toujours (évidemment !) faire des itérations en utilisant des boucles conditionnelles :

```
x ← 0
i ← 1
Tant que i < 6
|   x ← x + 1/i2
|   i ← i + 1
```

mais conceptuellement il y a une différence (notions d'ordonnancement, d'ensemble, d'itérateur).

Premier exemple concret

On veut écrire l'algorithme permettant de résoudre (dans \mathbb{R}) une équation du second degré de type :

$$x^2 + b x + c = 0$$

Pour b et c fixés, les solutions réelles d'une telle équation sont :

$$\begin{cases} \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \right\} & \text{si } \Delta > 0 \\ \left\{ \frac{-b}{2} \right\} & \text{si } \Delta = 0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\Delta = b^2 - 4 c$

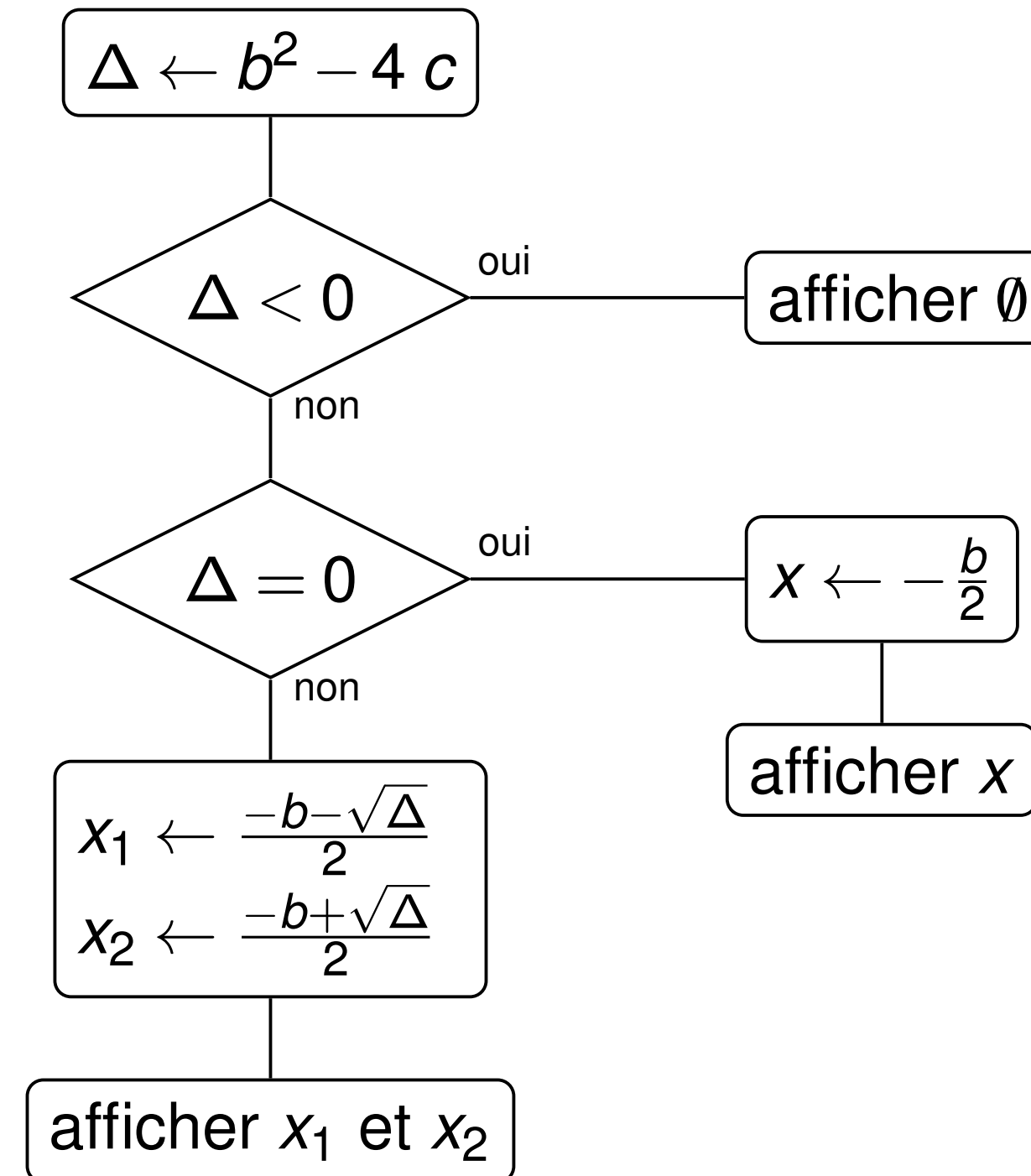
Conception de l'algorithme ?

- Facile dans un cas aussi simple (déjà bien formalisé au départ), mais peut devenir (très) complexe (→ prochaine leçon)

Premier exemple concret : formalisation des traitements

👉 **Algorithme :**

Second degré
entrée : b, c
sortie : $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + b x + c = 0\}$
$\Delta \leftarrow b^2 - 4 c$ Si $\Delta < 0$ sortir : \emptyset Sinon Si $\Delta = 0$ $x \leftarrow -\frac{b}{2}$ sortir : $\{x\}$ Sinon $x_1 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2},$ $x_2 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$ sortir : $\{x_1, x_2\}$



Algorithmes : conclusion

On attend d'un algorithme qu'il se termine, produise le résultat correct (solution du problème) pour toute entrée.

Difficulté de l'Informatique (science) : assurer que l'algorithme est correct pour toute entrée.

On ne peut pas vérifier par des essais (empirisme) : on ne pourra jamais tester tous les cas.

☞ vérification par preuves mathématiques

Importance d'un travail soigneux et mûrement réfléchi !
(même rigueur que pour une démonstration mathématique)

Plan

- ▶ Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- ▶ Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- ▶ Introduire quelques principales familles d'algorithmes :
 - ▶ recherche
 - ▶ tri
 - ▶ plus court chemin
- ▶ et définir la notion de complexité d'un algorithme

Types de problèmes algorithmiques

Comment, à partir d'un problème concret, trouver une solution ?

