Module 6

1. Pour que $\{Y(n), n \in \mathbb{N}\}$ soit une chaîne de Markov, il faut que pour tout $y_0, y_1, y_2, \ldots, \in \mathcal{S}$,
$$P(Y(n) = y_0 | Y(n-1) = y_1, Y(n-2) = y_2, \ldots) = P(Y(n) = y_0 | Y(n-1) = y_1).$$
Comme
$$P(Y(n) = 1 \,|\, Y(n-1) = 0, Y(n-2) = 1) = 0 \neq 1/4 = P(Y(n) = 1 \mid Y(n-1) = 0),$$
$\{Y(n), n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas une chaîne de Markov (Plus précisémment, ce n'est pas une chaîne de Markov d'ordre 1).

2. Comme $Y(0) = 0$, $Y(1)$ peut prendre les valeurs 1 et -1, $Y(2)$ peut prendre les valeurs $\alpha y_1 \pm 1$, i.e., $\alpha + 1$, $\alpha - 1$, $-\alpha - 1$ ou $-\alpha + 1$, …, $Y(n)$ peut prendre les valeurs $\alpha y_{n-1} \pm 1$. Posons $y'_n = \alpha y_{n-1} + 1$ et $y"_n = \alpha y_{n-1} - 1$. Alors
$$\begin{aligned} P(Y(n) = y'_n \,|\, Y(n-1) = y_{n-1}) &= 1/2 \\ P(Y(n) = y"_n \,|\, Y(n-1) = y_{n-1}) &= 1/2 \\ P(Y(n) \neq y'_n, y"_n \,|\, Y(n-1) = y_{n-1}) &= 0. \end{aligned}$$
Dans chaque cas $P(Y(n) = y_n \,|\, Y(n-1) = y_{n-1}, \ldots, Y(0) = 0) = P(Y(n) = y_n \,|\, Y(n-1) = y_{n-1})$, et donc $\{Y(n), n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov.

3. Si i communique avec j et si j communique avec k, il existe $m, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{jk}^{(n)} > 0$. Comme pour tout $n + m \in \mathbb{N}$,
$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$$
on a que i est accessible à partir de k.
De même, il existe $m', n' \in \mathbb{N}_0$ tels que $p_{ji}^{(m')} > 0$ et $p_{kj}^{(n')} > 0$. Comme pour tout $n' + m' \in \mathbb{N}$,
$$p_{ki}^{(n'+m')} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{kl}^{(n')} p_{li}^{(m')} \geq p_{kj}^{(n')} p_{ji}^{(m')} > 0.$$
on a que i est accessible à partir de k, et donc ces deux états communiquent.

4. Il faut résoudre cet exercice par récurrence : on vérifie aisément que pour $n = 1$, l'hypothèse est vraie. On suppose ensuite qu'elle est vraie jusqu'en n, et on montre qu'elle l'est encore en $n + 1$ (c'est un simple produit de matrices 2×2).

5. Comme $0 < p < 1$, tous les états communiquent (la chaîne est donc irréductible) et sont récurrents positifs. Enfin la chaîne est apériodique, à cause des deux états 0 et N. Dès lors la distribution stationnaire existe, est unique et est donnée par
$$[\pi_0^\star \;\; \pi_1^\star \;\; \pi_2^\star \;\; \ldots \;\; \pi_N^\star]$$

où, en posant $\rho = p/(1-p)$,

$$\pi_i^\star = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\, \rho^i$$

pour $0 \le i \le N$.

6. (a) On a que $p_{i,i+1} = p$ et que $p_{i,i-1} = 1-p$ pour $i \in [0, N]$ mod$(N+1)$, tandis que tous les autres p_{ij} sont nuls. On a donc bien

$$\sum_{i=0}^{N} p_{ij} = \sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$$

avec $p_{ij} \ge 0$ pour tout $0 \le i, j \le N$ et la matrice est doublement stochastique.

