Module 7

1. Pour une chaîne de Markov homogène,

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t_1+t_2) &= P(X(t_1+t_2)=j \mid X(0)=i) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P(X(t_1+t_2)=j \mid X(t_2)=k, X(0)=i)P(X(t_2)=k \mid X(0)=i) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P(X(t_1+t_2)=j \mid X(t_2)=k)P(X(t_2)=k \mid X(0)=i) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P(X(t_1)=j \mid X(0)=k)P(X(t_2)=k \mid X(0)=i) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t_1)p_{kj}(t_2).
\end{aligned}$$

2. En utilisant le fait qu'à tout instant t, $\pi_0(t)+\pi_1(t)=1$, il suffit de résoudre la première des deux équations

$$\begin{bmatrix} \frac{d\pi_0}{dt}(t) & \frac{d\pi_1}{dt}(t) \end{bmatrix} = [\pi_0(t) \quad \pi_1(t)] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

qui s'écrit

$$\frac{d\pi_0}{dt}(t) = \mu - (\lambda+\mu)\pi_0(t).$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'on peut rśoudre de diverses manières. Par exemple, en prenant la transformée de Laplace des deux membres de cette equa diff, on trouve

$$s\mathcal{L}(\pi_0)(s) - \pi_0(0) = \frac{\mu}{s} - (\lambda+\mu)\mathcal{L}(\pi_0)(s)$$

dont on tire

$$\mathcal{L}(\pi_0)(s) = \frac{\mu}{s(s+\lambda+\mu)} + \frac{\pi_0(0)}{s+\lambda+\mu} = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)s} + \frac{\pi_0(0)-\mu/(\lambda+\mu)}{s+\lambda+\mu}$$

et en prenant la transformée de Laplace inverse

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Enfin $\pi_1(t) = 1-\pi_0(t)$.

Pour les probabilités de transition, on utilise la même méthode, en s'aidant du fait que

$$\begin{aligned}
p_{00}(t)+p_{01}(t) &= 1 \\
p_{10}(t)+p_{11}(t) &= 1
\end{aligned}$$

pour résoudre

$$\begin{aligned}\frac{dp_{00}}{dt}(t) &= \mu-(\lambda+\mu)p_{00}(t)\\ \frac{dp_{11}}{dt}(t) &= \lambda-(\lambda+\mu)p_{11}(t).\end{aligned}$$

Les conditions initiales sont $p_{00}(0)=p_{11}(0)=1$. Enfin on obtient $p_{01}(t)=1-p_{00}(t)$ et $p_{10}(t)=1-p_{11}(t)$.

3. (a) On calcule que si $\pi_i(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-1}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_i}{dt}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-1}+e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-2}(i-1)\lambda e^{-\lambda t}\\ &= -\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-1}+e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-2}(i-1)\lambda e^{-\lambda t}\\ &= -i\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-1}+(i-1)\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-2}[e^{-\lambda t}+(1-e^{-\lambda t})]\\ &= -i\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-1}+(i-1)\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{i-2}\\ &= -i\lambda\pi_i(t)+(i-1)\lambda\pi_{i-1}(t).\end{aligned}$$

(b) $E[X(t)]=e^{\lambda t}$.

4. (a) La seule cause de transition possible à partir de l'état 0 est l'arrivée (la naissance) d'un "client" quand le sytème est vide, ce qui se fait avec un taux λ_0, d'où $\nu_0=\lambda_0$. Par contre, il y a deux causes de transition possibles à partir d'un état i : l'arrivée (la naissance) d'un "client", ce qui se produit au bout d'un temps aléatoire distribué exponentiellement avec un taux λ_i, et le départ (la mort) d'un "client", ce qui se produit au bout d'un temps aléatoire distribué exponentiellement avec un taux μ_i. La transition se fait donc au bout d'un temps aléatoire qui est le minimum de ces deux v.a. exponentielles indépendantes de taux respectifs λ_i et μ_i. Comme le minimum de deux v.a. exponentielles indépendantes de taux respectifs λ_i et μ_i est encore une v.a. exponentielle de taux $\lambda_i+\mu_i$, comme on l'a montré à l'exercice 7 du module 5, $\nu_i=\lambda_i+\mu_i$.

