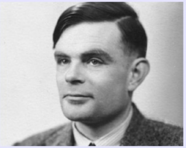
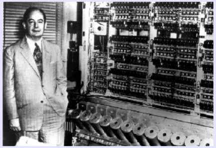
  

Information, Calcul et Communication

Compléments de cours

J.-C. Chappelier

EPFL

Soient

x signal de bande passante f_{max}

x échantillonné tous les mT_e — T_e période d'éch.

$f_e = \frac{1}{T_e}$ fréq. d'éch.

x_I reconstruit comme slide suivante

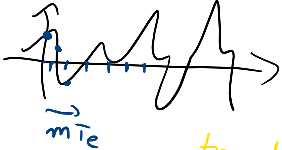
Alors :

- $f_e > 2 f_{max} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad x_I(t) = x(t)$

  $\left(\exists t \in \mathbb{R} \quad x_I(t) \neq x(t) \Rightarrow f_e \leq 2 f_{max} \right)$ contraposée

- $\forall t \in \mathbb{R} \quad x_I(t) = x(t) \Rightarrow f_e \not\geq 2 f_{max}$

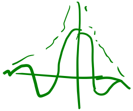
reconstruction :

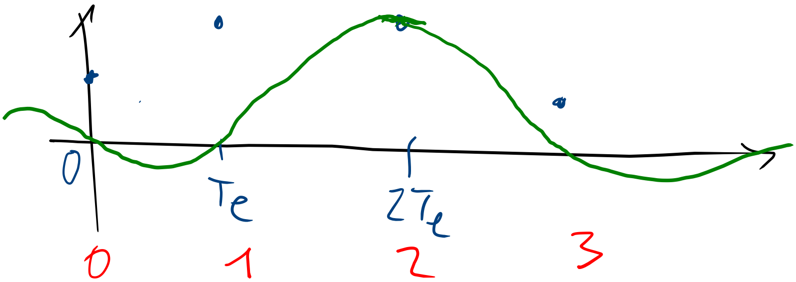


$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

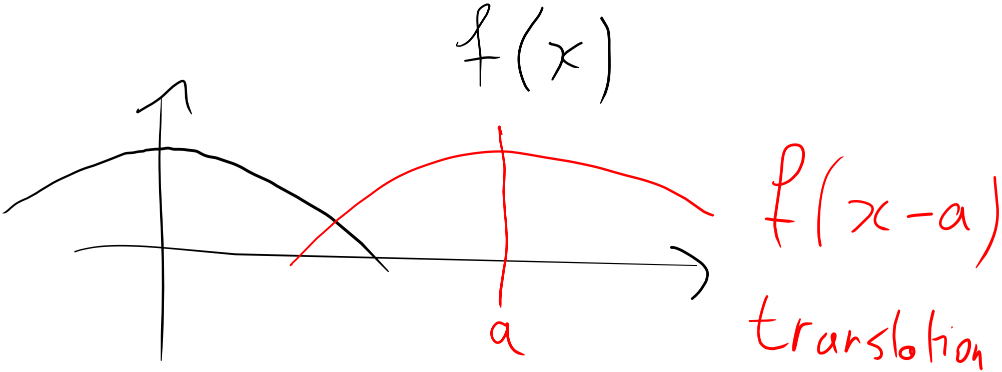
translatio

homothétie





$X(mT_e)$



$$\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right) = \mathrm{sinc}\left(f_e t - m\right)$$

$$P \Rightarrow Q$$

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

Contraposée

$(\neg = \text{négation})$

$$\neg \forall = \exists$$

$$\neg \exists = \forall$$

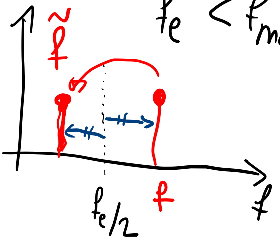
Leçons II.1 et II.2 (th. d'échantillonnage) – Points clés

- formule de reconstruction :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}(f_e t - m)$$

