Modèles stochastiques pour les communications : test

Section d'ingénieurs en systèmes de communication, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 7 pages. Toutes les questions ont une et une seule réponse. Cocher celle qui convient. Notation :

— Réponse correcte = +1 point
— Réponse fausse = −0.5 point
— Réponse "Je ne sais pas" ou absence de réponse = 0 point

Toutes les variables aléatoires (abrégées par v.a.) et processus stochastiques des questions qui suivent sont à valeurs réelles. L'abréviation i.i.d. signifie indépendant(es) et identiquement distribué(es). L'abréviation WSS signifie stationnaire au sens large. L'abréviation SSS signifie stationnaire au sens strict.

Total : 20 points

Question 1 : Soit $X(t)$ un processus stochastique de moyenne nulle ($\mu = \mathbb{E}[X(t)] = 0$) et de variance unité ($\sigma^2 = \mathbb{E}[X(t)^2] = 1$). Laquelle des fonctions suivantes pourraît être la densité spectrale $S_X(f)$ de $X(t)$?

☐ $S_X(f) = \frac{1}{1+2\pi jf}$.

☐ $S_X(f) = 1$.

☒ $S_X(f) = \delta(f)$.

☐ Je ne sais pas.

Question 2 : Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a. gaussiennes i.i.d. à partir de laquelle on construit la suite de v.a. $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $Y_1 = X_1$ et $Y_n = X_n + X_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Alors $\{Y(n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est

☒ une suite de v.a. gaussiennes mais pas nécessairement indépendantes

☐ une suite de v.a. indépendantes mais pas nécessairement gaussiennes

☐ une suite de v.a. gaussiennes et indépendantes.

☐ Je ne sais pas.

Question 3 : Une firme produit plusieurs milliers d'ordinateurs chaque jour, dont un petit nombre est défectueux. On a mesuré qu'en moyenne il y a 10 ordinateurs défectueux produits par jour. La directrice de la firme vous demande une estimation conservatrice de la probabilité p qu'un jour il y ait plus de 100 ordinateurs défectueux qui soient produits. Quelle est la plus petite borne supérieure $\overline{p} \geq p$ que vous pouvez lui garantir ?

- ☐ $\overline{p} = 9/10$.
- ☐ $\overline{p} = 9/1000$.
- ☒ $\overline{p} = 1/10$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 4 : Soient X_i, $\{1 \leq i \leq n\}$, un ensemble de n v.a. indépendantes et distribuées comme une v.a. X, i.e., telles que $\Phi_{X_i}(\omega) = \Phi_X(\omega)$ où $\Phi_X(\omega)$ est la fonction caractéristique de X. Quelle est la fonction caractéristique de la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} X_i$ des v.a. $\{X_i\}_{i=1}^{n}$?

- ☐ $\Phi_X(\omega)$.
- ☐ $\frac{1}{n}\Big(\Phi_X(\omega)\Big)^n$.
- ☒ $\Big(\Phi_X(\frac{\omega}{n})\Big)^n$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 5 : La fonction caractéristique d'une v.a. X est donnée par $\phi_X(\omega) = \frac{2}{2-j\omega}$. Que vaut $E[X]$?

- ☐ 2.
- ☐ -1.
- ☒ 1/2.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 6 : Nous considérons deux paires de v.a. gaussiennes multivariées (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2), dont les courbes de niveau de la densité de probabilité jointe sont données dans la Figure 1. Quelle relation peut-on déduire entre les coéfficients de corrélation de ces deux paires ?

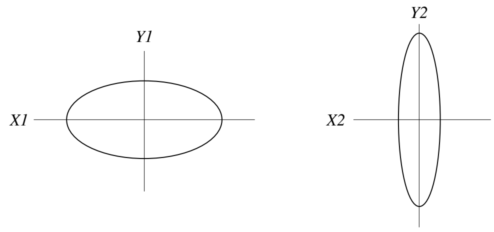

FIGURE 1 – Lignes de niveau de paires gaussiennes (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) de la question 6.

