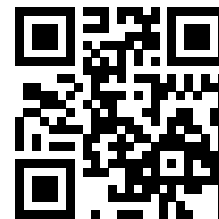


NOM : Hanon Ymous  
(000000)  
Place : 0

#0000



## Information, Calcul et Communication (SMA) : Examen final

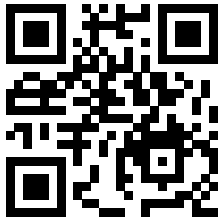
20 décembre 2024

### SUJET 1

#### INSTRUCTIONS (à lire attentivement)

**IMPORTANT!** Veuillez suivre les instructions suivantes à la lettre sous peine de voir votre examen annulé dans le cas contraire.

1. Vous disposez de deux heures quarante-cinq minutes pour faire cet examen (13h15 – 16h00).
2. Vous devez **écrire à l'encre noire ou bleu foncée**, pas de crayon ni d'autre couleur.  
N'utilisez **pas non plus de stylo effaçable** (perte de l'information à la chaleur).
3. Vous avez droit à toute documentation papier.  
En revanche, vous ne pouvez pas utiliser d'ordinateur personnel, ni de téléphone portable, ni aucun autre matériel électronique.
4. Répondez aux questions directement sur la donnée, **MAIS** ne mélangez pas les réponses de différentes questions!  
Ne joignez aucune feuilles supplémentaires ; **seul ce document sera corrigé**.  
Si nécessaire, il y a une page de réponse supplémentaire en fin de copie (page 20).
5. Lisez attentivement et *complètement* les questions de façon à ne faire que ce qui vous est demandé. Si l'énoncé ne vous paraît pas clair, ou si vous avez un doute, demandez des précisions à l'un(e) des assistant(e)s.
6. L'examen comporte 6 exercices indépendants sur 20 pages, qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre, mais qui ne rapportent pas la même chose (les points sont indiqués, le total est de 128 points).  
Tous les exercices comptent pour la note finale.



## Question 1 – Divers [25 points]

① [4 points] Qu'affiche le code ci-dessous ?

Justifiez votre réponse (vous pouvez aussi annoter le code).

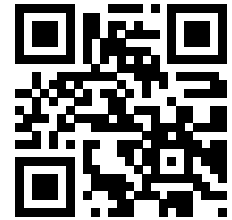
```
#include <iostream>
using namespace std;

double f(double x) {
    if (x < 0.0) throw -1.2;
    return x + 3.4;
}

double g(double x = -5.6) {
    try {
        return f(x);
    }
    catch(double y) {
        return 7.8 + y;
    }
}

int main()
{
    try {
        const double u( g() );
        cout << u << endl;
    }
    catch (double x) {
        cout << x << endl;
    }
    return 0;
}
```

Réponse et justification :



En utilisant RSA, vous souhaitez transmettre, de façon authentifiée, une information à un ami.

La clé publique de votre ami est  $(295, 2773)$ .

Votre clé publique est  $(1241, 1679)$ .

- ② [3 points] Quelle est votre clé privée, sachant que :  $1679 = 23 \times 73$ ,  $22 \times 72 = 1584$ ,  
 $1584 \times 720 = 1 \pmod{1241}$ ,  $1241 \times 665 = 1 \pmod{1584}$ ,  
 $1241 \times 1241 = 433 \pmod{1584}$ ,  $1241 \times 23 = 17 \times 1679$ ,  
 $1241 \times 73 = 1606 \pmod{1679}$  ?

**Justifiez** *brièvement* votre réponse.

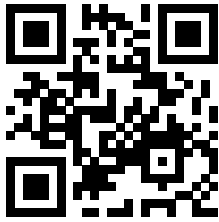
- ③ [7 points] Le message de départ que vous voulez envoyer est 100001001 (en binaire). Quel message lui envoyez vous ?

Exprimez votre réponse soit en binaire, soit sous la forme «  $x^y \pmod{z}$  » avec  $x$ ,  $y$  et  $z$  en base 10 et **justifiez** pleinement votre réponse.

**Réponse et justification :**

- ④ [2 points] Combien de bits au maximum contiendra le message que vous envoyez (encodé en binaire simplement comme des entiers) ?

suite au dos 



---

⑤ [2 points] Dans un jeu de plateau, un monstre a un score d'attaque qui peut prendre toutes les valeurs entières entre  $-10$  et  $10$  inclus. Combien de bits sont nécessaires pour représenter ce score ? En supposant qu'on utilise ces bits avec une représentation en complément à 2, comment représente-t-on la valeur d'attaque  $-6$  ?