(b) En appliquant le théorème des probabilités totales au cas continu

$$\begin{aligned}P(X>Y) &= \int_0^\infty P(X>Y|Y=y)f_Y(y)dy=\int_0^\infty P(X>y|Y=y)f_Y(y)dy\\ &= \int_0^\infty P(X>y)f_Y(y)dy=\int_0^\infty e^{-\lambda_X y}\lambda_Y e^{-\lambda_Y y}dy=\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}.\end{aligned}$$

(c) La seule transition possible à partir de l'état 0 est de passer à l'état 1, d'où $\hat{q}_{0,1}=1$. D'autre part, si $i\in\mathbb{N}_0$, la transition se fera vers l'état $(i+1)$ si le prochain évènement est une arrivée (une naissance) et non un départ (une mort), donc si la v.a. exponentielle de taux λ_i décrivant le temps jusqu'à la prochaine naissance est inférieure à la v.a. exponentielle de taux μ_i décrivant le temps jusqu'à la prochaine mort, ce qui se fait avec une probabilité calculée en b) et qui vaut

$$\hat{q}_{i,i+1}=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}.$$

On déduit enfin $\hat{q}_{i,i-1} = 1 - \hat{q}_{i,i+1}$.

5. On a, si $t_1 \leq t_2$,

$$R_X(t_1,t_2) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)(t_2-t_1)}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\, e^{-(\lambda+\mu)t_1}\right)$$

et vice-versa si $t_1 \geq t_2$. Pour que le processus soit stationnaire, il faut que

$$\pi_1(0) = \pi_1^\star = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Dans ce cas en effet, le processus est même SSS car c'est une chaîne de Markov, pour laquelle stationnarité veut dire stationnarité au sens strict, et avec $\tau = t_1 - t_2$,

$$R_X(\tau) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)|\tau|}\right)\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

En particulier, si $\lambda = \mu$, ces deux dernières expressions deviennent $\pi_1(0) = \pi_1^\star = 1/2$ et

$$R_X(\tau) = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-2\lambda|\tau|}\right),$$

ce qui est bien la solution de l'exercice 9 du module 3.

6. (a) Le diagramme des transitions est donné à la figure 1.

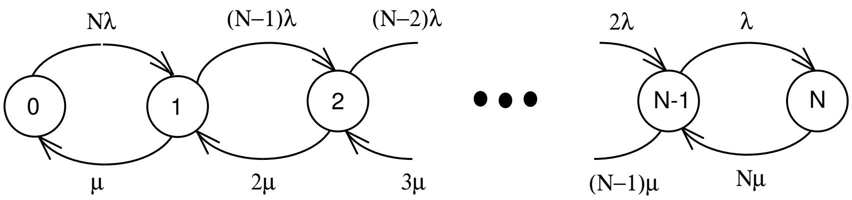

Figure 1 – Diagramme des transitions de l'exo 6

(b) On calcule que

$$\pi_i^\star = C_N^i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-i}.$$

On constate que la loi de probabilité de X est une loi binomiale $Bin\left(N, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. On pouvait s'y attendre : X compte le nombre de locuteurs actifs parmi N locuteurs, chacun d'eux ayant une probabilité $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ d'être actif.

(c) $E[X] = N\lambda/(\lambda+\mu)$.

7. (a) On vérifie que

$$\pi_i(t) = P(X(t)=i) = \frac{1}{i!}\left[(1-e^{-\mu t})\frac{\lambda}{\mu}\right]^i \exp\left[-(1-e^{-\mu t})\frac{\lambda}{\mu}\right].$$

satisfait bien à

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi_0}{dt}(t) &= -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t) \\
\frac{d\pi_i}{dt}(t) &= \lambda\pi_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)\pi_i(t) + (i+1)\mu\pi_{i+1}(t)
\end{aligned}$$

(b) $E[X(t)] = (1 - e^{-\mu t})\lambda/\mu$.