- ▶ reconnaître que le problème à résoudre est dans une famille déjà bien connue
- ▶ plus général : cf cours de la semaine prochaine (méthodes de résolution de problèmes)

Recherche

Exemple : recherche d'un élément x dans une liste E

Recherche

Exemple : recherche d'un élément x dans une liste E

AVANT TOUT : Spécification claire du problème et de l'algorithme voulu :

- ▶ E peut-il être vide ?
 E varie-t-il pendant la recherche ?
 E est-il ordonné ?
- ▶ algorithme :
 - ▶ séquentiel ?
p.ex. : recherche d'un mot dans le dictionnaire
 - ▶ parallèle ?
p.ex. : recherche d'un élève dans la salle
 - ▶ réparti ?
p.ex. : recherche d'un objet perdu sur le campus
→ demander à chaque concierge

Recherche

Exemple : recherche d'un élément x dans une liste E

Considérons par exemple les deux algorithmes suivants :

appartient1

entrée : x, E

sortie : $x \in E ?$

$i \leftarrow 0$

Répéter

Si $x = E[i]$

Sortir : oui

$i \leftarrow i + 1$

$t \leftarrow \text{taille}(E)$

jusqu'à $i = t$

Sortir : non

appartient2

entrée : x, E

sortie : $x \in E ?$

$t \leftarrow \text{taille}(E)$

Pour i de 0 à t exclu

Si $x = E[i]$

Sortir : oui

Sortir : non

Recherche

Exemple : recherche d'un élément x dans une liste E

Considérons par exemple les deux algorithmes suivants :

appartient1

entrée : x, E

sortie : $x \in E ?$

$i \leftarrow 0$

Répéter

Si $x = E[i]$

Sortir : oui

$i \leftarrow i + 1$

$t \leftarrow$ **taille**(E)

jusqu'à $i = t$

Sortir : non

appartient2

entrée : x, E

sortie : $x \in E ?$

$t \leftarrow$ **taille**(E)

Pour i de 0 à t exclu

Si $x = E[i]$

Sortir : oui

Sortir : non

autre algorithme
(lequel calcule la taille de E)

Complexité d'un algorithme

Première question : ces algorithmes sont ils **corrects** ?

- ▶ se terminent ils pour tous les cas ?
- ▶ donnent ils ce que l'on veut ?
(p.ex. quid de **appartient1** si E est vide ?
quid de **appartient2** si E est modifié pendant le parcours ?)

☞ démonstrations mathématiques

Complexité d'un algorithme

Première question : ces algorithmes sont ils **corrects** ?

- ▶ se terminent ils pour tous les cas ?
- ▶ donnent ils ce que l'on veut ?
(p.ex. quid de **appartient1** si E est vide ?
quid de **appartient2** si E est modifié pendant le parcours ?)

☞ démonstrations mathématiques

2^e question : lequel des deux est le **plus efficace** ?

☞ notion de **complexité** d'un algorithme

complexité (temporelle pire cas) : nombre d'instructions élémentaires nécessaires à un algorithme pour donner la réponse dans le pire des cas.

C'est une fonction de la *taille de l'entrée*

Complexité d'un algorithme : exemple

2^e question : lequel est le **plus efficace** ?


Notons n la taille de E et comptons combien d'instructions élémentaires chaque algorithme nécessite dans le pire des cas $\rightarrow C1(n)$ et $C2(n)$

Pour l'algorithme appartient1(x, E) :

appartient1
entrée : x, E sortie : $x \in E ?$
$i \leftarrow 0$ Répéter Si $x = E[i]$ Sortir : oui $i \leftarrow i + 1$ $t \leftarrow \mathbf{taille}(E)$ jusqu'à $i = t$ Sortir : non

Complexité d'un algorithme : exemple

2^e question : lequel est le **plus efficace** ?

Notons n la taille de E et comptons combien d'instructions élémentaires chaque algorithme nécessite dans le pire des cas  $C1(n)$ et $C2(n)$

Pour l'algorithme appartient1(x, E) :

1	affectation de la valeur 0 à la variable i	1 instruction
2	accès au i -ème élément de E et comparaison de cet élément avec x	2 instructions
3	incrément de i (de 1)	1 instruction
4	calcul de la taille de E	$T(n)$ instructions
5	test de la condition ($i = t$) et retour en 2	1 instruction

Dans le pire des cas, les étapes 2 à 5 sont faites autant de fois qu'il y a d'éléments dans E , donc n fois.

$$\text{hand icon } C1(n) = 1 + n(T(n) + 4)$$

Complexité d'un algorithme : exemple

Pour l'algorithme $\text{appartient2}(x, E)$:

appartient2
entrée : x, E sortie : $x \in E ?$
$t \leftarrow \text{taille}(E)$ Pour i de 0 à t exclu Si $x = E[i]$ Sortir : oui Sortir : non

Complexité d'un algorithme : exemple

Pour l'algorithme $\text{appartient2}(x, E)$:

1	calcul de la taille de E	$T(n)$ instructions
2	affectation de la valeur 0 à i	1 instruction
3	vérification de la condition ($i < t$)	1 instruction
4	accès au i^{e} élément de E et comparaison de cet élément avec x	2 instructions
5	incrément de i (de 1) et retour en 3	1 instruction

Dans le pire des cas, les étapes 3 à 5 seront faites autant de fois qu'il y a d'éléments dans E, donc n fois.

👉 $C2(n) = T(n) + 1 + 4n$

Complexité d'un algorithme : exemple

Supposons (raisonnablement) que le calcul de la taille de E se fait en $T(n) = a + b \cdot n$ instructions (avec $b \geq 0$, mais éventuellement nul).

On aurait alors :

$$C1(n) = 1 + (a + 4)n + bn^2$$

$$C2(n) = 1 + a + (4 + b)n$$

☞ Réponse à la question 2 :

Si $b > 0$ (c.-à-d. non nul), alors l'algorithme 1 est donc beaucoup plus lent (pour de grands ensembles) !

Complexité d'un algorithme : exemple

Supposons (raisonnablement) que le calcul de la taille de E se fait en $T(n) = a + b \cdot n$ instructions (avec $b \geq 0$, mais éventuellement nul).

On aurait alors :

$$C1(n) = 1 + (a + 4)n + bn^2$$

$$C2(n) = 1 + a + (4 + b)n$$

☞ Réponse à la question 2 :

Si $b > 0$ (c.-à-d. non nul), alors l'algorithme 1 est donc beaucoup plus lent (pour de grands ensembles) !

Question 3 : Peut-on faire (nettement) mieux que l'algorithme 2 ?

Complexité d'un algorithme : exemple

Supposons (raisonnablement) que le calcul de la taille de E se fait en $T(n) = a + b \cdot n$ instructions (avec $b \geq 0$, mais éventuellement nul).

On aurait alors :

$$C1(n) = 1 + (a + 4)n + bn^2$$

$$C2(n) = 1 + a + (4 + b)n$$

☞ Réponse à la question 2 :

Si $b > 0$ (c.-à-d. non nul), alors l'algorithme 1 est donc beaucoup plus lent (pour de grands ensembles) !