**Justifiez** vos réponses.

**Réponses et justifications :**

⑥ [3 points] Si les monstres ont également un score de « bonus aérien » compris entre 1 et 10 inclus, de combien de bits a-t-on besoin pour représenter les scores d'attaque *et* de bonus d'un monstre ?

**Justifiez** vos réponses.

**Réponses et justifications :**

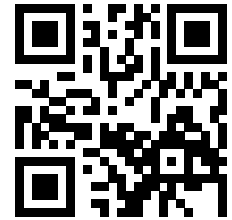
⑦ [4 points] Lorsqu'un monstre attaque depuis les airs, on *multiplie* son score d'attaque et son bonus aérien. Considérez un monstre avec un score d'attaque de  $-8$  et un bonus aérien de 9. Si on calcule  $-8 \times 9$  en complément à 2 avec le nombre de bits que vous avez utilisé en ⑤, quel résultat obtient-on ?

Qu'en est-il si on utilise le nombre de bits que vous avez utilisé en ⑥ ?

Exprimez vos réponses **en décimal** et **justifiez-les**.

**Réponse et justification :**

Ne pas écrire dans cette zone.



## Question 2 – Manipulations de listes [18 points]

On s'intéresse au problème suivant : soit une liste de valeurs considérées deux à deux ; on souhaite regrouper (sommer) toutes les secondes valeurs qui sont juste après la même première valeur.

On s'intéresse donc à des listes de la forme  $(a_1, x_1, a_2, x_2, \dots, a_n, x_n)$  où l'on souhaite regrouper tous les  $a_i$  identiques en sommant leurs  $x_i$ . De telles listes ont donc forcément un nombre pair d'éléments.

Par exemple, à partir de la liste  $(3, 5, 1, 8, 5, 2, 1, -2, 2, 1, 3, 2)$ , on souhaite produire la liste  $(3, 7, 1, 6, 5, 2, 2, 1)$  : après 3 apparaît la somme des valeurs 5 et 2 qui sont les valeurs apparaissant partout après 3 dans la première liste ; de même, après 1 apparaît la somme des valeurs 8 et  $-2$  qui sont les valeurs apparaissant partout après 1 dans la première liste, etc.

À noter que la première des deux valeurs ( $a_i$ ) peut apparaître plus que deux fois dans la liste de départ. Par exemple, à partir de la liste  $(5, 3, 5, 2, 5, 1, 5, 3)$ , on produira la liste  $(5, 9)$  (car  $3 + 2 + 1 + 3 = 9$ ).

Il n'est pas nécessaire que les premières valeurs ( $a_i$ ) de la liste produite comme solution apparaissent dans le même ordre que dans la liste d'origine. Ainsi dans le premier exemple, les listes  $(3, 7, 1, 6, 5, 2, 2, 1)$ ,  $(5, 2, 1, 6, 2, 1, 3, 7)$ ,  $(1, 6, 2, 1, 3, 7, 5, 2)$  ou  $(3, 7, 5, 2, 1, 6, 2, 1)$  (par exemples) sont toutes aussi acceptables comme solution au problème considéré.

① [12 points] Écrivez un algorithme *récuratif* résolvant le problème décrit ci-dessus.

**Réponse :**

suite au dos



---

② [6 points] Quelle est la complexité de votre algorithme proposé en ① ? **Justifiez** votre réponse.

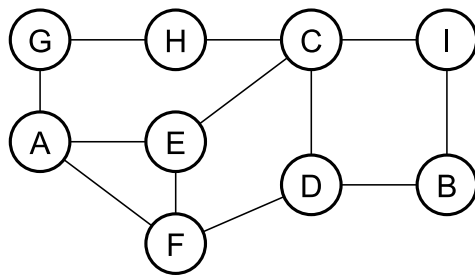
Ne pas écrire dans cette zone.



### Question 3 – Entre amis [32 points]

**Note :** (comme toujours, mais particulièrement ici) nous vous conseillons, afin de faire les bons choix, de lire *entièrement* cette question avant de commencer.

Alice, Bob et Carole sont trois amis qui souhaitent s'échanger des informations en utilisant le protocole TCP/IP. Ils font partie du réseau informatique suivant où chaque noeud représente un routeur :



- Alice
- Bob
- Carole
- David
- Ève
- France
- Georges
- Hugues
- Inès

① [4 points] Donnez les lignes correspondant à Alice et Bob dans la table de routage de Carole.