$f_e < f_{max}$

- théorème d'échantillonnage (dit « de Nyquist-Shannon »)
- effet stroboscopique / « repliement de spectre » ($\widetilde{f} = f_e - f$)
- filtrer *avant* d'échantillonner



Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- $X(t)$ un signal de bande passante $f_{\max}$;
- $X(nT_e)$, $(n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonage f_e ;
- $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Alors :

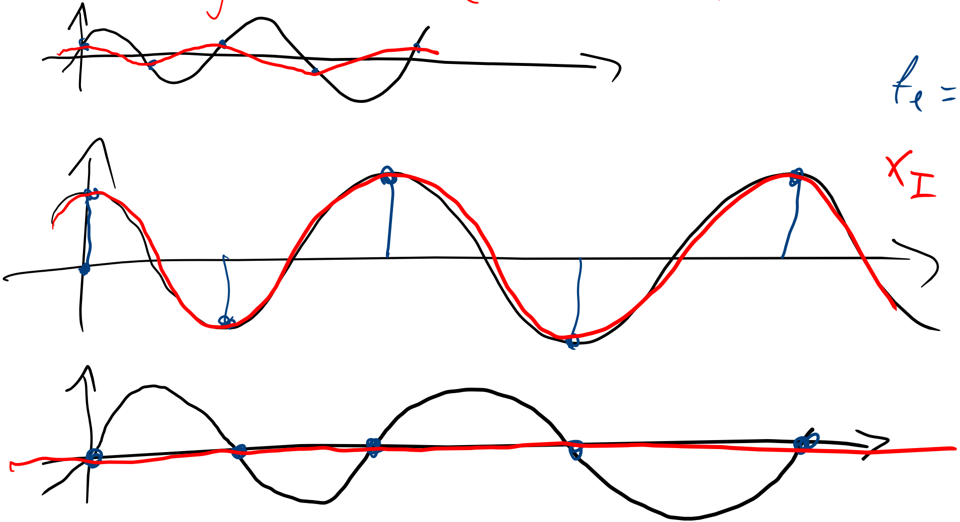
$$\text{Si} \quad f_e > 2 f_{\max} \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et

$$\text{Si} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2 f_{\max}$$

(c.-à-d. Si $f_e < 2 f_{\max}$ alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X_I(t_0) \neq X(t_0)$)

Cas d'égalité : $f_e = 2 f_{max}$



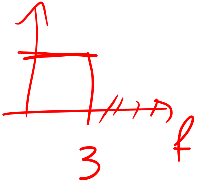
Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

$f_1 = 2$ $\checkmark$ $\cancel{f_2 = 4}$ $f_3 = 1$ $\checkmark$

Que donne le filtrage du signal

$$X(t) = 8\sin(4\pi t) \cancel{- 6\cos(8\pi t)} + 7\cos(2\pi t)$$

par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 3$ Hz ?



$X \xrightarrow{\text{filtré}} \hat{X} \xrightarrow[f_e]{\text{échantill}} \hat{X}(mT_e) \xrightarrow{\text{reconstr.}} X_I$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

$f_e > 2 f_{max}$

$f_{max} < \frac{f_e}{2000}$

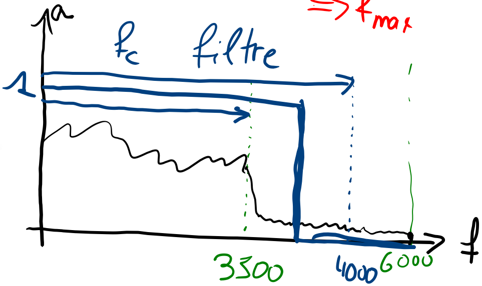
$f_e = 8000$

Un signal de bande passante 6000 Hz, mais ne contenant pas d'information pertinente au dessus de 3500 Hz est échantillonné à 8000 Hz après filtrage par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c.

Pour que toute l'information pertinente reste dans le signal échantillonné :

reconstr. parfaite $\Rightarrow f_{max}$

- **A]** f_c doit être légèrement inférieure à 4000 Hz.
- **B]** f_c doit être légèrement supérieure à 4000 Hz.
- **C]** C'est de toutes façons impossible.
- **D]** f_c doit être légèrement supérieure à 16000 Hz.