Question 3 : Peut-on faire (nettement) mieux que l'algorithme 2 ?

☞ oui, si la liste est **ordonnée**

Dichotomie



appartient_D

entrée : x , E *ordonnée*

sortie : $x \in E$?

Si E est vide

| **Sortir** : non

Si E est réduit à 1 seul élément e

| **Sortir** : $x = e$? (c.-à-d. « oui » si $x = e$ et « non » sinon)

découper E en deux sous-ensembles non vides
et disjoints E_1 et E_2 (le plus optimal étant au milieu de E)

Si $x \leq \max(E_1)$

| **Sortir** : **appartient_D**(x , E_1)

Sinon

| **Sortir** : **appartient_D**(x , E_2)

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$E =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab
 blanc
 bleu
 zoulou

$x =$ bleu

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$\text{appartient_D}(x, E) = ??$

$E =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab
 blanc
 bleu
 zoulou

$x = \text{bleu}$

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

appartient_D(x, E) = ??

$E =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab
 blanc
 bleu
 zoulou

$x =$ bleu

E n'est pas vide ni réduite à un élément

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

appartient_D(x, E) = ??

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x =$ bleu

$E_2 =$ blanc
 bleu
 zoulou

E n'est pas vide ni réduite à un élément

donc on découpe E en (par exemple) E_1 et E_2 comme ci-dessus

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

appartient_D(x, E) = ??

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x =$ bleu

$E_2 =$ blanc
 bleu
 zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_1)$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «baobab» ?

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

appartient_D(x, E) = ??

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x =$ bleu

$E_2 =$ blanc
 bleu
 zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_1)$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «baobab» ?

☞ non

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_2)$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x = \text{bleu}$

$E_2 =$ blanc
 bleu
 zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_1)$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «baobab» ?

☞ non ; donc la solution est la même que $\text{appartient_D}(x, E_2)$

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_2)$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x =$ bleu

$E_2 =$ blanc
 bleu
 zoulou

E_2 n'est pas vide ni réduite à un élément

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_2)$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x =$ bleu

$E_{2.1} =$ blanc
 bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

E_2 n'est pas vide ni réduite à un élément

donc on découpe E_2 en (par exemple) $E_{2.1} =$ blanc bleu et $E_{2.2} =$ zoulou

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_2)$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$x = \text{bleu}$

$E_{2.1} =$ blanc
 bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1})$?

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_2)$

$E_1 =$ abaque
abasourdi
babouin
baobab

$x = \text{bleu}$

$E_{2.1} =$ blanc
bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1})$?

☞ oui

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1})$$

$E_1 =$ abaque
abasourdi
babouin
baobab

$x = \text{bleu}$

$E_{2.1} =$ blanc
bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1})$?

☞ oui ; donc la solution est la même que $\text{appartient_D}(x, E_{2.1})$

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1})$$

$E_1 =$ abaque
abasourdi
babouin
baobab

$x =$ bleu

$E_{2.1} =$ blanc
bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$E_{2.1}$ n'est pas vide ni réduite à un élément,

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

$E_{2.1}$ n'est pas vide ni réduite à un élément,
donc on découpe $E_{2.1}$ en $E_{2.1.1} =$ blanc et $E_{2.1.2} =$ bleu

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1.1})$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «blanc» ?

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1.1})$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «blanc» ?

☞ non

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1.2})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

est-ce que $x \leq \max(E_{2.1.1})$, c.-à-d. est-ce que «bleu» vient avant «blanc» ?

☞ non ; donc la solution est la même que $\text{appartient_D}(x, E_{2.1.2})$

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1.2})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

$E_{2.1.2}$ est réduit à un élément

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1.2})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

$E_{2.1.2}$ est réduit à un élément

Est-ce x ?

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

$$\text{appartient_D}(x, E) = \text{appartient_D}(x, E_{2.1.2})$$

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab


$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

$E_{2.1.2}$ est réduit à un élément

Est-ce x ?  oui

Exemple de recherche par dichotomie dans une liste ordonnée

appartient_D(x, E) = **oui**!

$E_1 =$ abaque
 abasourdi
 babouin
 baobab

$E_{2.1.1} =$ blanc

$E_{2.1.2} =$ bleu

$E_{2.2} =$ zoulou

$x =$ bleu

$E_{2.1.2}$ est réduit à un élément

Est-ce x ?  oui; donc la solution est « oui »

Complexité ?

Quel est le **nombre d'opérations nécessaires** pour une recherche par dichotomie **dans le pire des cas** ?

Complexité ?

Quel est le **nombre d'opérations nécessaires** pour une recherche par dichotomie **dans le pire des cas** ?

Si l'élément recherché est au « milieu » du « milieu » du ... « milieu » du « milieu » de la liste, il faudra répéter la boucle de découpage en deux autant de fois.

On va donc boucler autant de fois qu'on peut diviser la taille de E par 2.

Complexité ?

Quel est le **nombre d'opérations nécessaires** pour une recherche par dichotomie **dans le pire des cas** ?

Si l'élément recherché est au « milieu » du « milieu » du ... « milieu » du « milieu » de la liste, il faudra répéter la boucle de découpage en deux autant de fois.

On va donc boucler autant de fois qu'on peut diviser la taille de E par 2.

Combien de fois qu'on peut diviser n par 2 ?

👉 $\log_2 n$

Note : vous verrez aussi en leçon II.3 combien cette idée de dichotomie est lié à la notion d'*information* !

Rappels :

$$2^y = x \implies y = \log_2(x)$$

$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$$

Complexité d'un algorithme



Définition : la complexité (temporelle pire cas) d'un algorithme est le nombre d'instructions élémentaires utilisées par l'algorithme dans le pire des cas (celui qui demande le plus d'instructions).

C'est une **fonction** de la taille de l'entrée.

(**Note** : on peut aussi s'intéresser à d'autres complexités : spatiale au lieu de temporelle, « meilleur cas » au lieu de « pire cas », etc.)

Pour comparer des algorithmes, ce qui nous intéresse c'est de savoir comment leur **complexité évolue en fonction de la taille des données** en entrée.

Pour cela, on effectue des comparaisons sur les **ordres de grandeur asymptotiques** (quand la taille des données en entrée tend vers l'infini) : on s'intéresse au **terme dominant**.