(b) Si le nombre d'états $(N+1)$ est fini, la distribution

$$\pi_i^\star = \frac{1}{N+1}$$

est invariante car elle vérifie les conditions

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} \pi_i^\star &= 1 \\ \sum_{i=0}^{N} \pi_i^\star p_{ij} &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} p_{ij} = \frac{1}{N+1} = \pi_j^\star. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que la somme des p_{ij} le long des colonnes vaut l'unité.
Si $N \to \infty$, tous les $\pi_i^\star \to 0$ et la distribution stationnaire n'existe plus. En fait les états deviennent récurrents nuls.

7. P_1 : La chaîne comprend une seule classe d'états récurrents positifs.

P_2 : Les deux classes $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$ sont chacune formée de deux états récurrents positifs, l'état 5 est transitoire.

8. (a) Si $X(n)$ est le nombre de parapluies disponibles à l'instant n, la distribution stationnaire de $\{X(n), n \in \mathbb{N}^\star\}$ est

$$\begin{aligned} \pi_0^\star &= \frac{1-p}{N+1-p} \\ \pi_i^\star &= \frac{1}{N+1-p} \quad \text{si } 1 \le i \le N \end{aligned}$$

La probabilité cherchée est donc

$$p\pi_0^\star = \frac{p(1-p)}{N+1-p}.$$

(b) La valeur de p qui maximise $p\pi_0^\star$ est

$$p = N + 1 - \sqrt{N^2 + N}.$$

Ici $N = 10$ et $p = 11 - \sqrt{110} > 1/2$. Donc il améliorerait en effet sa situation avec un pays où $p < 1/2$. Mais il l'améliorerait encore davantage en étant moins distrait !

9. Cette chaîne est réversible, et on doit résoudre les équations de balance

$$\begin{aligned} \pi_0^\star &= q\pi_1^\star \\ p\pi_{i-1}^\star &= q\pi_i^\star \qquad 2 \leq i \leq N-1 \\ p\pi_{N-1}^\star &= \pi_N^\star \end{aligned}$$

dont on tire par récurrence que

$$\begin{aligned} \pi_1^\star &= \frac{1}{q}\pi_0^\star \\ \pi_i^\star &= \frac{p}{q}\pi_{i-1}^\star = \dots = \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1}\pi_1^\star = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1}\pi_0^\star \qquad 2 \leq i \leq N-1 \\ \pi_N^\star &= p\pi_{N-1}^\star = \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}\pi_0^\star. \end{aligned}$$

Il reste à déterminer $\pi_0^\star$ par la condition de normalisation

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i^\star = \pi_0^\star \left(1 + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}\right).$$

Si $p \neq 1/2$, la distribution invariante est

$$\begin{aligned} \pi_0^\star &= \frac{(1-2p)(1-p)^{N-1}}{2((1-p)^N - p^N)} \\ \pi_i^\star &= \frac{(1-2p)(1-p)^{N-1}}{2p((1-p)^N - p^N)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^i \qquad 1 \leq i \leq N-1 \\ \pi_N^\star &= \frac{(1-2p)p^{N-1}}{2p((1-p)^N - p^N)}. \end{aligned}$$

tandis que si $p = 1/2 = q$,

$$\begin{aligned} \pi_0^\star &= 1/2N \\ \pi_i^\star &= 1/N \qquad 1 \leq i \leq N-1 \\ \pi_N^\star &= 1/2N. \end{aligned}$$

10. Si $p \neq 1/2$, on a $h_{iN} = \frac{\rho^i - 1}{\rho^N - 1}$ avec $\rho = q/p = (1-p)/p$. Donc

$$\lim_{N\to\infty} h_{iN} = \begin{cases} 1 - \rho^i & \text{si} \quad \rho < 1 (p > 1/2) \\ 0 & \text{si} \quad \rho > 1 (p < 1/2) \end{cases}$$

Si $p = 1/2 = q$, on a $h_{iN} = i/N \to 0$ pour $N \to \infty$.

