

# Module 1: Variables aléatoires

Modèles stochastiques  
pour les communications

Prof. Matthias Grossglauser  
Prof. Patrick Thiran

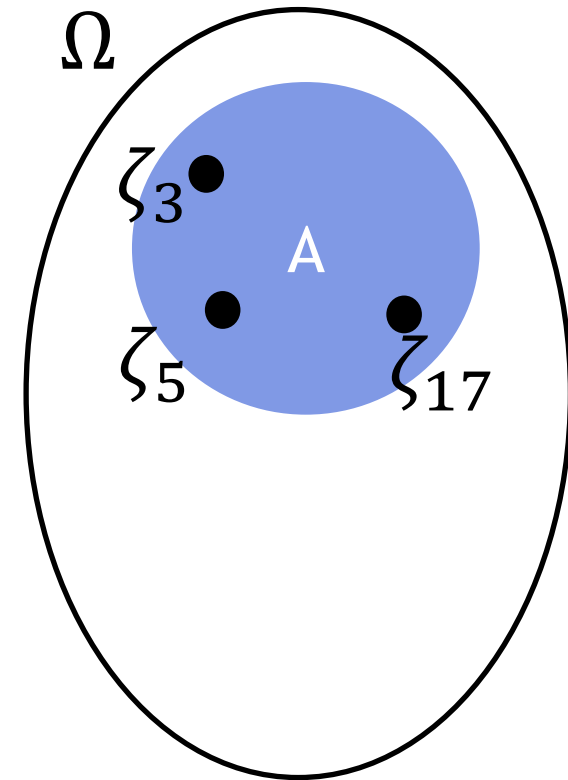
LCA-I&C



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Les axiomes de probabilité

- $\zeta_i$ : résultat d'une expérience
- $A = \{\zeta_3, \zeta_5, \zeta_{17}\}$ : évènement
- $\Omega = \{\text{tous les } \zeta_i\}$ : évènement certain
- $\emptyset = \{\}$ : évènement impossible
- Probabilité:
  - $P(A)$ : probabilité de l'évènement  $A$
  - $P(A) \geq 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - Si  $A_1, A_2, \dots$  tel que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , alors
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

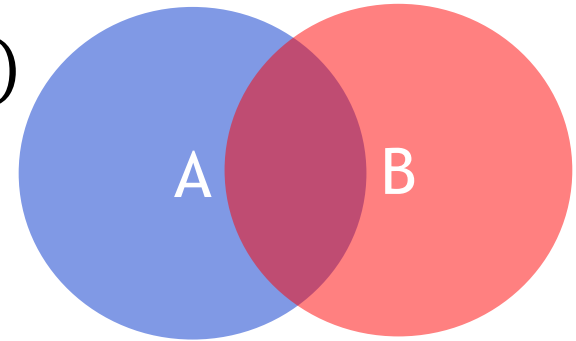


# Corollaires

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 
  - Dém:
    - $\Omega = A \cup \bar{A} \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$
    - $A \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
- $P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

**Dém:**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$
- $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
- $B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$
- $\Rightarrow P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$
- $\Rightarrow P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) =$   
 $(P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) + P(A \cap B)$   
 $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



# Probabilité conditionnelle

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- Propriétés importantes:

- Théorème des probabilités totales:

- Si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est une partition de  $\Omega$ , càd,  
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ,

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

- alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) = \\ &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) = \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

# Probabilité conditionnelle

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Propriétés importantes:
  - Règle de Bayes:
    - Soit  $\{A_1, \dots, A_n\}$  une partition de  $\Omega$
    - $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$
  - Dém:
    - $P(A_i \cap B) = P(A_i|B)P(B) = P(B|A_i)P(A_i)$
    - $P(B) = \sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)$  (prob. totales)