☐ $\rho_{X_1Y_1} > \rho_{X_2Y_2}$.

☐ $\rho_{X_1Y_1} < \rho_{X_2Y_2}$.

☒ $\rho_{X_1Y_1} = \rho_{X_2Y_2}$.

☐ Je ne sais pas.

Question 7 : Vous pensez souffrir d'une maladie rare, dont une personne sur 10'000 souffre en moyenne. On vous propose de faire un test, dont le résultat est correct à 99% (c'est-à-dire qu'une fois sur 100, le test indiquera que vous êtes malade alors que vous êtes en parfaite santé, ou au contraire que vous n'avez rien alors que vous souffrez de la maladie). Vous décidez de faire le test. Sachant que le résultat du test est positif (il indique que vous souffrez de la maladie), quelle est la probabilité que vous soyez vraiment malade ?

Hint : Soient A l'événement correspondant au cas où vous êtes malade, et B l'événement correspondant à un test donnant un résultat positif. Sachant que $P(A) = \frac{1}{10\,000}$ et que $P(B \mid \bar{A}) = P(\bar{B} \mid A) = \frac{1}{100}$, on vous demande de calculer la probabilité $P(A \mid B)$.

☒ Plus petite que 0.01.

☐ Supérieure à 0.99.

☐ Égale à 0.90.

☐ Je ne sais pas.

Question 8 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stochastique stationnaire au sens large, dont la moyenne est $\mu_X = \mathbb{E}[X(t)]$. Soit $T > 0$ une constante déterministe à partir de laquelle on construit la variable aléatoire

$$Y_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt.$$

Si

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[(Y_T - \mu_X)^2\right] = 0,$$

alors on peut affirmer que

☒ le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est ergodique par rapport à sa moyenne.

☐ la fonction d'auto-covariance $C_X(\tau)$ tend vers 0 pour $\tau \to \infty$

☐ le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire au sens strict.

☐ Je ne sais pas.

Question 9 : Soient X et Y deux v.a. dont la densité de probabilité jointe est notée $f_{XY}(x, y)$. Dans quel cas ces deux v.a. sont-elles statistiquement dépendantes ?

☐ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

☐ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x, y < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

☒ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

☐ Je ne sais pas.

Question 10 : Soit X une v.a. distribuée uniformément sur $[0, 1]$ et $Y = g(X)$, où

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f_X(x)$ est la densité de probabilité de X et $f_Y(y)$ est la densité de probabilité de Y, laquelle des propositions suivantes est toujours vraie ?

☒ $f_Y(\frac{3}{4}) = \frac{1}{3}$.

☐ $f_Y(\frac{3}{4}) = 3$.

☐ $f_Y(\frac{3}{4}) = 1$.

☐ Je ne sais pas.

Question 11 : Soient X et Y deux v.a. gaussiennes indépendantes et soit $Z = (X + Y)^2$. Laquelle des trois propriétés suivantes est toujours vraie ?

☐ Z est une v.a gaussienne.

☒ Z n'est pas une v.a gaussienne.

☐ On n'a pas assez d'information pour déterminer si Z est, ou n'est pas, une v.a gaussienne.

☐ Je ne sais pas.

Question 12 : Soient X, Y et Z trois v.a. de moyenne nulle ($\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = 0$), telles que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ] = 0$. Laquelle des trois propriétés suivantes est toujours vraie ?

☐ On a toujours $\mathbb{E}[XYZ] \neq 0$.

☐ On a toujours $\mathbb{E}[XYZ] = 0$.

☒ On peut avoir $\mathbb{E}[XYZ] = 0$ ou $\mathbb{E}[XYZ] \neq 0$.

☐ Je ne sais pas.

