# Module 3

1. $R_X(t,t-\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) + fraca^22E[\cos(2\pi f_0(2t-\tau)+2\Phi)]$. Le second terme dans la dernière égalité dépend de la loi de $\Phi$. Par exemple, si $\Phi\tilde{u}$niform$[0,2\pi]$,
$$R_X(t,t-\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau).$$

2. Voir cours

3. On a
$$R_X(t,t-\tau) = R_X(\tau) = \begin{cases} 1/3 - |\tau|/(12T) & \text{si } |\tau| < T \\ 1/4 & \text{sinon.} \end{cases}$$
et
$$S_X(f) = \frac{1}{4}\,\delta(f) + \frac{T}{12}\left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\delta(f) + \frac{T}{12}\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$

4. (a) $R_Y(t,t-\tau) = R_X(\tau)\cos(\omega_0\tau)$.
   (b) Oui, car $E[Y(t)] = 0$ (la moyenne de $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ est constante) et $R_Y(t,t-\tau) = R_Y(\tau)$ (la fonction d'auto-corrélation de $\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$ ne dépend que de l'écart entre les deux instants auxquels elle est évaluée).
   (c) Non, il suffit par exemple que $R_{X_1X_2}(t,t-\tau) = R_{X_1X_2}(\tau)$ (i.e., que les deux processus $X_1$ et $X_2$ soient conjointement stationnaires au sens large) et que $R_{X_1X_2}(\tau) = -R_{X_1X_2}(-\tau)$ (i.e., que $R_{X_1X_2}(\tau)$ soit une fonction impaire de $\tau$).
   (d) $S_Y(f) = \frac{1}{2}\left(S_X(f-\frac{\omega_0}{2\pi}) + S_X(f+\frac{\omega_0}{2\pi})\right)$.
   (e) $f_Y(y;t) = (1/\sqrt{2\pi R_X(0)})\,\exp(-y^2/(2R_X(0)))$.
   (f) Comme $Y(t)$ est un processus gaussien et qu'on a montré en a qu'il est WSS, il est aussi SSS.
   (g) $R_Z(\tau) = R_X(\tau)\,\cos(\omega_0\tau) + \beta^2\left(R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau)\,\cos^2(\omega_0\tau)\right)$.

5. (a) La moyenne du processus est constante, valant $E[X(t)] = E[A]E[\sin(2\pi f_0 t+\Phi)] = 0$ ,et sa fonction d'auto-corrélation ne dépend que de la différence entre les deux temps auxquels elle est évaluée, car elle vaut
$$\begin{aligned} R_X(t,t-\tau) &= E[A^2]E[\sin(2\pi f_0 t+\Phi)\sin(2\pi f_0(t-\tau)+\Phi)] \\ &= (a_1^2p + a_2^2(1-p))(\cos(2\pi f_0\tau) + E[\cos(2\pi f_0(2t+\tau)+\Phi)])/2 \\ &= (a_1^2p + a_2^2(1-p))\cos(2\pi f_0\tau)/2. \end{aligned}$$
   (b) Comme $C_X(\tau) = (a_1^2p + a_2^2(1-p))\cos(2\pi f_0\tau)/2$, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}[< X(t) >_T] &= \frac{2}{T}\int_0^T C_X(\tau)(1-\frac{\tau}{T})d\tau \\ &= \frac{(a_1^2p + a_2^2(1-p))}{T}\int_0^T \cos(2\pi f_0\tau)(1-\frac{\tau}{T})d\tau \\ &= \frac{a_1^2p + a_2^2(1-p)}{2}\left(\frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0 T}\right)^2 = \frac{a_1^2p + a_2^2(1-p)}{2}\mathrm{sinc}^2(f_0T) \end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 lorsque $T \to \infty$, ce qui montre que le processus est ergodique par rapport à sa moyenne.