**Justifiez** votre réponse en annotant (simplement) le graphe ci-dessus.

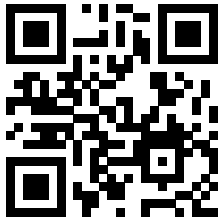
**Réponse :**

② [2 points] On suppose qu'il existe un type de données C++ `AdresseIP` qui représente une adresse IP (si cela vous aide, vous pouvez considérer qu'il s'agit d'un entier non signé). Définissez, en C++, un type de données `TableRoutage` qui permet de stocker la table de routage d'un nœud.

Expliquez brièvement vos choix d'implémentation.

**Réponse :**

suite au dos



③ [4 points] On suppose qu'il existe une fonction C++

```
void envoieSurLien(AdresseIP voisin, AdresseIP destination, string const& paquet);
```

que vous ne devez pas implémenter. Elle transfère au nœud `voisin` direct donné, *via* la couche de lien, un `paquet` à destination de `destination`.

Implémentez, en C++, la fonction `envoieSurReseau()` qui effectue le transfert d'un paquet au niveau de la couche réseau. Elle reçoit la table de routage du nœud courant (telle que vous l'avez définie à la sous-question précédente), un destinataire et un paquet. Elle doit transférer le paquet au prochain nœud via la couche de lien. On suppose que le destinataire du paquet n'est *pas* le nœud courant.

*Conseil* : n'oubliez pas qu'il vous est toujours possible de définir des fonctions annexes. Dans ce cas, vous devez bien sûr fournir l'implémentation de celles-ci.

**Réponse :**

④ [15 points] On suppose qu'il existe une fonction C++

```
void envoieDonneesRoutageSurLien(  
    AdresseIP voisin, AdresseIP destination, unsigned int distance);
```

que vous ne devez pas implémenter. Elle communique un paquet de données de routage – les paquets qui établissent les tables de routage, pas ceux qui sont réellement envoyés pour le compte des couches supérieures – au `voisin` direct donné, concernant une `destination` et une `distance` donnée.

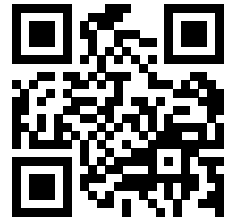
Implémentez, en C++, la fonction `recoitDonneesRoutageDepuisLien()` qui applique la *réception* d'un tel paquet de données de routage. Elle reçoit l'adresse du voisin direct qui a envoyé le paquet, ainsi que les informations de `destination` et `distance`. Elle reçoit également la table de routage du nœud courant, ainsi qu'une liste des adresses IP de tous les voisins directs.

Par exemple, si **France** appelle `envoieDonneesRoutageSurLien()` vers son voisin **David**, alors votre fonction s'exécutera chez **David** en recevant l'adresse IP de **France** comme voisine, comme table de routage celle de **David**, et la liste des adresses IP de **Bob**, **Carole** et **France** (les voisins de **David**).

Votre fonction doit appliquer les changements nécessaires à la table de routage et/ou utiliser la fonction `envoieDonneesRoutageSurLien()`.

Question 3


Anonymisation : #0000  
p. 9

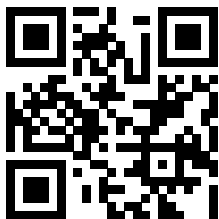


---

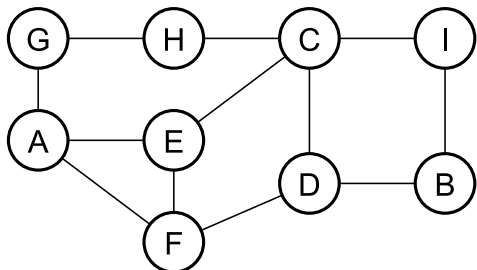
Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.

suite au dos 



Par soucis de facilité, nous reproduisons ici le **même** réseau que donné au début :



⑤ [3 points] Ève aime Écouter aux portes. En particulier, elle raffole des ragots qui concernent Alice, Bob et Carole.

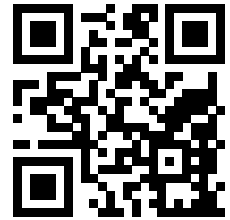
Étant donné le réseau défini plus haut, Ève est-elle en mesure « d’écouter » les messages que s’envoient Alice, Bob et Carole? Répondez par **oui**, **non** ou **peut-être** dans chaque case. « peut-être » signifie que les informations données ne permettent pas de décider.

