

Solutions succinctes des exercices

Solutions... sous réserves de typos et d'erreurs de ma part.

Module 1

1. Comme les évènements A_i , $1 \leq i \leq n$, forment une partition de Ω , ils sont disjoints et donc

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) \\ &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i). \end{aligned}$$

2. En remplaçant $P(B)$ par son expression à la suite du théorème des probabilités totales à la dernière égalité,

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j)P(A_j)}.$$

3. $\mu_X = E[X] = \frac{1-p}{p} (1 - (1-p)^n).$

4. Comme $\{X > t + T\} \cap \{X > t\} = \{X > t + T\}$,

$$P(X > t + T | X > t) = \frac{P(X > t + T)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T} = P(X > T).$$

5. Si X est $\text{Bin}(n, p)$ avec $\lambda = np$, alors

$$G_X(z) = \left(1 - \frac{\lambda(1-z)}{n}\right)^n$$

qui tend vers $\exp(\lambda(z-1))$, la fonction génératrice d'une v.a. Poisson(λ), lorsque $n \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$ avec $np = \lambda > 0$

6. Comme X est $\text{geo}(p)$, on calcule que, avec $|z| < 1/(1-p)$,

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \frac{p}{1 - (1-p)z} \\ \mu_X &= \frac{1-p}{p} \\ \sigma_X^2 &= \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

7. Comme X est $\text{expo}(\lambda)$, on calcule que

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega) &= \frac{\lambda}{\lambda - j\omega} \\ \mu_X &= \frac{1}{\lambda} \\ \sigma_X^2 &= \frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

8. (a) En isolant l'intégrale définie sur \mathbb{R} d'une densité gaussienne $N(m, s)$ avec $m = \mu + j\omega\sigma^2$, $s = \sigma$ dans l'expression de $\Phi_X(\omega)$, on trouve

$$\Phi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

(b) Avec $\mu = 0$,

$$\begin{aligned}E[X^3] &= 0 \\ E[X^4] &= 3\sigma^4.\end{aligned}$$

(c) $\mu_Y = a\mu_X + b$, $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma_X} \exp\left(-\frac{(x - a\mu_X - b)^2}{2a^2\sigma_X^2}\right).$$

9. La densité de probabilité $f_Y(y)$ est

$$f_Y(y) = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_{\{|y| < 1\}} + \delta(|y| - 1) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } |y| < 1 \\ \frac{1}{4}\delta(|y| - 1) & \text{si } |y| = 1 \end{cases}$$

où $\mathbb{1}_A$ est l'indicatrice de évènement A .

10. Le domaine S_Y de la v.a $Y = X^2$ est \mathbb{R}^+ et sa densité de probabilité

$$f_Y(y) = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}.$$

Y est une v.a. Chi-carré à un degré de liberté.

11. La densité de probabilité de Y est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

si $y \in [-1, 1]$ et $f_Y(y) = 0$ sinon. Enfin, $\mu_Y = E[Y] = 0$ et $\sigma_Y^2 = 1/2$.

12. Comme $P(X = k)$ est non croissant en $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) &= \sum_{n=0}^k nP(X = n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} nP(X = n) \\
 &\geq \sum_{n=0}^k nP(X = n) + 0 \\
 &\geq \sum_{n=0}^k nP(X = k) = P(X = k) \sum_{n=0}^k n = P(X = k) \frac{k(k+1)}{2} \\
 &\geq P(X = k) \frac{k^2}{2}
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire que $P(X = k) \leq 2E[X]/k^2$

13. L'inégalité de Markov entraîne que si $Y \geq 0$ et $a > 0$

$$P(Y > a) \leq E[Y]/a$$

Pour s fixé, posons $X = \frac{1}{s} \ln Y$ et $x = \frac{1}{s} \ln a$. Dès lors $Y = e^{sX}$ et $a = e^{sx}$ et l'inégalité de Markov devient

$$P(e^{sX} > e^{sx}) \leq E[e^{sX}]/e^{sx}$$

Comme $P(e^{sX} > e^{sx}) = P(X > x)$ et $E[e^{sX}] = \hat{\Phi}_X(s)$ cette inégalité peut s'écrire pour tout s

$$P(X > x) \leq e^{-sx} \hat{\Phi}_X(s)$$

et porte le nom d'inégalité de Chernoff.