(c) Posons $Z(t) = X^2(t)$. La moyenne de $Z$ coïncide avec la variance de $X$. Dès lors, vérifier que $X$ est ergodique par rapport à sa variance revient à vérifier que $Z$ est ergodique par rapport à sa moyenne. Calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}
C_Z(\tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)] - E[Z(t)]E[Z(t-\tau)] \\
&= E[X^2(t)X^2(t-\tau)] - E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)] \\
&= E[A^4]E[\sin^2(2\pi f_0 t + \Phi)\sin^2(2\pi f_0(t-\tau)+\Phi)] - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{4} E\left[(\cos(2\pi f_0\tau) - \cos(2\pi f_0(2t-\tau)+2\Phi))^2\right] - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{4} E\left[\cos^2(2\pi f_0\tau) - 2\cos(2\pi f_0\tau)\cos(2\pi f_0(2t-\tau)+2\Phi)\right] \\
&\quad + \frac{E[A^4]}{4} E\left[\cos^2(2\pi f_0(2t-\tau)+2\Phi)\right] - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{4} \left\{ \frac{1+\cos(4\pi f_0\tau)}{2} - 2\cos(2\pi f_0\tau)E[\cos(2\pi f_0(2t-\tau)+2\Phi)] \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1+E[\cos(4\pi f_0(2t-\tau)+2\Phi)]}{2} \right\} - R_X^2(0) \\
&= \frac{E[A^4]}{8}\{1+\cos(4\pi f_0\tau) - 0 + 1 - 0\} - R_X^2(0) \\
&= \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{8}(2+\cos(4\pi f_0\tau)) - \frac{(a_1^2 p + a_2^2(1-p))^2}{4} \\
&= \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)}{4} + \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{8}\cos(4\pi f_0\tau)
\end{aligned}$$

et ensuite (pfiou...)

$$\begin{aligned}
VAR[< Z(t) >_T] &= \frac{2}{T}\int_0^T C_Z(\tau)(1-\frac{\tau}{T})d\tau \\
&= \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)}{2T}\int_0^T (1-\frac{\tau}{T})d\tau \\
&\quad + \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{4T}\int_0^T \cos(4\pi f_0\tau)(1-\frac{\tau}{T})d\tau \\
&= \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p)}{4} + \frac{a_1^4 p + a_2^4(1-p)}{8}\mathrm{sinc}^2(2f_0T)
\end{aligned}$$

qui tend vers $Var[A^2/2] = (a_1^2 - a_2^2)^2 p(1-p))/4$ lorsque $T \to \infty$. Comme $0 < p < 1$ et $a_1^2 - a_2^2 \neq 0$, cette valeur n'est pas nulle, et le processus $Z$ n'est pas ergodique par rapport à sa moyenne (et donc $X$ n'est pas ergodique par rapport à sa variance).

(d) Si $|a_1| = |a_2|$, la limite précédente devient nulle. Remarquez qu'on s'attendait bien à ces conclusions avant d'avoir fait tous ces calculs !

6. Calculons $R_{XY}(\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t-\tau)] = E[X(t)\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)X(t-\tau-r)dr] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E[X(t)X(t-\tau-r)]dr = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)R_X(\tau+r)dr, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)R_X(\tau+r)e^{-j2\pi f\tau}d\tau dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)R_X(u)e^{-j2\pi f(u-r)}dudr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)e^{j2\pi fr}dr \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)e^{-j2\pi fu}du = H^\star(f)S_X(f). \end{aligned}$$

La démonstration de $S_{YX}(f) = H(f)S_X(f)$ est similaire.

7. Le fonction d'auto-corrélation du processus $Y$ de sortie est

$$R_Y(\tau) = N_0 B\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} = N_0 B\mathrm{sinc}(2B\tau).$$

8. $R_Y(\tau) = A^2\cos(\omega_0\tau)\,(1-\cos(\omega_0 d))$.

9. (a) $E[X(t)] = 1/2$.
   (b) $R_X(\tau) = \left(1+e^{-2\lambda|\tau|}\right)/4$
   (c) $C_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}/4$.
   (d) $S_X(f) = \frac{1}{4}\,\delta(f) + \frac{1}{4}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+\pi^2 f^2}$.
   (e) Oui.

10. (a) $P(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0) = 1/4$.
   (b) Une matrice possible est

$$A = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et la densité de probabilité jointe de $Y_1$ et $Y_2$ devient

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{(1-\rho)y_1^2+(1+\rho)y_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right).$$

Le domaine du plan $(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0)$ est transformé en $(Y_1 \geq 0, -Y_1 \leq Y_2 \leq Y_1)$.

(c) Une matrice possible est

$$B = \frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{1+\rho} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{1-\rho} \end{bmatrix}.$$

La densité de probabilité jointe de $Z_1$ et $Z_2$ est

$$f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right).$$

Le domaine du plan $(Y_1 \geq 0, -Y_1 \leq Y_2 \leq Y_1)$ est transformé en

$$\left(Z_1 \geq 0, -Z_1\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \leq Z_2 \leq Z_1\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}\right).$$

(d) Après un changement en coordonnées polaires on trouve

$$P(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0) = \frac{1}{\pi} \text{ Arctg } \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}.$$

11. (a) A partir de l'exercice 10, on a

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= a^2 \left(\frac{4}{\pi} \text{ Arctg } \sqrt{\frac{R_X(0) + R_X(\tau)}{R_X(0) - R_X(\tau)}} - 1\right) && (2) \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \text{ Arcsin } \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} && (3) \end{aligned}$$

La dernière simplification (3) est obtenue à partir de (2) par des manipulations trigonométriques simples mais fastidieuses.

