Module 5

1. En utilisant la fonction génératrice $G_N(z;t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$, et en sommant toutes les équations de Kolmogorov (1) et (2) multipliées par z^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut mettre ces dernières sous la forme
$$\frac{dG_N(z;t)}{dt} = \lambda(z-1)G_N(z;t)$$
avec la condition initiale $G_N(z;0) = 1$. On retrouve alors tous les résultats connus.

2. Supposons $t_1 \leq t_2$. Alors
$$\begin{aligned}
R_N(t_1,t_2) &= E[N(t_1)N(t_2)] = E[N(t_1)(N(t_1) + (N(t_2) - N(t_1)))] \\
&= E[N^2(t_1)] + E[N(t_1)(N(t_2) - N(t_1))] \\
&= E[N^2(t_1)] + E[N(t_1)]E[(N(t_2) - N(t_1))] \\
&= E[N^2(t_1)] + E[N(t_1)]E[(N(t_2 - t_1))] \\
&= \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1(\lambda(t_2 - t_1)) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1
\end{aligned}$$
On répète le même raisonnement dans le cas où $t_1 \leq t_2$, et on établit la propriété.

3. Première méthode, en utilisant le théorème des probabilités totales et la formule du binôme :
$$\begin{aligned}
P(N(t)=n) &= P(N_1(t) + N_2(t) = n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(N_2(t) = n-k | N_1(t) = k) P(N_1(t) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(N_2(t) = n-k) P(N_1(t) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$
Deuxième méthode, en utilisant les fonctions génératrices :
$$\begin{aligned}
G_N(z;t) &= E[z^{N(t)}] = E[z^{N_1(t)+N_2(t)}] = E[z^{N_1(t)}]\, E[z^{N_2(t)}] = G_{N_1}(z;t) G_{N_2}(z;t) \\
&= e^{\lambda_1 t(z-1)}\, e^{\lambda_2 t(z-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(z-1)}
\end{aligned}$$
qui est la fonction génératrice de probabilité d'une v.a. de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$, d'où
$$P(N(t) = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!}.$$
Donc l'hypothèse H2' définissant (Définition 5.2) un processus de Poisson est vérifiée. L'hypothèse H1' l'est également car le processus $N_1(t) + N_2(t)$ est à accroissements indépendants dès lors que chaque processus N_1 et N_2 l'est.

4. (a) En dérivant

$$F_{S(n)}(s;n) = P(S(n) \leq s) = P(N(s) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda s} \, \frac{(\lambda s)^k}{k!}$$

par rapport à s on obtient

$$\begin{aligned} f_{S(n)}(s;n) &= -\lambda e^{-\lambda s} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + e^{-\lambda s} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k\lambda^k s^{k-1}}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda s} \left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda s} \left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) = \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

(b) La solution la plus simple est d'utiliser les fonctions caractéristiques d'une v.a. exponentielle. En effet $S(n) = T(0) + T(1) + \ldots + T(n-1)$, et la fonction caractéristique de la somme de n v.a. exponentielles indépendantes est le produit de leur fonctions caractéristiques, c'est-à-dire

$$\Phi_{S(n)}(\omega;n) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega} \right)^n$$

ce qui montre que $S(n)$ est une v.a. Gamma de paramètres (λ, n), dont la densité de probabilité est

$$f_{S(n)}(s;n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega s} \Phi_{S(n)}(\omega;n) d\omega = \frac{\lambda(\lambda s)^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!}.$$

5. $P(N(t') = 1 | N(t) = 1) = t'/t$.

6. (a) $E[T | T \geq a] = 1 + a$.

(b) $E[T | T \geq a] = 1 + a/2$. Supposons que T représente l'arrivée d'un événement, dont on sait qu'il ne se produira qu'après a secondes. Dans les deux cas, l'espérance a priori de T est de 1 seconde. Plaçons-nous à l'instant a. On remarque que dans le cas d'une v.a. exponentielle, le fait de savoir qu'il s'est déjà écoulé a secondes avant l'arrivée ne change en rien l'espérance du temps d'attente résiduel, qui reste d'une seconde à partir de cet instant : c'est dû à l'absence de mémoire de la v.a. exponentielle. Par contre, dans le cas uniforme, le fait de savoir que l'arrivée aura lieu après a secondes réduit l'incertitude sur le temps qu'il reste à attendre : l'arrivée se fait plus imminente ; l'espérance du temps d'attente résiduel n'est plus que de $1 + a/2 - a = 1 - a/2$ secondes, ce qui est dans tous les cas inférieur à 1.