11. Pour raccourcir les notations, désignons $\mu_i = \mu^H_{i\{0,N\}} = E[H_{\{0,N\}} \mid X(0) = i]$. On calcule que

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{p-q}\left(N\frac{(q/p)^i-1}{(q/p)^N-1} - i\right) & \text{si} \quad p \neq q \\ i(N-i) & \text{si} \quad p = q \end{cases}$$

12. (a) Les probabilités de transitions non nulles sont $p_{ij} = 1/i$ si $0 \leq j < i \leq N$.

    (b) L'espérance du nombre de coups que doit jouer le golfeur pour mettre la balle dans le trou est

    $$\mu^H_{N0} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

    Remarquons que pour $N \to \infty$, $\mu^H_{N0} \to \infty$: la probabilité d'atteindre 0 vaut toujours l'unité, mais l'espérance du temps d'atteinte est infinie.

13. (a) On a (en détaillant toutes les étapes) :

    $$\begin{aligned} f_0 &= P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(0) = 0) \\ &= P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}_0 \mid X(1) = 1) && \text{(car } p_{01} = 1) \\ &= P(X(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = 1) && \text{(car chaîne homogène)} \\ &= 1 - P(X(n) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \mid X(0) = 1) \\ &= 1 - P(Y(n) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \mid Y(0) = 1) \\ &= P(Y(n) = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} \mid Y(0) = 1) \\ &= h_{10} \end{aligned}$$

    (b) La chaîne est irréductible, donc tous les états sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. Comme $h_{10} = 1$ si $p \leq 1/2$, $f_0 = 1$ si $p \leq 1/2$ et les états sont alors récurrents. Comme $h_{10} = (1-p)/p < 1$ si $p > 1/2$, $f_0 < 1$ si $p > 1/2$ et les états sont alors transitoires.

    (c) Si $p < 1/2$, la distribution invariante (ou encore stationnaire) de cette chaîne est

    $$\begin{aligned} \pi^\star_0 &= \frac{1-2p}{2(1-p)} \\ \pi^\star_i &= \frac{1-2p}{2p(1-p)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \qquad i \geq 1. \end{aligned}$$

    Tous les états sont donc récurrents positifs. Si $p \to 1/2$, toutes les probabilités ci-dessus tendent vers zéro : il n'y a plus de distribution stationnaire. Tous les états sont dans ce cas récurrents nuls.

14. La probabilité cherchée est

$$h_{10} = \begin{cases} p/(1-p) = 1/\mu_C & \text{si} \quad p < 1/2 \quad (\mu_C > 1) \\ 1 & \text{si} \quad p \geq 1/2 \quad (\mu_C \leq 1) \end{cases}$$

15. $E[X(n)] = \mu_C^n$. Si $\mu_C < 1$, $\lim_{n\to\infty} E[X(n)] = 0$, ce qui est attendu puisque la probabilité que la population disparaisse en un temps fini h_{10} vaut 1.

    Notons que lorsque $\mu_C = 1$, $E[X(n)] = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Néanmoins $h_{10} = 1$. En fait lorsque n devient très grand la $(n+1)$ième génération contient un très grand nombre d'individus avec une très faible probabilité, et est éteinte avec grande probabilité, de sorte que l'espérance reste égale à 1.

16. Pour tout $0 \leq i \leq N$,
$$\pi_i^\star = C_N^i \, \frac{1}{2^N}.$$

17. (a) $P(T_0 = 1 \mid X(0) = 0) = 1 - p$ tandis que pour $m \geq 2$, $P(T_0 = m \mid X(0) = 0) = p(1-q)^{m-2}q$.

    (b) On trouve
$$E[T_0 \mid X(0) = 0] = \frac{p+q}{q} = \frac{1}{\pi_0^\star}.$$