

Module 4

1. (a) $a_1 = -\alpha$. La variance du bruit blanc $U(n)$ est donc $\sigma^2(1 - \alpha^2)$.
- (b) Factorisons $\hat{S}_X(z) = \sigma^2(1 - \alpha^2)\hat{B}(z)\hat{B}(z^{-1})$, avec

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

En développant $\hat{B}(z)$ en série, on trouve

$$\hat{B}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^{-k},$$

ce qui est bien la fonction de transfert d'un filtre MA d'ordre ∞ avec les coefficients $b_k = \alpha^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- (c) Oui, car $C_X(k) = R_X(k) - 0 = \sigma^2 \alpha^{|k|}$ tend vers zéro quand $k \rightarrow \infty$.
2. (a) On a

$$S_Y(f) = \sigma^2(1 - \alpha^2) \frac{(1 + \beta^2 + 2\beta \cos(2\pi f))}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi f)}.$$

- (b) $\beta = -\alpha$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$R_X(k) = \begin{cases} \sigma_U^2 \sum_{l=0}^{m-|k|} b_l b_{l+|k|} & \text{for } |k| \leq m \\ 0 & \text{for } |k| > m \end{cases}$$

4. (a) On calcule $E[\hat{R}'_X(k)] = R_X(k)$ et $E[\hat{R}''_X(k)] = (1 - |k|/m)R_X(k)$.
- (b) On calcule

$$\begin{aligned} \text{VAR}[\hat{R}'_X(k)] &= E[(\hat{R}'_X(k) - R_X(k))^2] \\ &= \frac{1}{(m - |k|)^2} \sum_{n=|k|+1}^m \sum_{p=|k|+1}^m \left(R_X^2(n-p) + R_X(n-p+k)R_X(n-p-k) \right). \end{aligned}$$

On pose ensuite $l = n - p$ et $q = n + p$ pour passer d'une double somme à une simple somme. Comme $|k| + 1 \leq n, p \leq m$, on a $-m + |k| + 1 \leq l \leq m - |k| - 1$, ce passage nécessite de regarder pour chaque valeur possible prise par l entre ces deux limites, les valeurs que n, p et finalement q peuvent prendre.

- (c) Le premier estimateur n'est pas biaisé au contraire du second, mais la variance du second est toujours plus petite que celle du premier, et tend vers 0 lorsque le nombre d'échantillons $m \rightarrow \infty$ même si $k \rightarrow m$ au contraire de la variance du premier. Par exemple, si $|k| = m - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \text{VAR}[\hat{R}'_X(k)] &= R_X^2(0) + R_X(k)R_X(-k) = R_X^2(0) + R_X^2(k) \\ \text{VAR}[\hat{R}''_X(k)] &= \frac{1}{m^2} \left(R_X^2(0) + R_X^2(k) \right). \end{aligned}$$

Enfin, si \hat{A} est un estimateur de a , de moyenne $\mu_{\hat{A}}$ et de variance $\sigma_{\hat{A}}^2$, on montre de manière générale que l'erreur quadratique moyenne entre \hat{A} et a est

$$\begin{aligned}\varepsilon &= E[(\hat{A} - a)^2] = E[((\hat{A} - \mu_{\hat{A}}) + (\mu_{\hat{A}} - a))^2] \\ &= E[(\hat{A} - \mu_{\hat{A}})^2] + 2E[\hat{A} - \mu_{\hat{A}}](\mu_{\hat{A}} - a) + (\mu_{\hat{A}} - a)^2 = \sigma_{\hat{A}}^2 + (\mu_{\hat{A}} - a)^2\end{aligned}$$

Ici on a donc

$$\begin{aligned}\varepsilon'(k) &= VAR[\hat{R}'_X(k)] \\ \varepsilon''(k) &= VAR[\hat{R}''_X(k)] + \frac{k^2}{m^2}R_X^2(k).\end{aligned}$$

La différence entre les deux erreurs quadratiques devient d'autant plus importante si $|k|$ prend de grandes valeurs. Par exemple, si $|k| = m - 1$, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon'(k) &= R_X^2(0) + R_X^2(k) \\ \varepsilon''(k) &= \frac{1}{m^2}R_X^2(0) + \frac{(m-1)^2 + 1}{m^2}R_X^2(k).\end{aligned}$$

Pour de grandes valeurs de k et de m , $R_X^2(k)$ a une faible valeur pour un grand nombre de processus, et donc $\varepsilon''(k)$ est petite, mais pas $\varepsilon'(k)$.

5. (a) $X_2(n)$ et $X_3(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont WSS, mais pas $X_1(n)$. En effet, on calcule que les moyennes des trois processus sont nulles, et que pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}R_{X_1}(n_1, n_2) &= \frac{1}{2}E[A^2](\cos(2\pi f(n_1 - n_2)) - \cos(2\pi f(n_1 + n_2) + 2\varphi)) \neq R_{X_1}(n_1 - n_2) \\ R_{X_2}(n_1, n_2) &= \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f(n_1 - n_2)) \\ R_{X_3}(n_1, n_2) &= \frac{a^2}{2}\bar{\delta}(n_1 - n_2)\end{aligned}$$

- (b) On trouve, avec $|x_2| < a$ et $|x_3| < a$,

$$\begin{aligned}f_{X_1(n)}(x_1; n) &= \begin{cases} 1/2|\sin(2\pi fn + \varphi)| & \text{si } |x_1| \leq |\sin(2\pi fn + \varphi)| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ f_{X_2(n)}(x_2; n) &= \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x_2^2}} \\ f_{X_3(n)}(x_3; n) &= \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x_3^2}}.\end{aligned}$$

- (c) On trouve

$$\begin{aligned}E[X_1^2(n)X_1(m)] &= 0 \\ E[X_2^2(n)X_2(m)] &= 0 \\ E[X_3^2(n)X_3(m)] &= \frac{a^3}{4}\bar{\delta}(2n - m)\sin(\varphi).\end{aligned}$$

(d) Les processus $\{X_1(n), n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{X_3(n), n \in \mathbb{N}^*\}$ ne sont pas SSS. $\{X_2(n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est SSS.

6. $h(k) = R_{DX}(k)/\sigma^2$, avec $k \in \mathbb{N}$.

7. On trouve

$$H(f) = \frac{S_S(f)}{S_S(f) + S_N(f)} = \frac{(1 - \alpha^2)\sigma_S^2}{(1 - \alpha^2)\sigma_S^2 + (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi f))\sigma_N^2}.$$

8. On calcule

$$\begin{aligned} R_{eX}(k) &= E[e(n)X(n-k)] = E\left[\left(D(n) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)X(n-l)\right)X(n-k)\right] \\ &= E[D(n)X(n-k)] - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)E[X(n-l)X(n-k)] \\ &= R_{DX}(k) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)R_X(k-l) = 0. \end{aligned}$$

9. (a) La réponse impulsionnelle du filtre de Wiener est

$$h(n) = (-1)^n \mathbb{1}_{\{n \geq 0\}} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

(b) Non.

(c) $\{e(n), n \in \mathbb{Z}\} \equiv 0$ et $\varepsilon = 0$.

(d) Oui.