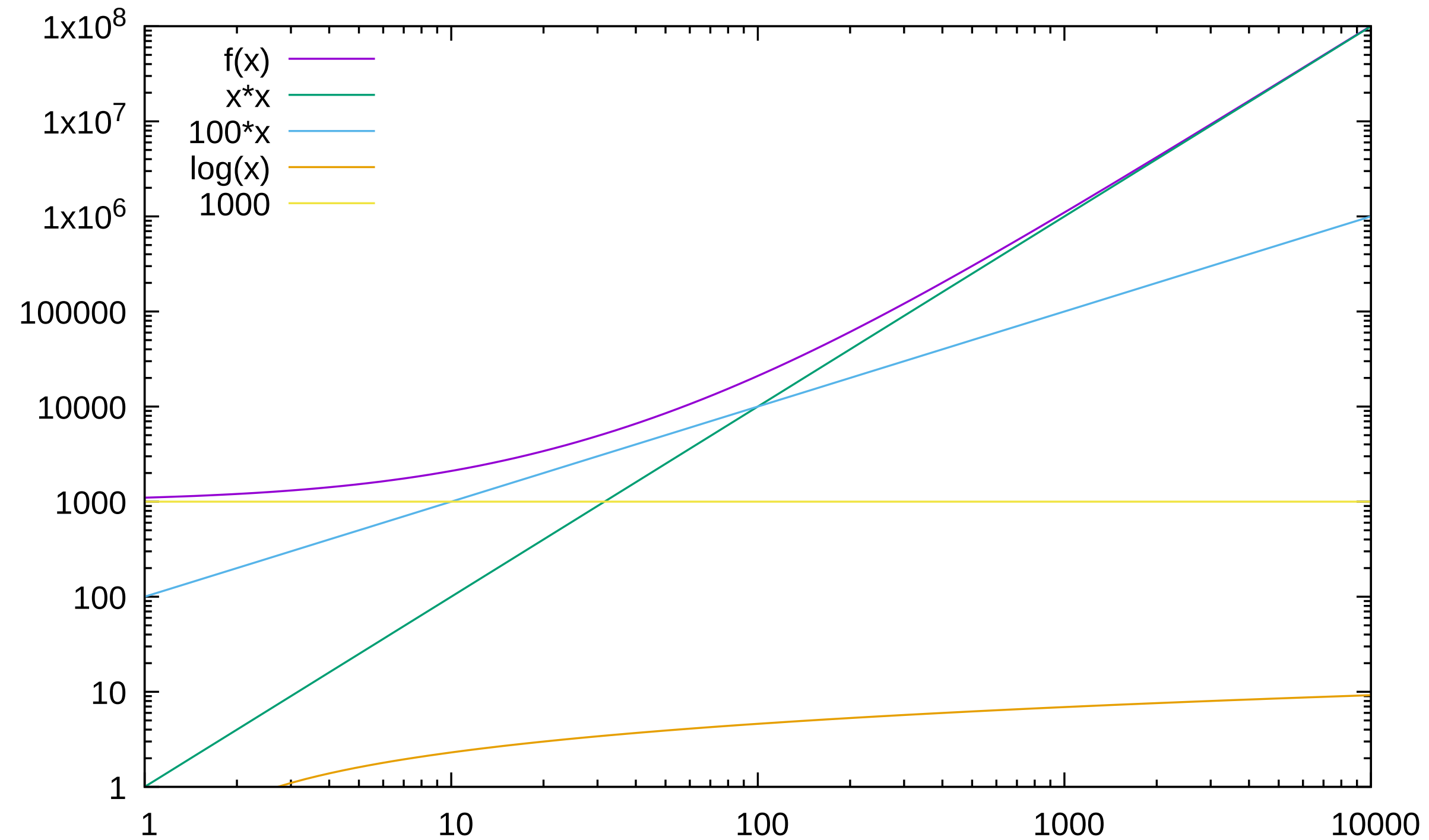
Ordre de grandeur asymptotique : exemple

$$f(n) = n^2 + 100n + \log n + 1000$$

n	$f(n)$	n^2		$100n$		$\log n$		1000	
		valeur	%	valeur	%	valeur	%	valeur	%
1	1'101	1	0.1	100	9.1	0	0	1000	90.82
10	2'101	100	4.8	1'000	47.6	1	0.0	1000	47.6
100	21'002	10'000	47.6	10'000	47.6	2	0.0	1000	4.8
10^3	1'101'003	10^6	90.8	10^5	9.1	3	0.0	1000	0.1
10^4	101'001'004	10^8	99.0	10^6	1.0	4	0.0	1000	0.0
...									

Ordre de grandeur asymptotique : exemple

$$f(n) = n^2 + 100n + \log n + 1000$$



Complexité : notation $\Theta(\dots)$

L'ordre de grandeur, ou le *terme dominant*, d'une fonction vers l'infini est noté en utilisant la notation $\Theta(\dots)$ (similaire à la notation de Landau $\mathcal{O}(\dots)$) :

Pour deux fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on écrit :