**Attention** : les réponses laissées blanches valent 0, mais les réponses fausses valent  $-1/4$ .

Réponses :

Source du message	Destinataire	Votre réponse
de Alice	à Bob	
de Bob	à Alice	
de Alice	à Carole	
de Carole	à Alice	
de Bob	à Carole	
de Carole	à Bob	

Ne pas écrire dans cette zone.



---

© [4 points] Si Ève devient réellement malhonnête, elle voudra peut-être tenter *d'influencer* les autres routeurs du réseau. Proposez *une* modification *de nature technologique* qu'Ève peut implémenter pour lui permettre de mieux espionner Alice, Bob et/ou Carole.

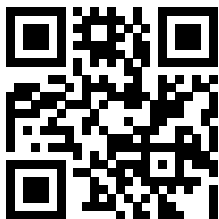
Votre proposition doit permettre de transformer au moins un « non » ou « peut-être » de votre réponse précédente en un « oui ».

On peut supposer qu'Ève a connaissance du réseau complet, mais qu'elle ne peut pas changer les connexions physiques.

**Expliquez** votre choix : comment ça fonctionne et quels « non » ou « peut-être » cela peut-il impacter.

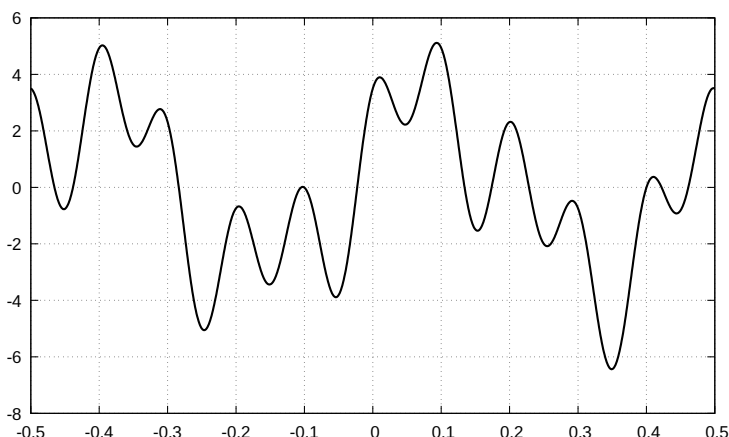
**Réponse et explications :**

suite au dos 

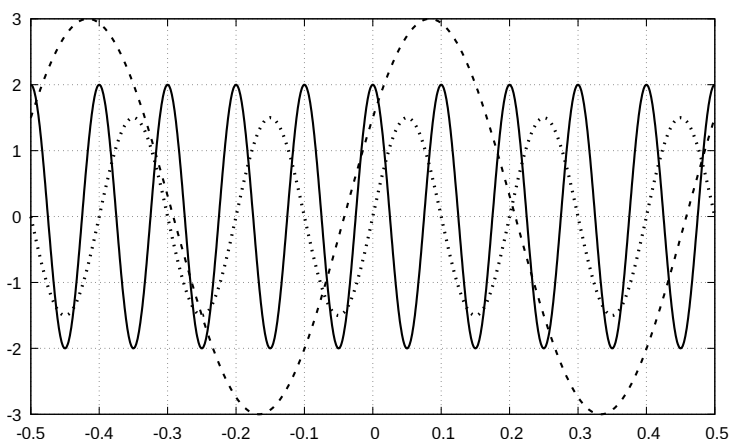


### Question 4 – Quel son ? [16 points]

On considère le signal  $X(t)$  suivant (échelle en secondes) :



composé de la somme des trois fonctions suivantes :



dont les amplitudes sont parmi :

- 0.5    1    1.5    2    2.5    3

dont les fréquences (en Hz) sont parmi :

- 0    0.1    0.2    0.25    0.5    1    2    2.5    4    5    10    15    20

et dont les déphasages sont parmi :

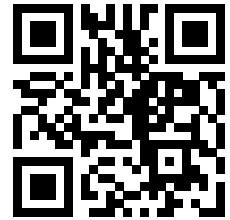
- 0     $\frac{\pi}{6}$      $\frac{\pi}{4}$      $\frac{\pi}{2}$      $\frac{2\pi}{3}$      $\frac{3\pi}{4}$

① [3 points] Écrivez la formule mathématique de  $X(t)$  :