14. Pour $X \sim \text{expo}(\lambda)$,

$$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Module 2

- (a) $P(X = 0) = \sum_{i=1}^n p_i^2$.
(b) Pour $1 \leq j \leq n - 1$,

$$P(X = j) = 2 \sum_{i=1}^{n-j} p_i p_{i+j}.$$

Pour (c) et (d), les formules suivantes sont utiles :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} i &= \frac{(n-1)n}{2} \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^3 &= \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \end{aligned}$$

(c) $\mu_X = (n^2 - 1)/(3n)$.

(d)

$$\sigma_X^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 2)/(18n^2).$$

- (a) Pour que $\int_D f_{XY}(x, y) dx dy = 1$, il faut que $k = 2/\pi$.
(b) Si $|x| \leq 1$

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

et sinon $f_X(x) = 0$ sinon ; et si $0 \leq y \leq 1$

$$f_Y(y) = \frac{4\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

et sinon $f_Y(y) = 0$.

- (c) Si $|x| \leq 1$ et si $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, alors $(x, y) \in D$ et

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et sinon $f_{Y|X}(y|x) = 0$.

- (a) Pour que $\int_D f_{XY}(x, y) dx dy = 1$, il faut que $k = 1$.
(b) Si $|x| \leq 1$,

$$f_X(x) = 1 - |x|$$

et sinon $f_X(x) = 0$ sinon ; et si $0 \leq y \leq 1$

$$f_Y(y) = 2(1-y)$$

et sinon $f_Y(y) = 0$.

(c) Si $|x| \leq 1$ et si $0 \leq y \leq 1 - |x|$, alors $(x, y) \in D$ et

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1 - |x|},$$

et sinon $f_{Y|X}(y|x) = 0$.

4. (a) $f_{R\Theta}(r, \theta) = (r/2\pi) \exp(-r^2/2)$ si $r \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) Les densités marginales de R et Θ sont, respectivement, pour $r \in \mathbb{R}^+$

$$f_R(r) = r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

et pour $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi},$$

ce qui montre que

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = f_R(r) \cdot f_\Theta(\theta)$$

et donc que R et Θ sont deux v.a. indépendantes.

(c) $f_R(r) = r \exp(-r^2/2)$ si $r \in \mathbb{R}^+$, et $f_R(r) = 0$ sinon.

(d) $a = \sqrt{2 \ln 2}$.

5. Il faut prendre

$$\begin{aligned} a^* &= \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2} \\ b^* &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}. \end{aligned}$$

6. On calcule $\mu_{S_n} = n\mu$ et $\sigma_{S_n}^2 = (n + 2(n - 1)\rho)\sigma^2$.

7. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $((X - \mu_X) + \lambda(Y - \mu_Y))^2 \geq 0$ et donc on prenant les espérances et en développant,

$$\sigma_X^2 + 2\lambda COV(X, Y) + \lambda^2 \sigma_Y^2 \geq 0$$

ce qui n'est possible que si le trinôme du second degré dans le membre de gauche de cette inégalité n'a pas deux racines réelles distinctes, ce qui n'est possible que le réalisant de ce trinôme du second degré est non positif et entraîne donc que

$$|COV(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

8. Comme vu au cours, elles sont orthogonales, non corrélées et dépendantes.

9. On a

$$(X_n - a)^2 = (X_n - a_n + a_n - a)^2 \leq 2(X_n - a_n)^2 + 2(a_n - a)^2$$

d'où en prenant les espérances,

$$E[(X_n - a)^2] \leq 2E[(X_n - a_n)^2] + 2(a_n - a)^2$$

et ensuite les limites

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - a)^2] \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - a_n)^2] + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a)^2 = 0.$$

10. $f_{Z|X}(z|x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-(z-x)^2/2).$

