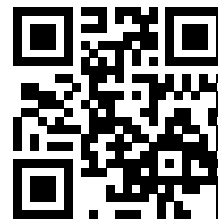


NOM : Hanon Ymous  
(000000)  
Place : 0

#0000



## Information, Calcul et Communication (SPH) :

### Examen I

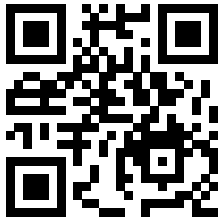
1<sup>er</sup> novembre 2024

### SUJET 1

#### INSTRUCTIONS (à lire attentivement)

**IMPORTANT!** Veuillez suivre les instructions suivantes à la lettre sous peine de voir votre examen annulé dans le cas contraire.

1. Vous disposez de deux heures quarante-cinq minutes pour faire cet examen (13h15 – 16h00).
2. Vous devez **écrire à l'encre noire ou bleu foncée**, pas de crayon ni d'autre couleur.  
N'utilisez **pas non plus de stylo effaçable** (perte de l'information à la chaleur).
3. Vous avez droit à toute documentation papier.  
En revanche, vous ne pouvez pas utiliser d'ordinateur personnel, ni de téléphone portable, ni aucun autre matériel électronique.
4. Répondez aux questions directement sur la donnée, **MAIS** ne mélangez pas les réponses de différentes questions!  
Ne joignez aucune feuilles supplémentaires; **seul ce document sera corrigé**.  
Si nécessaire, il y a une page de réponse supplémentaire en fin de copie (page 16).
5. Lisez attentivement et *complètement* les questions de façon à ne faire que ce qui vous est demandé. Si l'énoncé ne vous paraît pas clair, ou si vous avez un doute, demandez des précisions à l'un des assistants.
6. L'examen comporte 6 exercices indépendants sur 16 pages, qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre, mais qui ne rapportent pas la même chose (les points sont indiqués, le total est de 147 points).  
Tous les exercices comptent pour la note finale.



## Question 1 – Questions diverses [29 points]

① [4 points] On souhaite stocker en binaire le score d'un participant à un concours composé de  $n$  épreuves successives. Chaque épreuve est évaluée par un score  $s_i$  compris entre 0 et  $m - 1$ . Le score final  $S$  est calculé comme le produit des scores des épreuves :  $S = s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n$ .  
En fonction de  $n$  et  $m$ , de combien de bits a-t-on besoin pour représenter ce score final  $S$ ?  
Justifiez *brièvement* votre réponse.

Réponse puis justification :

Considérez l'algorithme suivant :

<b>algo1</b>
entrée : <i>nombre entier strictement positif p</i> sortie : ???
$q \leftarrow 1$ <b>Tant que</b> $q \leq p^2$   $q \leftarrow 2q$ <b>Sortir</b> : $q$

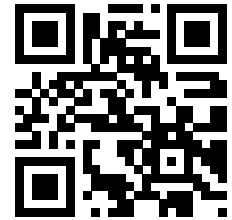
② [3 points] Cochez toutes les affirmations vraies (pour tout  $p \geq 1$ ). **Attention!** Pénalité pour de mauvaises coches.

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{p^2}{2} \leq \text{algo1}(p) \leq p^2$ | <input type="checkbox"/> $\text{algo1}(p)$ est pair                                      |
| <input type="checkbox"/> $p^2 < \text{algo1}(p) \leq 2p^2$             | <input type="checkbox"/> $\text{algo1}(p)$ est une puissance de 2                        |
| <input type="checkbox"/> $2p^2 < \text{algo1}(p)$                      | <input type="checkbox"/> aucune des autres propositions n'est vraie pour tout $p \geq 1$ |

③ [4 points] Quelle est la complexité de **algo1**? Justifiez *pleinement* votre réponse.

Réponse et justification :

Ne pas écrire dans cette zone.



Considérez l'algorithme suivant, où  $\lfloor x \rfloor$  représente la partie entière de  $x$  :

<b>algo2</b>
entrée : <i>nombre entier positif</i> $p$ sortie : ???
<b>Si</b> $p < 2$   <b>Sortir</b> : $p + 1$ <b>Sortir</b> : $3 \times \text{algo2}(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor) + 2$

- ④ [2 points] Quelle est la sortie de **algo2**(6)? Justifiez *brièvement* votre réponse.  
 ⑤ [3 points] Quelle est la complexité de **algo2**? Justifiez *pleinement* votre réponse.