$3500 \ll f_{max} < 4000$

↳ du signal filtré

$X_I(t) = \sum_{i=}^{5} \sin(4 i \pi t + \frac{\pi}{12})$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

$\rightarrow f_{max} = f_{100} = 200$

$f_1 = 2$

Le signal

f_c $f_2 = 4$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{100} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

$6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14$ $2\pi(2i)t$ f_c

est échantillonné à une fréquence $f_e = 22$ Hz.

Avant d'être échantillonné, on lui applique un filtre passe-bas idéal de telle sorte que l'on soit sûr d'éviter tout phénomène de « repliement de spectre » (ou « effet stroboscopique »).

Quel signal X_I obtient-on après reconstruction à partir du signal échantillonné ?

$\rightarrow f_e > 2 f_{max}$

$f_e = 22$

f_{max} de qui ? de $\hat{x}$ signal filtré

$\Rightarrow \hat{f}_{max} < \frac{f_e}{2} = 11$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Le signal

$$X(t) = \sum_{i=1}^{100} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

est échantillonné à une fréquence $f_e = 22$ Hz.

Avant d'être échantillonné, on lui applique un filtre passe-bas idéal de telle sorte que l'on soit sûr d'éviter tout phénomène de « repliement de spectre » (ou « effet stroboscopique »).

Quel signal X_l obtient-on après reconstruction à partir du signal échantillonné ?

$$X_l(t) = \sum_{i=1}^{5} \sin(4i\pi t + \frac{\pi}{12})$$

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Soit X le signal défini par :

$$X(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \boxed{Y(mT_e)} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

avec : $f_e = 15$

$$Y(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t) \rightarrow f_{max} = 7$$

$2 \quad 5 \quad 7$

et $T_e = 1/15$.

Quelle est une autre écriture correcte de X (pour tout t) ?

A] 0

B] $Y(0)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right)$

C] $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

D] $3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(14\pi t)$ ✓

$f_e > 2 f_{max}$?

$15 > 2\cdot 7$

oui !!

Leçons II.1 et II.2 – Etudes de cas

Pour un signal $X(t)$ échantillonné à une fréquence f_e, puis reconstruit en un signal $X_I(t)$ (par la formule de reconstruction du cours).

Les affirmations suivantes sont elles vraie ou fausse ?

- Si f_e est trop faible, il est possible d'avoir des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\boxed{X_I(nT_e) \neq X(nT_e)}$.

  ≈ 20 vrais bcp faux

- $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si f_e est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.

  strict VRAI (ou large ? (FAUX))

- La bande passante du signal $X_I(t)$ est égale à celle de $X(t)$, quelque soit f_e utilisée.

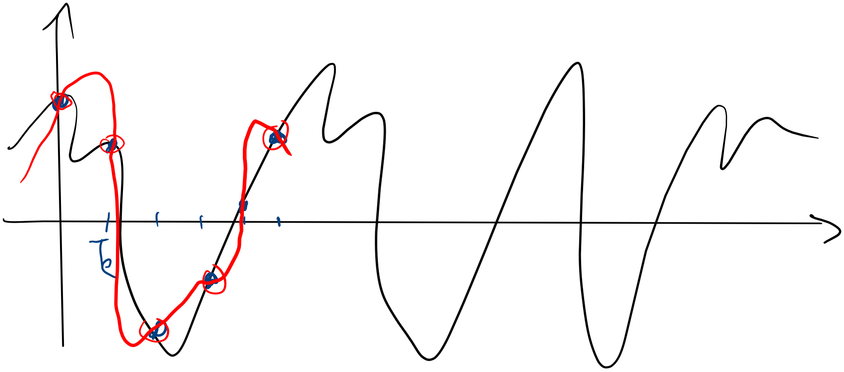
  FAUX

- Si $\boxed{X_I(nT_e) = X(nT_e)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f_e est nécessairement supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.

  tjs vrai => phrase FAUSSE

$x(nT_e)$

x



x_I