$$f \in \Theta(g)$$

si et seulement si

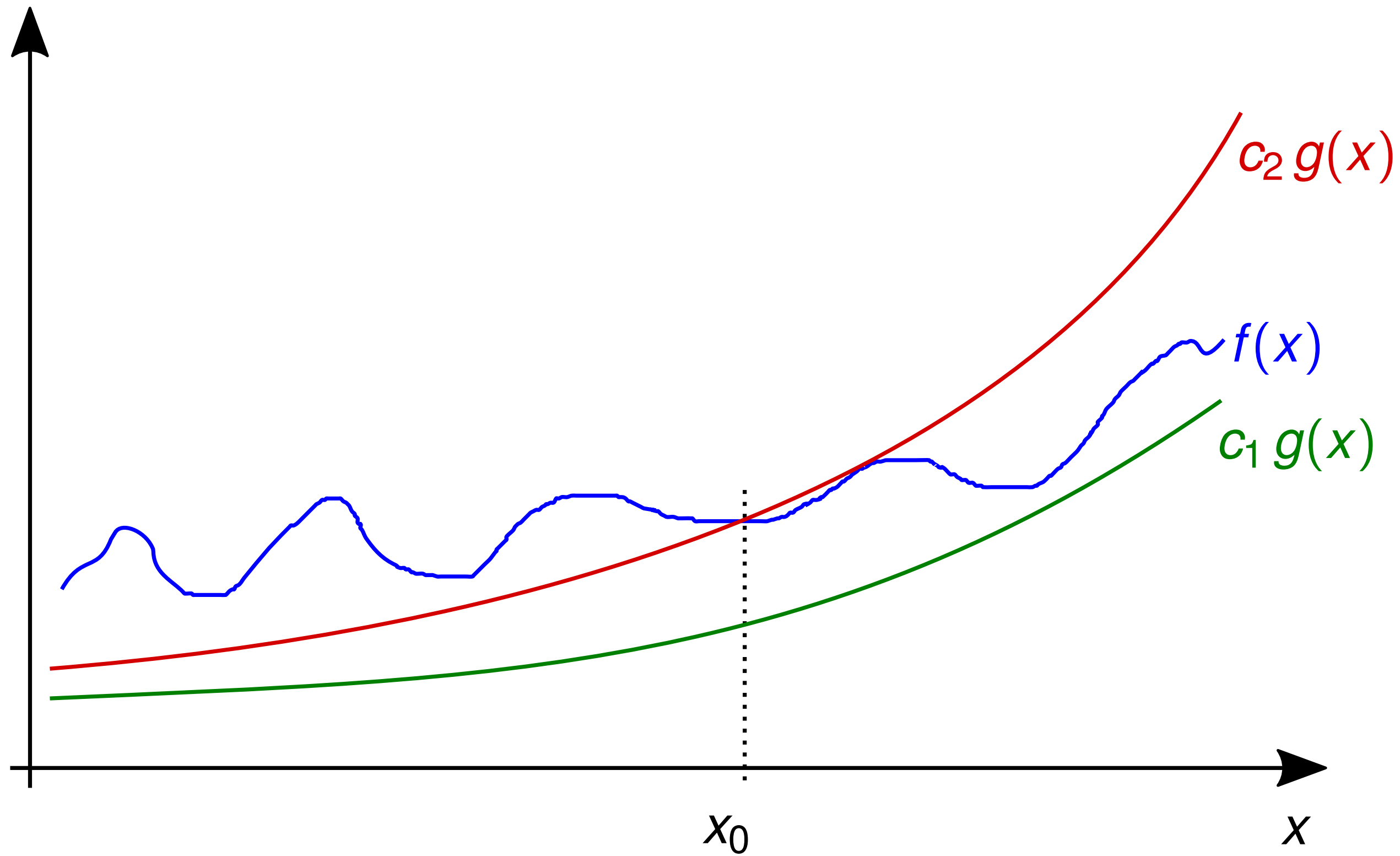
$$\exists c_1, c_2 \quad c_2 \geq c_1 > 0 \quad \exists x_0 \quad \forall x > x_0 \quad c_1 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2 \cdot |g(x)|$$

On dit alors que f est (asymptotiquement) de l'ordre de grandeur de g , que f est « **en grand thêta** » de g .

Notes :

1. $\Theta(g)$ est un **ensemble** : c'est l'ensemble toutes les fonctions qui « croissent comme » g à l'infini.
2. On utilise ici la notation $\Theta(g)$ au voisinage de l'infini. Il existe aussi des $\Theta(\cdot)$ au voisinage de points (que nous n'utiliserons pas).

Complexité : notation $\Theta(\dots)$



Comparaison d'algorithmes

Exemples : $3n + 2$ est en $\Theta(n)$ (mais n'est pas en $\Theta(n^2)$, ni en $\Theta(1)$)
 12 est en $\Theta(1)$ (mais n'est pas en $\Theta(n)$, ni en $\Theta(n^2)$)

Différentes classes de complexité permettent alors de caractériser les algorithmes (n représentant la taille d'entrée) :

- ▶ complexité constante $\Theta(1)$: le nombre d'éléments n'a pas d'influence sur l'algorithme
- ▶ complexité logarithmique $\Theta(\log n)$
- ▶ complexité linéaire $\Theta(n)$
- ▶ complexité quasi-linéaire $\Theta(n \log(n))$
- ▶ complexité polynomiale $\Theta(n^2)$, ... $\Theta(n^k)$
- ▶ complexité exponentielle $\Theta(2^n)$

Comparaison

Si la police devrait contrôler les papiers de tous les Lausannois(es),

il y aurait une file continue de 175 km

à peu près une file continue jusqu'à Zürich !



Comparaison

Si la police devrait contrôler les papiers de tous les Lausannois(es),

il y aurait une file continue de 175 km

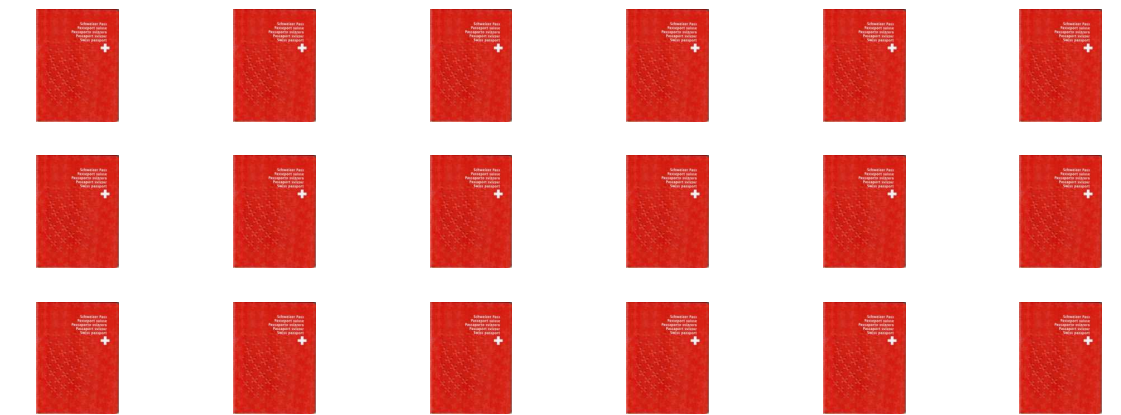
à peu près une file continue jusqu'à Zürich !



Si elle ne doit en contrôler que le log :

que 18 passeports à contrôler !!

(log en base 2)



Note : comme toujours avant de calculer une complexité, on a au préalable vérifié que l'algorithme est *correct*, c.-à-d. dans ce cas on a la certitude que le passeport recherché est bien dans les 18 passeports contrôlés. Ce n'est pas la question ici.

Algorithmes de recherche dans une liste



Pour résumer sur les algorithmes de recherche :

- ▶ si la liste n'est pas ordonnée : recherche exhaustive terme à terme, complexité linéaire ($\Theta(n)$, où n est la taille de la liste)
- ▶ si la liste *ordonnée* : recherche par dichotomie, complexité logarithmique ($\Theta(\log n)$)

👉 importance de la *modélisation des données*

- ▶ Ici si la liste est triée : solution moins complexe en temps
- ▶ mais quel est la complexité du tri ?...
- ▶ Notez cependant que le tri n'est fait qu'une seule fois avant toutes les recherches !