Réponses et justifications :

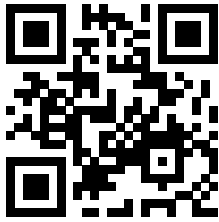
Considérez l'algorithme suivant :

<b>algo3</b>
entrée : <i>liste</i> $L$ de <i>nombre</i> s entiers positifs sortie : <i>nombre</i> entier positif $p$
$n \leftarrow \text{taille}(L)$ $p \leftarrow 0$ <b>Pour</b> $i$ de 1 à $n - 1$   <b>Pour</b> $j$ de $i + 1$ à $n$     <b>Si</b> $L[i] < L[j]$       $p \leftarrow p + 1$ <b>Sortir</b> : $p$

- ⑥ [2 points] Quelle est la sortie de **algo3** pour la liste (2, 4, 1, 5)? Justifiez *brièvement* votre réponse.  
 ⑦ [3 points] Quelle est la complexité de **algo3**? Justifiez *brièvement* votre réponse.

Réponses et justifications :

suite au dos



---

⑧ [3 points] Quelle est l'écriture en virgule flottante (binaire) avec 4 bits d'exposant et 4 bits de mantisse, du nombre  $x$  solution de l'équation  $2^{-5} \times x = -\frac{21}{16}$  ?  
Justifiez *pleinement* votre réponse.

Réponse puis justification :

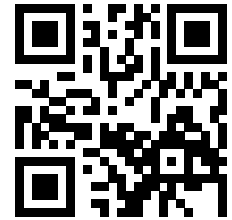
⑨ [2 points] Si un nombre entier s'écrit 011010 en binaire signé sur 6 bits, comment s'écrit son opposé (toujours sur 6 bits) ?  
Justifiez *brièvement* votre réponse.

Réponse puis justification :

⑩ [3 points] Comment s'écrit la valeur  $-200$  en binaire signé sur 9 bits ?  
Justifiez votre réponse.

Réponse puis justification :

Ne pas écrire dans cette zone.



## Question 2 – Responsum ex machina [16 points]

On considère la machine de Turing ayant pour table de transition :

	0	1	$\varepsilon$
1	(2, $\varepsilon$ , +)	(1, $\varepsilon$ , +)	(10, 0, -)
2	(3, $\varepsilon$ , +)	(1, $\varepsilon$ , +)	(10, 0, -)
3	(3, $\varepsilon$ , +)	(4, $\varepsilon$ , +)	(6, 1, -)
4	(2, $\varepsilon$ , +)	(5, $\varepsilon$ , +)	(10, 0, -)
5	(2, $\varepsilon$ , +)	(1, $\varepsilon$ , +)	(6, 1, -)
6	(10, 1, -)	(10, 1, -)	(10, 1, -)

① [5 points] Quel est l'état de la bande et la position de la tête de lecture lorsque la machine s'arrête, si elle a démarré avec sa tête de lecture positionnée comme suit :

$\dots\varepsilon$	0	1	0	0	1	1	$\varepsilon\dots$
	↑						

② [11 points] Justifiez votre réponse en trois ou quatre phrase(s), puis dites en une phrase ce que fait cette machine.

Réponses :

suite au dos



---

### Question 3 – Réflexions algorithmiques [25 points]

**Note :** lisez la sous-question ③ (au dos) avant de répondre à ①.

Soit  $L$  une liste quelconque de nombres entiers. On cherche à écrire un algorithme qui remplace toute séquence de nombres égaux consécutifs par la valeur commune suivie du compte de répétitions.

Par exemple, pour la liste  $L = (5, 5, 5)$  en entrée, l'algorithme sortira la liste  $(5, 3)$ , puisque la valeur 5 est répétée trois fois. De façon similaire, pour la liste  $(5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 8, 8, 1)$ , il sortira  $(5, 3, 1, 4, 8, 2, 1, 1)$ .

① [8 points] Écrivez un algorithme pour résoudre ce problème.

**Réponse :**

② [4 points] Quelle est la complexité de votre algorithme proposé en ①? **Justifiez** votre réponse.

**Réponse et justification :**

Ne pas écrire dans cette zone.



---

③ [9 points] Écrivez un algorithme *récuratif* et sans boucle pour résoudre le problème proposé.

Si votre réponse à ① est déjà un algorithme récursif, alors vous n'avez rien de plus à faire ici que le dire (et serez, bien entendu, noté(e) sur la somme des points des deux sous-questions).

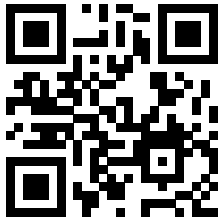
**Réponse :**

④ [4 points] Quelle est la complexité de votre algorithme proposé en ③ ? **Justifiez** votre réponse.

Si votre réponse à ① était déjà un algorithme récursif, et que vous avez répondu à sa complexité en ②, alors vous n'avez rien de plus à faire ici (et serez, bien entendu, noté(e) sur la somme des points des deux sous-questions).