11. (a) $P(\Theta_n \geq k) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n.$

(b) $P(\Theta_n = k) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n ..$

12. (a) En marginalisant X , on trouve après quelques calculs

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}$$

(b)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2} \left[x - \left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y) \right) \right]^2}$$

(c) A partir du résultat en b) on a directement

$$E[X|Y = y] = \mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

(d) A partir du résultat en b) on a directement

$$VAR[X|Y = y] = \sigma_X^2(1 - \rho^2)$$

13. Comme les v.a. X_i sont i.i.d,

$$E \left[\frac{S_m}{S_n} \right] = \frac{m}{n}.$$

14. (a) $P(X = n) = 2^{-(n+1)}.$

(b) $E[X] = 1.$

(c) $Var[X] = 2.$

15. (a) Comme X_1, \dots, X_n sont i.i.d,

$$P(\text{“Record au temps } n\text{”}) = \frac{1}{n}$$

(b) $E[\text{“nombre de records au temps } n\text{”}] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

16. On trouve

$$\rho(X, Y) = \frac{COV[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

N.B. Si $a = 0$, ρ n'est pas défini.

17. On trouve

$$f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 3} e^{-\frac{1}{6}(y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_2y_3)}.$$

Remarquons que Y_1 est indépendante de Y_2 et Y_3 , mais que Y_2 et Y_3 ne sont pas indépendantes car on peut écrire l'expression précédente comme

$$f_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\sqrt{3}}\right)^2} \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{3}(y_2^2 + y_3^2 - y_2y_3)}$$

18. (a) On trouve

$$f_{UV}(u, v) = \frac{\lambda(\lambda u)^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda u} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta) \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

(b) Comme le premier facteur ci-dessus est une densité de probabilité d'une v.a. $G(\lambda, \alpha+\beta)$, on a écrit $f_{UV}(u, v)$ comme le produit d'une fonction ne dépendant que de u par une autre ne dépendant que de v . De plus, chacune est normalisée pour être une densité de probabilité, et $f_{UV}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$ implique que U et V sont indépendantes.

(c) $U \sim G(\lambda, \alpha+\beta)$

19. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|X_n - X| \geq \varepsilon$ si et seulement si $(X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2$,

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2)$$

et l'inégalité de Markov implique que

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2}.$$

En prenant la limite pour $n \rightarrow \infty$ dans l'équation précédente, la convergence en moyenne quadratique de $\{X_n\}$ implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2} = 0,$$

et donc que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, ce qui établit la convergence en probabilité de $\{X_n\}$.

Le contraire n'est pas vrai : la suite de v.a $\{X_n\}_{n \geq 1}$ avec

$$\begin{aligned} X_n &= \sqrt{n} \quad \text{avec probabilité } 1/n \\ &= 0 \quad \text{avec probabilité } 1 - 1/n. \end{aligned} \tag{1}$$

ne converge pas en moyenne quadratique vers 0 car $E[X_n^2] = 1$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - 0)^2] = 1 \neq 0,$$

mais converge en probabilité vers 0 car pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

20. (\Leftarrow) On vérifie tout d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} &\iff |X_n|(1 + \varepsilon) \geq \varepsilon(1 + |X_n|) \\ &\iff |X_n| \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Markov,

$$P(|X_n| \geq \varepsilon) = P\left(\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) \leq E\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right] \Big/ \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) \rightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$.

(\Rightarrow) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|X_n|/(1 + |X_n|) \leq 1$ et $|X_n|/(1 + |X_n|) \leq \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ si et seulement si $|X_n| \leq \varepsilon$, le théorème des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned} E\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right] &= E\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \mid |X_n| < \varepsilon\right] P(|X_n| < \varepsilon) + E\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \mid |X_n| \geq \varepsilon\right] P(|X_n| \geq \varepsilon) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} P(|X_n| < \varepsilon) + 1 \cdot P(|X_n| \geq \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{1 + \varepsilon} P(|X_n| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$, et qu'on peut prendre $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on le souhaite, la dernière égalité ci-dessus implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right] = 0.$$