Les tris

Les méthodes de **tris** sont très **importantes en pratique** non seulement en soi, mais aussi parce qu'elle interviennent dans beaucoup d'autres algorithmes.

Elles sont par exemple nécessaires pour faire une recherche efficace.

Le problème du tri est également un problème intéressant en tant que tel et un bon **exemple de problème** pour lequel il existe de **nombreux algorithmes**.

Spécification du problème :

On considère une structure de données abstraite contenant des éléments que l'on peut **comparer** (entre eux : *relation d'ordre* totale sur l'ensemble des éléments)

On dira qu'un ensemble de données est trié si ses éléments sont disposés par **ordre croissant** lorsque l'on itère sur la structure de donnée.

Les tris

Par exemple : on cherche à trier une liste d'entiers.



Remarques :

- ▶ un tri ne supprime pas les doublons
- ▶ quelque soit l'algorithme de tri, un ensemble de données vide ou réduit à un seul élément est déjà trié !...

Quelques liens sur les tris

<http://www.sorting-algorithms.com/>

<http://lwh.free.fr/pages/algo/tri/tri.htm>

<http://www.youtube.com/watch?v=aXXWz5rF64>

Un premier exemple : le tri par insertion

Le principe du **tri par insertion** est extrêmement simple :

Un élément mal placé dans la liste va systématiquement être inséré à sa « bonne place » dans la liste.

tri insertion
entrée : <i>une liste (d'objets que l'on peut comparer)</i> sortie : <i>la liste triée</i>
Tant que il y a un élément mal placé on cherche sa bonne place on déplace l'élément à sa bonne place

Par « *élément mal placé* », on entend ici tout élément de la liste strictement plus petit que son prédécesseur.

Exemple de déroulement du tri par insertion

1
3
5
2
4
6

Exemple de déroulement du tri par insertion

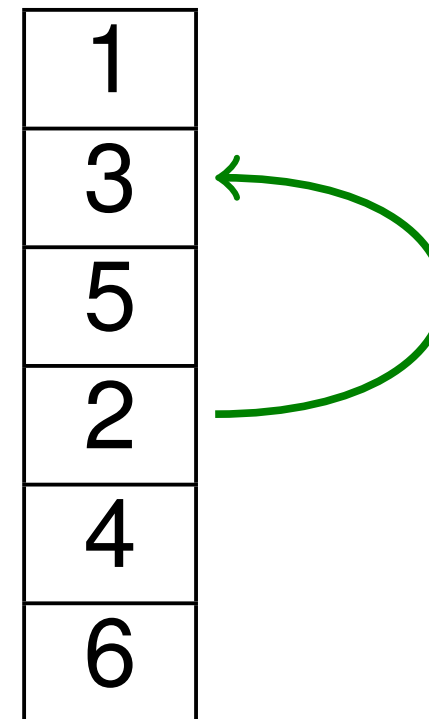
1
3
5
2
4
6

Tant que il y a un élément mal placé

on cherche sa bonne place

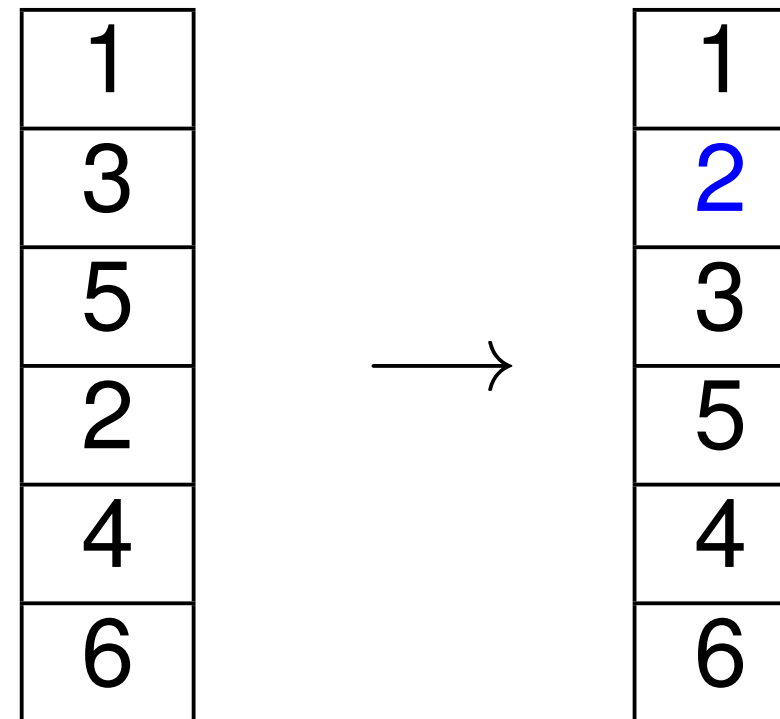
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



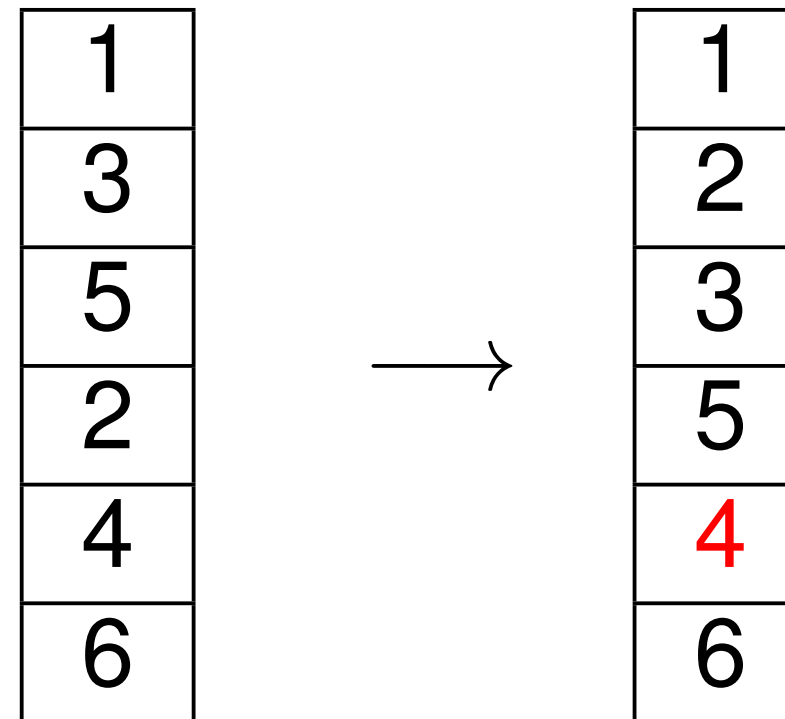
Tant que il y a un élément mal placé
| on cherche sa bonne place
| on déplace l'élément à sa bonne
| place