**Réponse et justification :**

suite au dos 



## Question 4 – Sommes nulles [35 points]

Le problème SSP est un problème de décision sur un ensemble de nombres entiers, qui cherche à déterminer s'il existe un sous-ensemble non-vide de somme nulle.

Par exemple, pour l'ensemble  $\{3, 4, 12, -1, 6, -2\}$  la réponse est « oui » puisque le sous-ensemble  $\{3, -1, -2\}$  somme bien à 0.

Par contre, pour l'ensemble  $\{3, 2, 14, -8, 1\}$  la réponse est « non » puisqu'aucun de ses sous-ensembles de valeurs ne somme à 0.

SSP est connu pour être dans NP. Mais qu'est-ce que cela veut dire concrètement ? Nous allons regarder cela d'un peu plus près.

**Note :** si cela vous aide, vous pouvez, sans perte de généralité, considérer qu'un ensemble est une liste.

① [2 points] Pour commencer, pour écrire des algorithmes sur des sous-ensembles d'un ensemble, il est parfois plus simple de voir un sous-ensemble comme l'écriture binaire d'un entier positif : 1 si l'élément est présent dans le sous-ensemble, et 0 s'il ne l'est pas

Par exemple, dans l'exemple ci-dessus ( $\{3, 4, 12, -1, 6, -2\}$ ), le sous-ensemble  $\{3, -1, -2\}$  serait représenté par le nombre binaire 100101 : 3 est présent, 4 et 12 ne le sont pas, -1 est présent, 6 ne l'est pas et -2 l'est.

À quelle valeur décimale correspond 100101 ? Justifiez *brièvement* votre réponse.

**Réponse et justification :**

② [10 points] En supposant qu'il existe un algorithme **somme** qui prend en entrée un ensemble  $E$  et un nombre entier  $k$  positif non nul et qui donne en sortie la somme des éléments de  $E$  correspondant au sous-ensemble de  $E$  décrit par l'écriture binaire de  $k$ , proposez un algorithme permettant de répondre au problème SSP.

**Réponse :**

Ne pas écrire dans cette zone.



---

③ [3 points] En supposant que la complexité de **somme** est en  $\Theta(n)$  où  $n$  est la taille de  $E$ , quelle est la complexité de l'algorithme que vous avez proposé en ②? **Justifiez** votre réponse.

④ [3 points] Cette complexité est-elle en contradiction avec l'affirmation que SSP est dans NP? Décrivez votre réponse.

**Réponses et justifications :**

⑤ [3 points] Quel serait un certificat pour une instance (positive) de ce problème?

Illustrez votre explication dans le cas concret donné en exemple au début.

**Réponse :**

suite au dos 



---

⑥ [8 points] Proposez un algorithme qui, recevant un ensemble et un certificat tel que vous l'avez défini en ⑤, permet de vérifier qu'une instance positive de SSP en est bien une.

Vous **ne** pouvez **pas** utiliser l'algorithme **somme** ici.

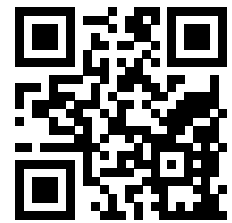
Réponse :

⑦ [3 points] Quelle est la complexité de l'algorithme que vous avez proposé en ⑥? Justifiez votre réponse.

⑧ [3 points] Cette complexité est-elle en contradiction avec l'affirmation que SSP est dans NP? Détaillez votre réponse.

Réponses et justifications :

Ne pas écrire dans cette zone.



## Question 5 – Simulation de tir [23 points]

On cherche à écrire *des parties* d'un programme C++ permettant de simuler le lancer d'un ballon au volley.

Le problème auquel on s'intéresse est donc un problème de simulation, en 2D, d'un objet en chute libre étant donné une vitesse initiale  $v_0$  d'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (voir illustration ci-contre).

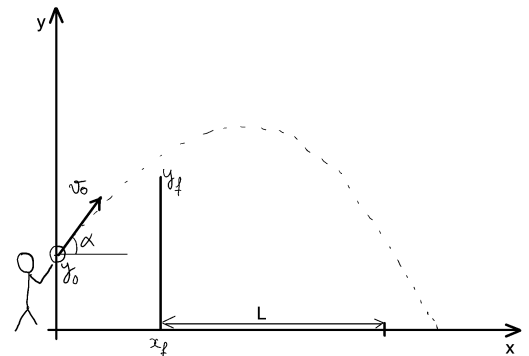
Les données du problème à simuler sont :

- la hauteur  $y_0$  d'où le joueur (de volley) lance le ballon (depuis l'origine des abscisses :  $x_0 = 0$ ) ;
- la vitesse initiale  $v_0$  du ballon ;
- l'angle initial  $\alpha$  ;
- la position  $x_f$  du filet est sa hauteur  $y_f$  ;
- la longueur  $L$  du terrain (depuis le filet).