(b) Cette propriété découle directement du fait que $X$ est un processus gaussien tel que $\mu_X = \mu_Y = 0$ et $R_X(\tau) = R_X(0)\sin((\pi/2a^2)R_Y(\tau))$. Par conséquent, la seule connaissance de la moyenne de $Y$, de la fonction d'auto-corrélation de $Y$ et de la variance de $X$ permet de retrouver la moyenne et la fonction d'auto-corrélation de $X$, et de là, toutes les distributions jointes de n'importe quel ordre, car on sait que $X$ est un processus gaussien.

12. (a) Comme $X(t) = X(t+T)$ on a directement

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = E[X(t+T)X(t-\tau)] = R_X(\tau+T).$$

(b) Soit $Y(t) = X(t+T) - X(t)$. Alors $\mu_Y = E[Y(t)] = 0$ et

$$\sigma_Y^2 = E[(X(t+T) - X(t))^2] = R_X(0) - 2R_X(T) + R_X(0) = 0$$

de sorte que l'inégalité de Tchebytcheff entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X(t+T) - X(t)| \geq \varepsilon) = P(|Y(t) - \mu_Y| \geq \varepsilon) = 0.$$

13. D'après l'ex. 12, $Y(t)$ est périodique de période $2\pi/\omega$ vu que $X(t)$ l'est aussi. On peut donc se restreindre au calcul de $R_Y(\tau)$ pour $0 \leq \tau < 2\pi/\omega$, et on calcule que dans ce cas

$$R_Y(\tau) = a^2 \left(4P(X(t) \geq 0, X(t-\tau) \geq 0) - 1\right) = a^2 \left(2\left|1 - \frac{\omega\tau}{\pi}\right| - 1\right)$$

tandis que pour $2k\pi/\omega \leq \tau < 2(k+1)\pi/\omega$,

$$R_Y(\tau) = R_Y\left(\tau - \frac{2k\pi}{\omega}\right)$$

14. Comme $H(f) = 1/(1 + 2\pi j RCf)$,

$$S_{V_{out}}(f) = \frac{N_0}{2(1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2)}$$

dont la transformée de Fourier inverse est

$$R_{V_{out}}(\tau) = (N_0/4RC)\exp(-|\tau|/RC).$$

15. Appelons $X'$ et $Y'$ les processus à la sortie des deux filtres soumis aux entrées respectives $X$ et $Y$. Comme $X$ et $Y$ sont indépendants, $X'$ et $Y'$ le sont aussi. En supposant que leur moyenne est nulle, on a donc

$$R_Z(\tau) = R_{X'}(\tau) + R_{X'Y'}(\tau) + R_{Y'X'}(\tau) + R_{Y'}(\tau) = R_{X'}(\tau) + R_{Y'}(\tau)$$

d'où

$$S_Z(f) = S_{X'}(f) + S_{Y'}(f) = |H_{XZ}(f)|^2 S_X(f) + |H_{YZ}(f)|^2 S_Y(f).$$

Remarquons que l'hypothèse d'indépendance de $X$ et $Y$ n'est pas nécessaire, on peut la remplacer par l'hypothèse de non corrélation.

16. (a) $K = 2\sqrt{a/N_0} - a$.
    (b) $K > 0$ - Cette partie nécessite des notions de stabilité des systèmes linéaires, qui sont hors matière (voir cours COM-502).

17. (a) oui, le processus est WSS.
    (b) oui, le processus est SSS.

18. (a) La probabilité d'erreur reste inchangée si $p \neq 0$, avec le seuil $\gamma$ fixé a priori à la valeur 0 :

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \tag{4}$$

    Remarquons toutefois que ce seuil $\gamma = 0$ n'est plus optimal : à moins que $p = 1/2$, il existe des valeurs de $\gamma$ qui auraient amené une valeur plus faible de $P_e$.

    (b) La valeur la plus élevée de $P_e$ étant atteinte pour $p = 1/2$, comme montré ci-dessus, on peut toujours garantir cette valeur quel que soit $p$], en prenant $\gamma = 0$.

(c) Pour obtenir une probabilité d'erreur inférieure à $10^{-6}$, il faut que $E_b/N_0$ soit supérieur à environ 10.5 dB. Comme il était à environ 7 dB pour une probabilité d'erreur de $10^{-3}$, il faut trouver 3.5 dB. Doubler $T$ revient à augmenter $E_b/N_0$ de $10 \log 2 \approx 3dB$, ce qui n'est pas suffisant. Par contre, doubler $a$ revient à augmenter $E_b/N_0$ de $10 \log 4 \approx 6dB$, ce qui est largement suffisant.