Exemple de déroulement du tri par insertion



Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion

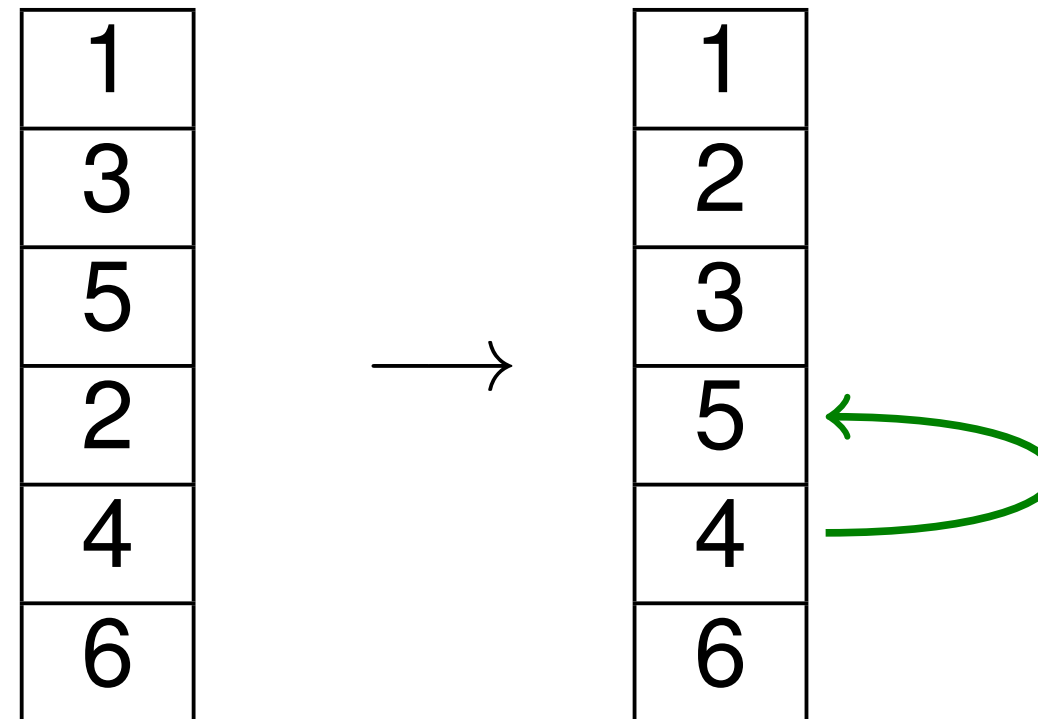


Tant que il y a un élément mal placé

on cherche sa bonne place

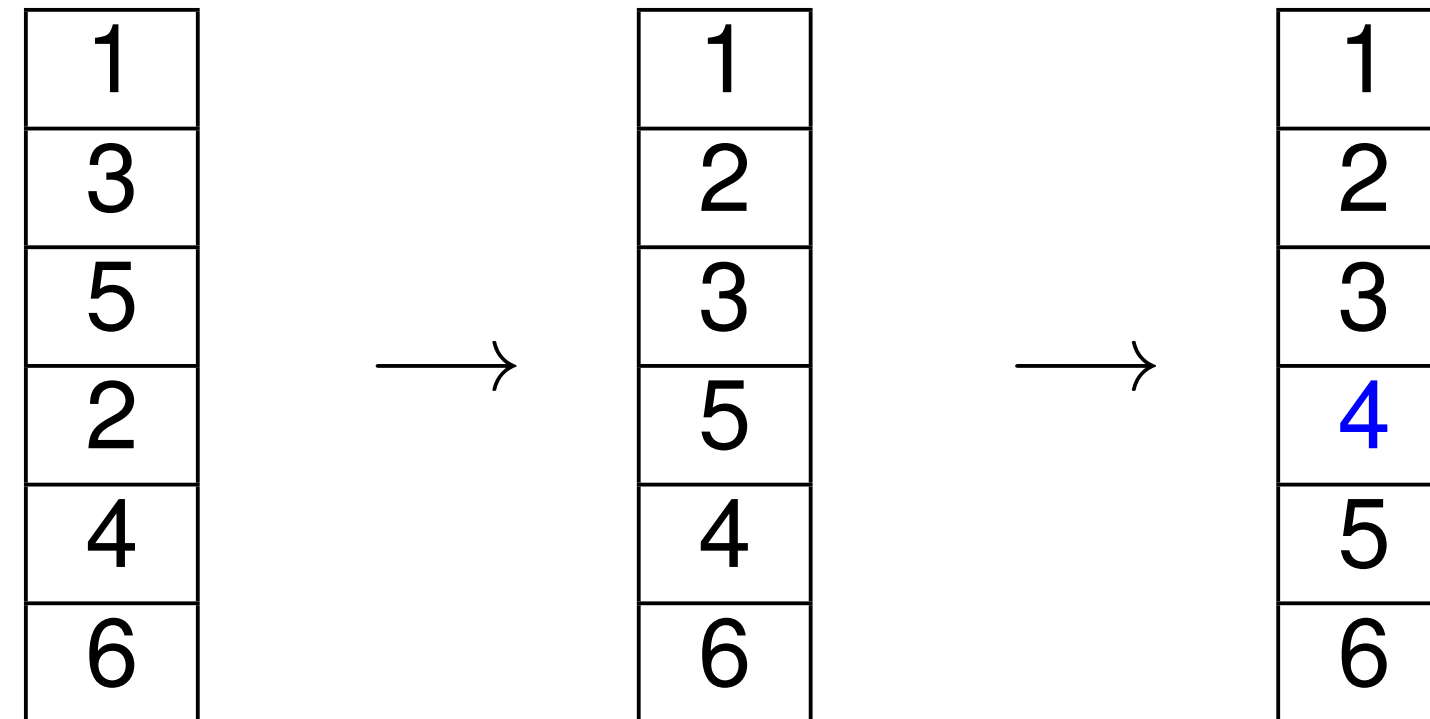
on déplace l'élément à sa bonne place

Exemple de déroulement du tri par insertion



Tant que il y a un élément mal placé
| on cherche sa bonne place
| on déplace l'élément à sa bonne
| place

Exemple de déroulement du tri par insertion



Tant que il y a un élément mal placé
on cherche sa bonne place
on déplace l'élément à sa bonne place

Algorithmes de tri

Il existe un grand nombre d'algorithmes de tri :

- ▶ récursif
- ▶ par sélection
- ▶ tri shaker
- ▶ tri de Shell
- ▶ tri tournois
- ▶ tri fusion
- ▶ tri par tas
- ▶ quick sort (« tri rapide »)
- ▶ ...