# Indépendance

- $A$  et  $B$  sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$

- $\Rightarrow P(B|A) = P(B)$

- $(A, B, C)$  sont indépendants si

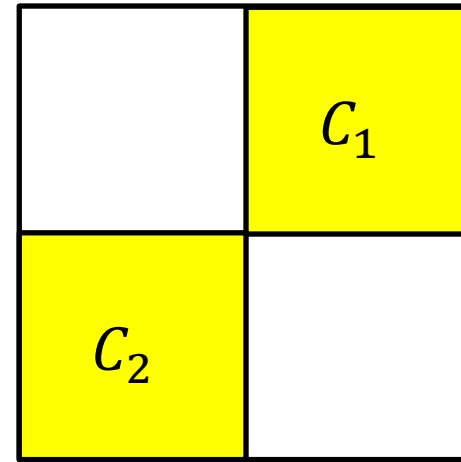
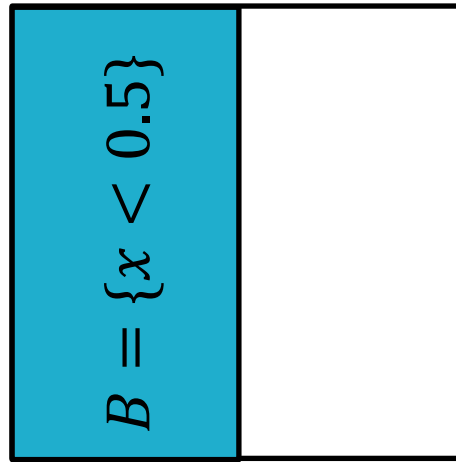
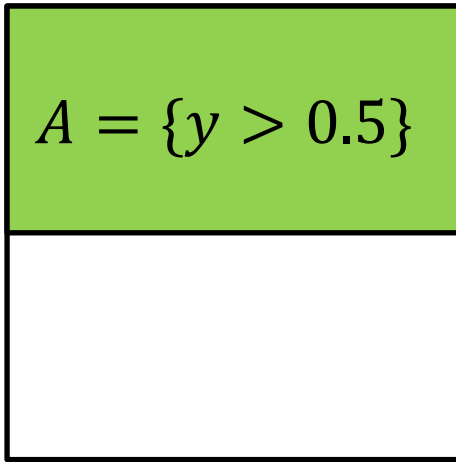
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

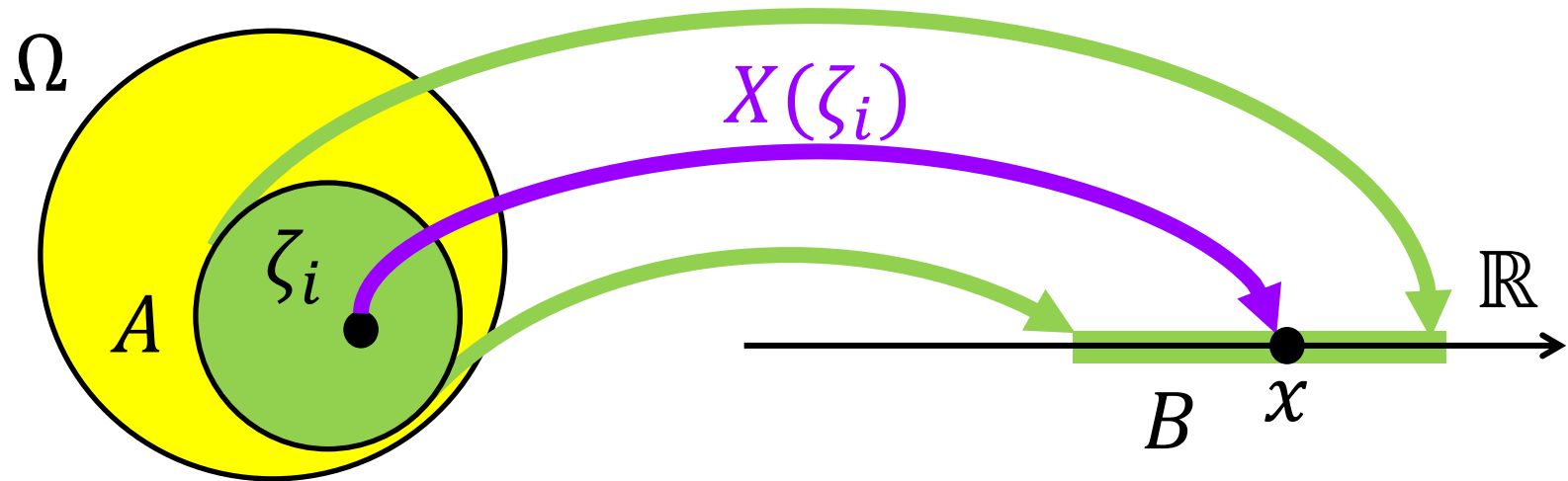
# Indépendance de trois variables



- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$
- Mais:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