$X(t) =$

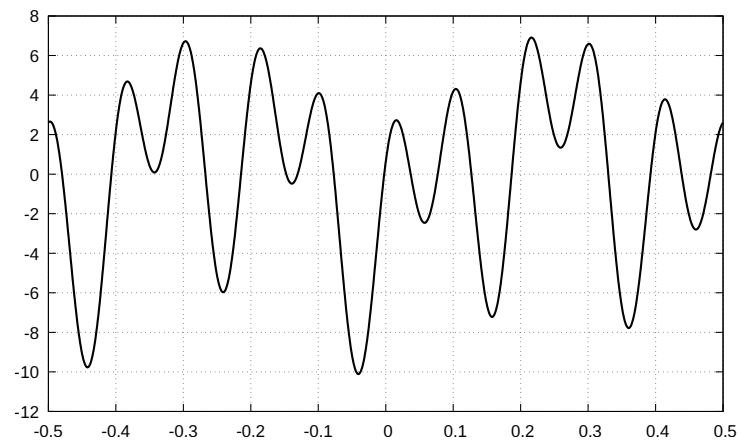
et justifiez votre réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.



② [3 points] Dessinez le spectre de  $X(t)$  :

On considère maintenant également le signal  $Y(t) = X(t) + 1.5 X(t + \frac{\pi}{4})$  :



③ [3 points] Si l'on échantillonne ces deux signaux à une fréquence d'échantillonnage de  $f_e = 22.5$  Hz, et que l'on reconstruit les signaux à partir de ces échantillons (suivant les formules vues en cours), lequel de ces deux signaux sera le mieux reconstruit ?

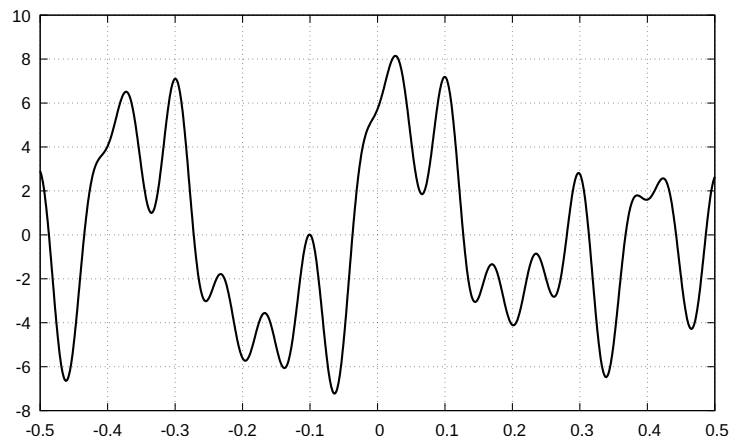
**Justifiez pleinement** votre réponse.

**Réponse et justification :**

suite au dos



On considère maintenant le signal  $Z(t) = X(t) + X(1.5t + \frac{\pi}{3})$  :



④ [3 points] Si l'on échantillonne les signaux  $X(t)$  et  $Z(t)$  à une fréquence d'échantillonnage de  $f_e = 27$  Hz, et que l'on reconstruit les signaux à partir de ces échantillons (suivant les formules vues en cours), lequel de  $X(t)$  et  $Z(t)$  sera le mieux reconstruit ?

Justifiez pleinement votre réponse.

Réponse et justification :

⑤ [4 points] Soit  $\hat{Z}(t)$  le signal  $Z(t)$  après filtrage par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $f_c = 6$  Hz. Écrivez la formule mathématique de  $\hat{Z}(t)$  :

$\hat{Z}(t) =$

et justifiez votre réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.



## Question 5 – Un peu de broderie [24 points]

On s'intéresse ici à stocker des informations à propos de motifs de broderie. Un *motif* est une suite de couleurs et de jokers, que l'on choisit parmi rouge (R), vert (V), bleu (B), jaune (J) et joker (?). Une *réalisation* d'un motif est une suite de couleurs uniquement ; elle doit respecter les couleurs prescrites par le motif, mais peut utiliser une des quatre couleurs au choix pour chaque joker du motif.

Considérez le motif suivant :

$$M = \text{RRV??J?RJB?J}$$

et la chaîne

$$L = \text{RRVVBJVRJBRJ}$$

$L$  est une *réalisation* possible de  $M$ . En effet, on peut obtenir  $L$  en remplaçant les quatre ? de  $M$  par V, B, V et R respectivement.

En revanche,  $\text{RRVVB R VRJBRJ}$  n'est pas une réalisation possible de  $M$ , car en 6<sup>e</sup> position nous avons un R, qui ne correspond pas au J prescrit par le motif  $M$ .  $\text{RRVVBJVRJBRJ RRRR}$  n'est pas non plus valide car les longueurs ne correspondent pas.