7. T est distribuée exponentiellement, avec une intensité (paramètre) $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

8. Soit T la v.a. décrivant le temps écoulé entre l'arrivée du premier étudiant et le départ du second. Alors
$$E[T] = 35 + 30\exp(-1/6) \approx 60.39 \text{ min.}$$

9. On trouve de manière similaire à l'exercice précédent
$$E[T] = 3 + 2\exp(-1/2) \approx 4.21 \text{ sec.}$$

10. (a) $E[\hat{N}(t)|N(t)=n] = \sum_{m=1}^{n} E[A_m] = n\mu_A$, d'où
$$\begin{aligned} E[\hat{N}(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\hat{N}(t)|N(t)=n]P(N(t)=n) = \mu_A \sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n) \\ &= \mu_A E[N(t)] = \mu_A \lambda t. \end{aligned}$$

    (b) $E[\hat{N}^2(t)] = \sigma_A^2 \lambda t + \mu_A^2(\lambda t + \lambda^2 t^2)$.

    (c) Supposons $t_1 \leq t_2$. Alors
$$\begin{aligned} R_{\hat{N}}(t_1, t_2) &= E[\hat{N}(t_1)(\hat{N}(t_1) + (\hat{N}(t_2) - \hat{N}(t_1)))] \\ &= E[\hat{N}^2(t_1)] + E[\hat{N}(t_1)(\hat{N}(t_2) - \hat{N}(t_1))] \\ &= E[\hat{N}^2(t_1)] + E[\hat{N}(t_1)]E[(\hat{N}(t_2) - \hat{N}(t_1))] \\ &= E[\hat{N}^2(t_1)] + E[\hat{N}(t_1)]E[(\hat{N}(t_2 - t_1))] \\ &= \mu_A^2\lambda^2 t_1^2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda t_1 + \mu_A \lambda t_1(\mu_A \lambda(t_2 - t_1)) \\ &= \mu_A^2 \lambda^2 t_1 t_2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda t_1 \end{aligned}$$

    On répète le même raisonnement dans le cas où $t_1 \leq t_2$, et on établit la propriété.

11. On remarque tout d'abord que
$$\hat{X}_\delta(t) = \frac{d\hat{X}_{1_{\mathbb{R}_0^+}}}{dt}(t) = \frac{d\hat{N}}{dt}(t),$$
et le lemme 1 entraîne que
$$\begin{aligned} \mu_{\hat{X}_\delta}(t) &= E[\hat{X}_\delta(t)] = \frac{d}{dt} E[\hat{N}(t)] = \mu_A \lambda \\ R_{\hat{X}_\delta}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 R_{\hat{N}}}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(\mu_A^2 \lambda^2 t_1 t_2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda \min(t_1, t_2)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\mu_A^2 \lambda^2 t_1 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda 1_{\mathbb{R}_0^+}(t_1 - t_2)\right) = \mu_A^2 \lambda^2 + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda \delta(t_1 - t_2), \end{aligned}$$
ce qui montre que le processus $\hat{X}_\delta(t)$ est WSS (On s'en serait douté). Par conséquent il possède une densité spectrale de puissance qui vaut
$$S_{\hat{X}_\delta}(f) = \mu_A^2 \lambda^2 \delta(f) + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda.$$

Le processus $\hat{X}_h(t)$, avec une forme générale de pulse $h(t)$ (on suppose seulement que qu'elle est absolument intégrable), est obtenu en convoluant le processus $\hat{X}_\delta(t)$ avec $h(t)$. On peut appliquer le théorème 2 du module 3 pour obtenir

$$S_{\hat{X}_h}(f) = |H(f)|^2 S_{\hat{X}_\delta}(f) = \mu_A^2 \lambda^2 H^2(0)\delta(f) + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda |H(f)|^2.$$

En prenant la transformée de Fourier inverse on trouve

$$R_{\hat{X}_h}(\tau) = \mu_A^2 \lambda^2 H^2(0) + (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\lambda \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 e^{2\pi j f \tau} df.$$

De même, $\mu_{\hat{X}_h} = \mu_A \lambda H(0)$, tandis que

$$\sigma^2_{\hat{X}_h} = R_{\hat{X}_h}(0) - \mu^2_{\hat{X}_h} = \lambda(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df.$$

12. (a) $E[X(t)] = \lambda T$.
    (b) On a
    $$R_X(\tau) = \begin{cases} \lambda^2 T^2 + \lambda(T - |\tau|) & \text{si} \quad |\tau| \le T \\ \lambda^2 T^2 & \text{si} \quad |\tau| \ge T \end{cases}$$
    (c) Oui.
    (d) $P(X(t) = n) = e^{-\lambda T} (\lambda T)^n / n!$.
    (e) Oui.
    (f) Oui.
13. La limite quantique est
    $$SNR_{PINquant} = \frac{3}{4} \frac{P_s}{h\nu} \frac{w_d}{v}.$$
14. $P_e = e^{-E_b/h\nu}/2$.
    (a) $\mu_A = 2$.
    (b) $\mu_A = 8$.
15. (a) La probabilité cherchée est $P(X > x) = e^{-\lambda \pi x^2}$.
    (b) $E[X] = 1/(2\sqrt{\lambda})$.