Question 13 : Une v.a. binomiale de paramètres n et p est la somme de n v.a. Bernoulli indépendantes de moyenne p. Laquelle des formules suivantes donne sa fonction génératrice de prbabilité ?

☐ $G(z) = ((1-p)z + p(1-z))^n$.

☐ $G(z) = ((1-p)z + p)^n$.

☒ $G(z) = ((1-p) + pz)^n$.

☐ Je ne sais pas.

Question 14 : Dans un jeu, vous tirez aléatoirement des numéros parmi l'ensemble des 100 numéros de 1 à 100, chaque numéro tiré étant remis en place avant de faire le tirage suivant. Quelle est la probabilité que le numéro 1 figure parmi les nombres qui ont été tirés au bout de 50 tirages ?

☐ $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{50}$.

☐ $\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{100}$.

☒ $1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{50}$.

☐ Je ne sais pas.

Question 15 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stochastique stationnaire au sens large (WSS), dont la fonction d'auto-corrélation $R_X(\cdot)$ s'annule en un certain $s \in \mathbb{R}$: $R_X(s) = 0$. Laquelle des affirmations suivantes est toujours vraie ?

- ☐ $X(2)$ et $X(2+s)$ sont indépendantes.
- ☐ Si $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $X(2)$ et $X(2+s)$ sont indépendantes.
- ☒ Même si $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on n'a pas assez d'information pour déterminer si $X(2)$ et $X(2+s)$ sont indépendants ou non.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 16 : Que vaut le coefficient de corrélation entre une v.a. X (de moyenne et variance finies) et la v.a. Y donnée par $Y = X/2 + 3$?

- ☐ 2
- ☒ 1
- ☐ 1/2
- ☐ Je ne sais pas.

Question 17 : Un joueur peu expérimenté lance une fléchette ("dart" en anglais) sur une cible circulaire de rayon r. La position atteinte par la fléchette est uniformément distribuée sur la cible. Le joueur obtient un score de $r - X$, où X est la distance du centre de la cible à la position atteinte par la flèche. Quel est le score moyen du joueur ?

- ☐ $\pi r^2/2$.
- ☒ $r/3$.
- ☐ $r/2$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 18 : Soit X une v.a. continue sur le domaine $\mathcal{S}$, dont la moyenne $\mathbb{E}[X]$ est dénotée par μ. La médiane de X est définie comme la valeur m telle que $\mathbb{P}(X < m) = \mathbb{P}(X > m)$. Pour laquelle des trois distributions suivantes est-il possible que $m \neq \mu$?

- ☒ X suit une distribution exponentielle sur $\mathcal{S} = \mathbb{R}^+$.
- ☐ X suit une distribution uniforme sur un intervalle $\mathcal{S} = [a, b]$ avec $a < b \in \mathbb{R}$.
- ☐ X suit une distribution gaussienne sur $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
- ☐ Je ne sais pas.

Question 19 : Soit X une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$. Que vaut $\mathbb{E}[X \mid X \geq 2]$?

- [ ] $\mathbb{E}[X \mid X \geq 2] = 2$.
- [ ] $\mathbb{E}[X \mid X \geq 2] = 3$.
- [x] $\mathbb{E}[X \mid X \geq 2] = 4$.
- [ ] Je ne sais pas.

Question 20 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus de moyenne nulle dont la fonction d'autocorrélation est $R_X(t, t-\tau) = \exp(-|\tau|)$ pour tout $t, \tau \in \mathbb{R}$, et soit A une v.a continue uniformément distribuée dans $[0, 1]$, indépendante de $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, à partir desquelles on construit le processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ donné par $Y(t) = A + X(t)$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

- [ ] $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas stationnaire au sens large ni ergodique par rapport à sa moyenne.
- [ ] $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire au sens large et ergodique par rapport à sa moyenne.
- [x] $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire au sens large mais n'est pas ergodique par rapport à sa moyenne.
- [ ] Je ne sais pas.