Voici quelques approximations dont vous pourriez avoir besoin au long de cette question :

$$\log_2(3) \simeq 1.58 \quad \log_2(5) \simeq 2.32 \quad \log_2(7) \simeq 2.81$$

### ① [6 points]

- Quelle est l'entropie maximale d'une *réalisation* ?
- Quelle est, en bits, l'entropie maximale d'un *motif* considéré en tant que tel comme une chaîne de caractères ? Les jokers (?) font partie des caractères possibles de cette chaîne.
- Quelle est l'entropie du motif  $M$  ?  
Donnez votre réponse à c) sous la forme  $a + b \log_2(3) + c \log_2(5) + d \log_2(7)$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des nombres rationnels (potentiellement entiers voire nuls).

**Justifiez** vos trois réponses.

**Réponses et justifications :**

suite au dos



---

② [6 points] Proposez, en le justifiant, un code de Huffman pour  $M$ . Quelle est sa longueur moyenne ? Justifiez et commentez votre résultat.

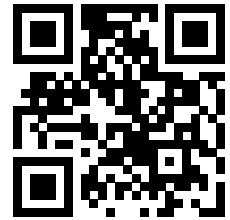
Réponses et justifications :

③ [2 points] Quelle est, en bits, l'entropie *maximale* d'une réalisation valide de  $M$  ?

Donnez votre réponse sous la forme  $a + b \log_2(3) + c \log_2(5) + d \log_2(7)$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des nombres rationnels (potentiellement entiers voire nuls).

Réponse et justification :

Ne pas écrire dans cette zone.



---

④ [4 points] Quelle est, en bits, l'entropie *minimale* d'une réalisation valide de  $M$  ?

Donnez votre réponse sous la forme  $a + b \log_2(3) + c \log_2(5) + d \log_2(7)$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des nombres rationnels (potentiellement entiers voire nuls).

**Réponse et justification :**

⑤ [6 points]

Considérons que l'on doit transmettre plusieurs réalisations valides de  $M$ . On suppose que l'émetteur et le récepteur *se mettent d'accord à l'avance* pour ne transmettre que des réalisations valides de  $M$ , et savent que toutes les couleurs sont équiprobables pour les ? de  $M$ . Proposez un code (sans préfixe et sans perte) pour transmettre de telles réalisations.

Quelle est la longueur de votre code pour la réalisation  $L$  ?

Ce résultat est-il cohérent avec vos réponses aux questions précédentes ?

**Réponses et justifications :**

suite au dos 



---

## Question 6 – Premiers [13 points]

Écrivez un programme C++ qui crée un fichier nommé `premiers.csv` contenant la liste, un par ligne, des nombres premiers et de leur carré, séparés par une virgule.

Le début du fichier `premiers.csv` sera donc :

```
2,4  
3,9  
5,25  
7,49
```

Votre programme devra commencer par demander jusqu'à quel nombre maximum (pas nécessairement premier) on souhaite aller (inclus si c'est un nombre premier qui est donné). Par exemple :

Jusqu'à quel nombre souhaitez-vous aller ?

```
1234
```

Dans ce cas, la fin du fichier `premiers.csv` sera alors :

```
1229,1510441  
1231,1515361
```

(car le prochain nombre premier après 1231 est 1237).

On supposera de plus qu'une fonction

```
unsigned int prochain_premier(unsigned int n);
```

est fournie (vous **n'**avez donc **pas** à l'écrire).

Cette fonction donne le prochain nombre premier *strictement* plus grand qu'un nombre `n`. Par exemple `prochain_premier(5)` retourne 7, et `prochain_premier(1229)` retourne 1231.

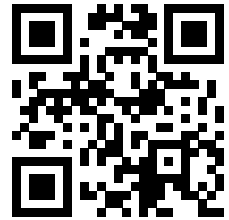
(Rappel : le premier nombre premier est 2.)

**Réponse :**

Ne pas écrire dans cette zone.

Question 6

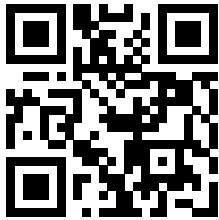
Anonymisation : #0000  
p. 19



---

(suite de la réponse si nécessaire :)

Ne pas écrire dans cette zone.



---

Place supplémentaire pour répondre à n'importe quelle question si nécessaire. Mais  
**VEUILLEZ INDIQUER LE NUMÉRO DE LA QUESTION TRAITÉE.**

Ne pas écrire dans cette zone.