Module 8

1. (a) $P(\text{rejet}) = (1-\rho)\rho^K/(1-\rho^{K+1})$, ou encore, avec les valeurs numériques données $P(\text{rejet}) = \pi_5^\star \approx 0.00728$.

   (b) On a
   $$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = 0.6827.$$

   (c) $E[R] = E[N]/\lambda' = 6.88$ secondes.

2. (a) On a une file M/D/1, d'où
   $$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho}\left(1-\frac{\rho}{2}\right) = 0.5655.$$

   (b) $E[R] = E[N]/\lambda = 5.655$ secondes.

3. En multipliant la $n$ième équation de balance détaillée par z^n on trouve
   $$\lambda z^n \pi_n^\star = \mu z^n \pi_{n+1}^\star$$
   En sommant, on obtient successivement
   $$\begin{aligned}
   \sum_{n=0}^{\infty} \lambda z^n \pi_n^\star &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu z^n \pi_{n+1}^\star \\
   \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n^\star &= \mu z^{-1} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^{n+1} \pi_{n+1}^\star - \pi_0^\star \right) \\
   \lambda G_N(z) &= \mu z^{-1} G_N(z) - \mu z^{-1} \pi_0^\star
   \end{aligned}$$
   dont on tire que
   $$G_N(z) = \frac{-\mu\pi_0^\star z^{-1}}{\lambda - \mu z^{-1}} = \frac{\mu\pi_0^\star}{\mu - \lambda z}$$
   Comme $G_N(1) = 1$, on en tire que $\pi_0^\star = 1 - \lambda/\mu$ et dès lors
   $$E[N] = \frac{dG_N}{dz}(z=1) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

4. (a) On a, si $\rho = \lambda/\mu < 1$ et $q \in \mathbb{N}_0$
   $$\begin{aligned}
   P(Q=0) &= 1-\rho^2 \\
   P(Q=q) &= (1-\rho)\rho^{q+1}.
   \end{aligned}$$

   (b) $E[Q] = \rho^2/(1-\rho)$.

   (c) On trouve que pour tout $w \geq 0$,
   $$f_W(w) = (1-\rho)\delta(w) + (1-\rho)\lambda e^{-(\mu-\lambda)w}.$$

(d) On calcule $E[W] = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

5. Pour la file M/M/1, $E_{\mathrm{M/M/1}}[N] = \rho/(1-\rho)$, avec $\rho = \lambda/2\mu' C$. On suppose que les deux lignes partagent le même buffer et que l'ordre de transmission des paquets qui arrivent est FIFO. Pour la file M/M/2, $E_{\mathrm{M/M/2}}[N] = 2\rho/(1-\rho^2)$. Par conséquent,

$$\frac{E_{\mathrm{M/M/2}}[R]}{E_{\mathrm{M/M/1}}[R]} = \frac{E_{\mathrm{M/M/2}}[N]/\lambda}{E_{\mathrm{M/M/1}}[N]/\lambda} = \frac{2}{1+\rho} > 1$$

car $\rho = \lambda/2\mu' C < 1$. Ceci montre que le temps de transmission par 2 lignes de capacités C, partageant le même buffer, est plus long que le temps de transmission par 1 ligne de capacité $2C$, si les temps entre arrivées et de service sont distribués exponentiellement.

6. Le nombre moyen de clients dans le restaurant est $E[N] = 62.5$ clients.

7. (a) On calcule que $E[A(k)^2] = \lambda^2 \sigma_S^2 + \rho^2 + \rho$, en dérivant deux fois $G_A(z)$ et en arrangeant les termes.

   (b) On obtient le résultat voulu en calculant que :

$$\begin{aligned}
E[\hat{N}^2(k+1)] &= E[\hat{N}^2(k)] \\
E[\mathbb{1}^2_{\{\hat{N}(k)\geq 1\}}] &= 1 - \hat{\pi}_0^\star = \rho \\
E[\hat{N}(k)\mathbb{1}_{\{\hat{N}(k)\geq 1\}}] &= E[\hat{N}(k)] \\
E[A(k+1)\hat{N}(k)] &= \rho E[\hat{N}(k)] \\
E[A(k+1)\mathbb{1}_{\{\hat{N}(k)\geq 1\}}] &= \rho^2.
\end{aligned}$$

8. Ici $f_S(s) = \delta(s - 1/\mu)$.

   (a) On en déduit

$$\begin{aligned}
G_A(z) &= \mathcal{L}_A(-\lambda(z-1)) = \int_0^\infty e^{\lambda s(z-1)} \delta(s-1/\mu) ds \\
&= e^{\lambda(z-1)/\mu} \int_0^\infty e^{\lambda(s-1/\mu)(z-1)} \delta(s-1/\mu) ds = e^{\rho(z-1)}
\end{aligned}$$

   d'où

$$G_N(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)e^{\rho(z-1)}}{z - e^{\rho(z-1)}} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - ze^{\rho(1-z)}}.$$

   (b) $\pi_0^\star = 1 - \rho$

   (c) $\pi_1^\star = \frac{dG_N}{dz}(z=0) = \cdots = (1-\rho)(e^\rho - 1)$.