(c) Lorsque $t \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\pi_i(t) &\to \pi_i^\star = \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\, e^{-\lambda/\mu} \\
E[X(t)] &\to \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}$$

8. En posant $\rho = \lambda/\mu$, $\xi = \gamma/\mu$ et

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \rho + \xi - \sqrt{(1+\rho+\xi)^2 - 4\rho}\right)$$

la probabilité de trouver n jobs dans le système (à l'état stationnaire) est

$$\pi_n^\star = (1-\beta)\beta^n.$$

9. Les équations de balance détaillée de la file M/M/s sont

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_{n-1}^\star &= n\mu\pi_n^\star \quad \text{si } 1 \le n \le s-1 && (5) \\
\lambda\pi_{n-1}^\star &= s\mu\pi_n^\star \quad \text{si } n \ge s && (6)
\end{aligned}$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned}
\pi_n^\star &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^\star \quad \text{si } 1 \le n \le s-1 \\
\pi_n^\star &= \frac{1}{s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0^\star \quad \text{si } n \ge s
\end{aligned}$$

La constante de normalisation est par conséquent avec $\lambda/\mu = \rho$,

$$\pi_0^\star = \left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\rho^n + \sum_{n=s}^{\infty}\frac{1}{s!s^{n-s}}\rho^n\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{s^m}\rho^m\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!}\frac{1}{1-\rho/s}\right)^{-1}$$

La probabilité de blocage est la probabilité qu'un appel entrant soit mis en attente, c'est-à-dire avec $\rho = \lambda/\mu$,

$$\begin{aligned}
C(s,\rho) &= \sum_{n=s}^{\infty}\pi_n^\star = \pi_0^\star\sum_{n=s}^{\infty}\frac{1}{s!s^{n-s}}\rho^n = \pi_0^\star\frac{\rho^s}{s!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{s^m}\rho^m = \pi_0^\star\frac{\rho^s}{s!}\frac{1}{1-\rho/s} \\
&= \frac{\rho^s/s!}{(1-\rho/s)\sum_{n=0}^{s-1}\rho^n/n! + \rho^s/s!}
\end{aligned}$$

Pour que la chaîne soit ergodique, il faut que $\lambda < s\mu$.

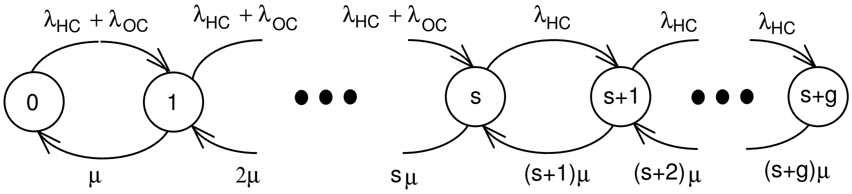

FIGURE 2 – Diagramme des transitions de l'exo 10

10. (a) Le diagramme des transitions est donné à la figure 2)

(b) La probabilité de blocage d'un appel HC est la probabilité qu'un appel HC entrant soit rejeté :

$$P(\text{rejet HC}) = \pi^\star_{s+g} = \frac{1}{(s+g)!}\left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu}\right)^g \left(\frac{\lambda_{HC}+\lambda_{OC}}{\mu}\right)^s \pi^\star_0.$$

avec

$$\pi^\star_0 = \left(\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda_{HC}+\lambda_{OC}}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{s+g}\left(\frac{\lambda_{HC}}{\lambda_{HC}+\lambda_{OC}}\right)^{(n-s)}\left(\frac{\lambda_{HC}+\lambda_{OC}}{\mu}\right)^n\right)^{-1}.$$

(c) La probabilité de blocage d'un appel OC est la probabilité qu'un appel OC entrant soit rejeté, c'est-à-dire avec $\pi^\star_0$ donné ci-dessus,

$$\begin{aligned} P(\text{rejet HC}) &= \sum_{n=s}^{s+g}\pi^\star_n = \sum_{n=s}^{s+g}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu}\right)^{(n-s)}\left(\frac{\lambda_{HC}+\lambda_{OC}}{\mu}\right)^s \pi^\star_0 \\ &= \pi^\star_0\left(\frac{\lambda_{HC}+\lambda_{OC}}{\mu}\right)^s \sum_{m=0}^{g}\frac{1}{(m+s)!}\left(\frac{\lambda_{HC}}{\mu}\right)^m \end{aligned}$$