Comparaison des méthodes de tri

Soit n le nombre de données à trier.

	Complexité	pire cas
par sélection	$\Theta(n^2)$	
insertion	$\Theta(n^2)$	
de Shell	$\Theta(n^{1.5})$	
quick sort	$\Theta(n^2)$	
par tas	$\Theta(n \log n)$	

Mais en **pratique** : à partir de quelle taille les méthodes simples deviennent-elles vraiment plus mauvaises que les méthodes sophistiquées (quick sort ou tri par tas) ?

Conclusions sur les tris : comparaison (2)

En pratique ?

Cela dépend de nombreux facteurs, mais en général on peut dire que **pour moins d'une centaine** d'éléments les tris sophistiqués n'en valent pas la peine.

Par ailleurs, expérimentalement le **quick sort** est 2 à 3 fois plus rapide que le tri par tas

Dans le cas de listes presque triées, les tris par insertion sont efficaces

Le **tri bulles**, très simple à écrire, est le moins bon des tris : **à proscrire** (sauf à des fins pédagogiques)

Problème de plus court chemin

Une troisième famille classique de problèmes très répandus est celle des **plus court chemins**

Note : « plus court » en un certain sens qui peut aussi être « moins cher », « plus rapide », ...

☞ notion de fonction de coût / pondération

Exemples :

- ▶ calcul du chemin le plus rapide entre *toutes* les gares du réseau CFF (2 à 2)
(Nous verrons dans la prochaine leçon une solution à ce problème)
- ▶ calcul du chemin le plus rapide entre *une* gare *donnée* et toutes les *autres* gares
- ▶ calcul du chemin le plus rapide entre *deux* gares *données*

mais aussi (!) :

- ▶ résoudre le Rubik's cube en un nombre minimum de mouvements
- ▶ transcrire un texte lu (reconnaissance de la parole)
- ▶ corriger les erreurs dans une communication satellite (codes de convolution)

Ce que j'ai appris aujourd'hui

Dans cette leçon, vous avez

- ▶ appris ce qu'est un **algorithme** et ses principaux constituants
- ▶ appris à comparer l'efficacité de deux algorithmes : **complexité**
- ▶ vu trois familles de problèmes typiques en Informatique (recherche, tris, plus court chemin)
- ▶ vu combien *algorithme* et représentations des **données** sont liés : recherche linéaire dans une liste non ordonnée versus recherche dichotomique dans une liste ordonnée

👉 Vous pouvez maintenant :

- ▶ bien comprendre certains problèmes de base de l'Informatique (recherche, tris, plus court chemin)
- ▶ construire des algorithmes simples pour des problèmes simples typiques
- ▶ calculer la complexité d'algorithmes simples

La suite

La prochaine leçon :

- ▶ présentera les *stratégies* de conception d'algorithme :
comment concevoir un algorithme face à un problème complexe ?
- ▶ algorithme(s) de plus court chemin

Annexe mathématique : notations $\Theta(\cdot)$ et $\mathcal{O}(\cdot)$

Pour information (hors cours) :

Dans les notations asymptotiques, on utilise aussi souvent :

- ▶ $\mathcal{O} : f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists c > 0 \quad \exists x_0 \quad \forall x > x_0 \quad |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$
- ▶ $\Omega : f \in \Omega(g) \iff g \in \mathcal{O}(f)$
- ▶ $\Theta : f \in \Theta(g) \iff f \in \mathcal{O}(g) \text{ et } f \in \Omega(g)$

Θ est ainsi *le plus petit des « grands \mathcal{O} » possibles* (« plus petit » au sens de l'inclusion)

Exemples :

$3n + 2$ est en $\mathcal{O}(n^2)$, mais est aussi (et surtout) en $\mathcal{O}(n)$

12 est en $\mathcal{O}(n^2)$, et en $\mathcal{O}(n)$, mais est surtout en $\mathcal{O}(1)$

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$:

$f \in \mathcal{O}(x^2)$, mais aussi $f \in \mathcal{O}(x^3)$

$f \in \Omega(x^2)$, mais aussi $f \in \Omega(x)$

$f \in \Theta(x^2)$

Annexe mathématique : les notations $\mathcal{O}(\cdot)$

« La » notation $\mathcal{O}(\cdot)$ est en fait un abus de langage : elle n'a de sens qu'au **voisinage** d'un point (de $\overline{\mathbb{R}}$)

et on devrait en toute rigueur indiquer ce point : $\mathcal{O}_a(\cdot)$

Deux points (de $\overline{\mathbb{R}}$) sont souvent considérés : 0 et $+\infty$

👉 source de confusion

D'autant plus qu'en Maths $\mathcal{O}(\cdot)$ signifie très souvent $\mathcal{O}_0(\cdot)$

alors qu'en Informatique $\mathcal{O}(\cdot)$ signifie $\mathcal{O}_{+\infty}(\cdot)$

ce qui change tout !

Par exemple :

$$3x + 5 \log(x) \in \mathcal{O}_0(\log(x))$$

$$\text{mais } 3x + 5 \log(x) \in \mathcal{O}_{+\infty}(x)$$

Gare aux confusions entre votre cours d'Analyse et votre cours d'ICC !!

Annexe informatique

Pour information (hors cours) :

En fait, pour un nombre entier n représenté en binaire, les opérations arithmétiques (et comparaison) ne sont pas en temps constant, mais ont les complexités suivantes (si la valeur de n peut croître à l'infini, donc pas de représentation de taille fixe ; cf leçon I.4) :

comparaison	$\Theta(\log(n))$
addition	$\Theta(\log(n))$
multiplication ¹	$\Theta(\log(n) \log(\log(n)))$
division	$\Theta(\text{multiplication})$
racine carrée	$\Theta(\text{multiplication})$
$n!$	$\Theta(n (\log(n))^3 \log(\log(n)))$

1. Démontré en 2019!

D. Harvey & J. van der Hoeven (2021); *Integer multiplication in time $O(n \log n)$* ; Annals of Mathematics, Princeton University, Volume 193, Issue 2, 563-617.