9. La variable aléatoire S décrivant les temps de service est une variable géométrique (de "2ème espèce" selon la terminologie du module 1), de paramètre $p = 0.9$. Les formules de Little et de Pollaczek-Kintchine donnent alors $E[R] = E[N]/\lambda = 1.2857$ msec.

10. (a) Soit $N_{OC}(t)$ le nombre d'appels OC le nombre générés pendant un intervalle de temps de longueur t à l'intérieur de la micro-cellule. Alors

$$P(N_{OC}(t) = n) = P(A(t, L) = n) = \frac{(\lambda L t)^n}{n!}\, e^{-\lambda L t}$$

et $N_{OC}(t)$ est un processus de Poisson (l'hypothèse d'indépendance est assurée par la définition même de $A(t, x)$) de taux $\lambda_{OC} = \lambda L$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N_{HC}(t) = n) = \frac{(\lambda t v/\mu)^n}{n!}\, e^{-(\lambda t v/\mu)}.$$

11. A l'état stationnaire, avec $\rho = \lambda/\mu$

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= \lambda/\mu = \rho \\ R_N(\tau) &= \begin{cases} \rho^2 + \rho(1 - \mu|\tau|) & \text{si} \quad |\tau| \leq 1/\mu \\ \rho^2 & \text{si} \quad |\tau| \geq 1/\mu \end{cases} \end{aligned}$$

12.(a-b) Le diagramme des transitions entre états est représenté à la figure 3. De celui-ci on déduit un ensemble d'équations de balance

$$\begin{aligned} \lambda\pi^\star_{n-1,0} &= \mu\pi^\star_{1,J} && \text{pour } 0 \leq n \leq J-1 && (7) \\ \lambda\pi^\star_{n-1,J} + \mu\pi^\star_{1,J} &= \mu\pi^\star_{n,J} && \text{pour } 2 \leq n \leq J && (8) \\ \lambda\pi^\star_{n-1,J} &= \mu\pi^\star_{n,J} && \text{pour } n \geq J+1 && (9) \end{aligned}$$

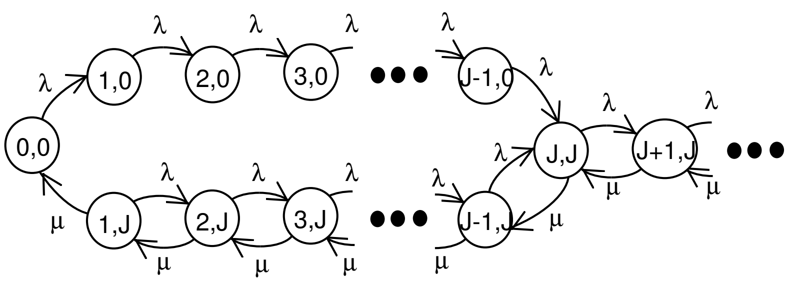

FIGURE 3 – Diagramme des transitions entre états de la question 12. Les états ont deux composantes : la première est le nombre de clients dans le système, la seconde donne l'état 0 ou J le plus récemment atteint.

(c) Soit $\rho = \lambda/\mu$. Les probabilités $\pi^\star_n$ d'avoir n clients dans le système sont

$$\begin{aligned} \pi^\star_n &= \pi^\star_{0,0} = (1-\rho)/J && \text{si } n = 0 \\ \pi^\star_n &= \pi^\star_{n,0} + \pi^\star_{n,J} = (1-\rho^{n+1})/J && \text{si } 1 \leq n \leq J-1 \\ \pi^\star_n &= \pi^\star_{n,J} = \rho^{n-J+1}(1-\rho^J)/J && \text{si } n \geq J. \end{aligned}$$

(d) $E[N] = (J-1)/2 + \rho/(1-\rho)$.

(e) $E[R] = (J-1)/(2\lambda) + 1/(\mu - \lambda)$.

13. Hors matière.

14. Hors matière.

15. Hors matière.

16. Hors matière.

17. Hors matière.

18. Hors matière.

19. Hors matière.

20. Hors matière.

21. Hors matière.