Les équations des coordonnées  $(x, y)$  du ballon sont :

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y = y_0 - \frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t$$



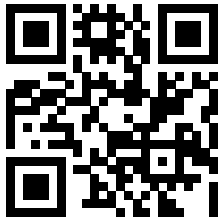
① [2 points] Écrire (en C++) la fonction `hauteur_ballon()` qui prend en entrée  $y_0$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  et un temps  $t$  et qui retourne l'ordonnée  $y$  du ballon au temps  $t$ .

**Réponse :**

② [2 points] Écrire (en C++) la fonction `temps_x()` qui prend en entrée  $v_0$ ,  $\alpha$  et une abscisse  $x$  du ballon, et qui retourne le temps  $t$  auquel  $x$  est atteinte.

**Réponse :**

suite au dos



③ [7 points] Écrire (en C++) la fonction `lancer()` qui prend en entrée  $y_0$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  et un temps  $t$  et qui retourne l'abscisse  $x_{\text{fin}}$  du ballon lorsqu'il touche le sol.

Nous vous demandons pour cela :

- de définir une constante `dt` égale à 0.1 ;
- de calculer **de proche en proche** (tous les `dt`) l'ordonnée  $y$  du ballon à partir du temps donné  $t$  et jusqu'à ce qu'elle soit nulle (le ballon touche le sol) ;
- de retourner son abscisse à ce temps là.

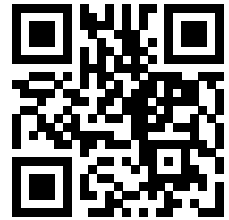
Réponse :

④ [12 points] Écrire (en C++) la fonction `simulation()` qui prend en entrée  $y_0$ , les coordonnées  $x_f$ ,  $y_f$  du filet, et la longueur  $L$  du terrain, et qui :

- demande à l'utilisateur les valeurs  $v_0$  et  $\alpha$  ;  
 $\alpha$  sera demandé en degrés, puis sera converti en radians (multiplié par .017453292517) ;
- calcule le temps  $t_f$  auquel le ballon passe le filet (temps auquel l'abscisse est  $x_f$ ) ;
- calcule la hauteur du ballon à ce temps  $t_f$  ;
- affiche « touche le filet » si cette ordonnée est inférieure à  $y_f$  ;
- et sinon :
  - affiche « passe » ;
  - calcule l'abscisse à laquelle le ballon touche le sol ;
  - affiche « out » si cette abscisse est plus grande que  $x_f + L$ .

Question 5


Anonymisation : #0000  
p. 13



---

Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.

suite au dos 



## Question 6 – C'est pas juste ! [19 points]

Voici un programme C++ visant à maximiser numériquement une fonction :

```
1  #include <iostream>
2  #include <cmath>
3  using namespace std;
4
5  constexpr double pi(3.14159265358979323846);
6  constexpr double epsilon(1e-5);
7
8  double f(double x)
9  { return 5.0 * sin(0.3*pi * x + pi/4.0)
10     - 7.0 * sin(0.4*pi * x + pi/6.0); }
11
12 double df(double x)
13 { return ( f(x+epsilon) - f(x) ) / epsilon; }
14
15 int main()
16 {
17     double a(0);
18     cout >> "Point de départ : ";
19     cin << a;
20
21     constexpr double pas(0.1);
22     double gain(0.0);
23     int nb_iter(0);
24
25     do {
26         const double b(a + pas * df(a));
27         gain = f(b) - f(a);
28         ++nb_iter;
29         cout << "    " << a << " --> " << f(a) << endl;
30     } while ((gain != epsilon) or (nb_iter > 1000));
31
32     cout << "Max : " << f(b) << " en x=" << b << endl;
33
34     return 0;
35 }
```

Mais ce programme comporte plusieurs erreurs de programmation, possiblement de différente nature (syntaxe, déroulement, conception, méthodologie, ...).

Indiquez et **corrigez** toutes les erreurs (directement sur le code ci-dessus).

Expliquez *brièvement* les erreurs/corrections à droite du code ou sur la page ci-contre.

On ôtera 1 point pour toute indication d'une erreur qui n'en est pas une.

Ne pas écrire dans cette zone.



---

**Explications :**

Ne pas écrire dans cette zone.



---

Place supplémentaire pour répondre à n'importe quelle question si nécessaire. Mais  
**VEUILLEZ INDIQUER LE NUMÉRO DE LA QUESTION TRAITÉE.**

Ne pas écrire dans cette zone.