# Variable aléatoire



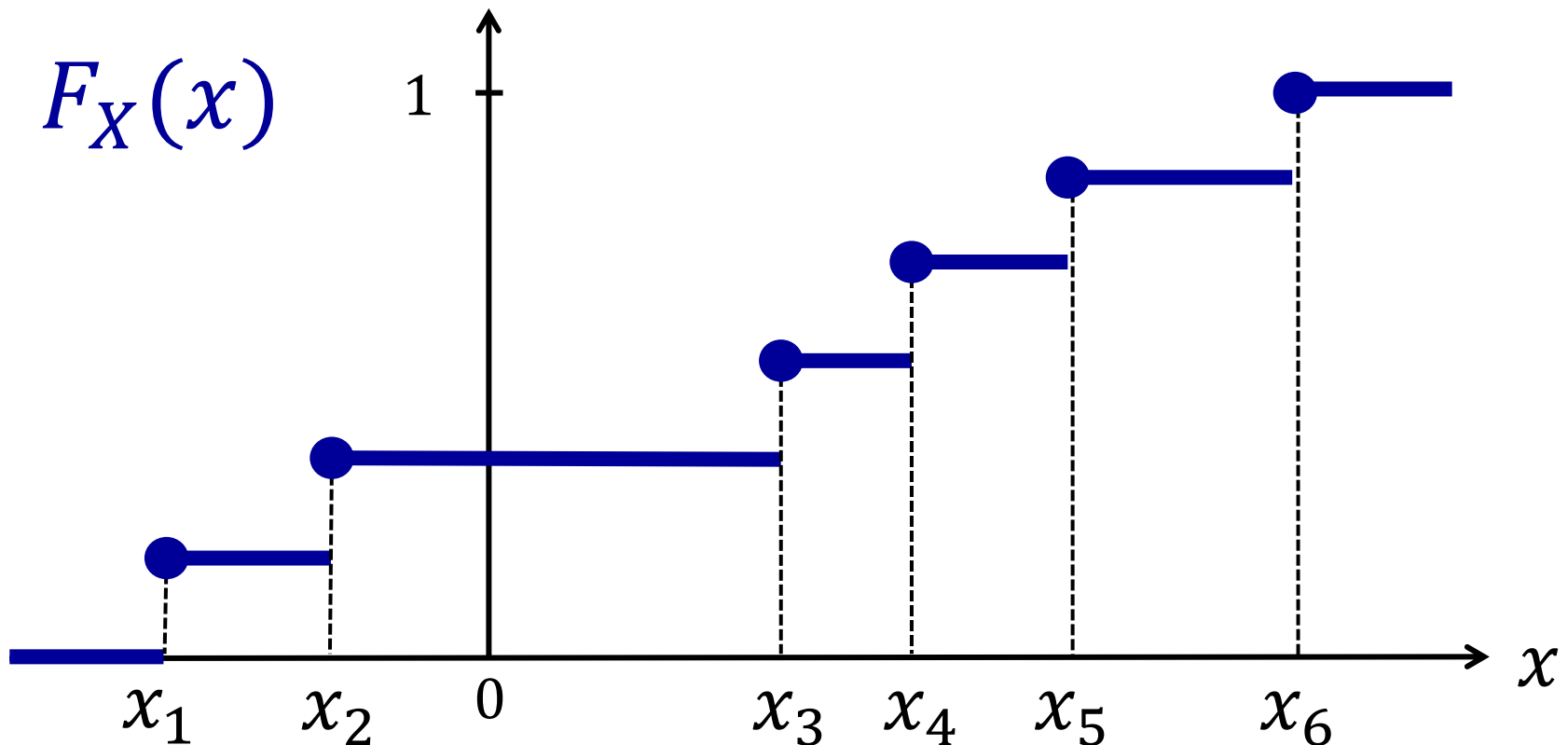
- $B = \{X(\zeta): \zeta \in A\}$
- $A = \{\zeta: X(\zeta) \in B\}$
- $P(A) = P(B)$
- $S_X = \{X(\zeta): \zeta \in \Omega\}$

# Fonction de répartition

- (Cumulative distribution function, CDF)
- $F_X(x) = P(X \leq x)$   
 $= P(A)$  pour  $A = \{\zeta \in \Omega: X(\zeta) \leq x\}$
- Propriétés:
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
  - $a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $F_X(x)$  est continue à droite, càd  
$$F_X(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x^+)$$

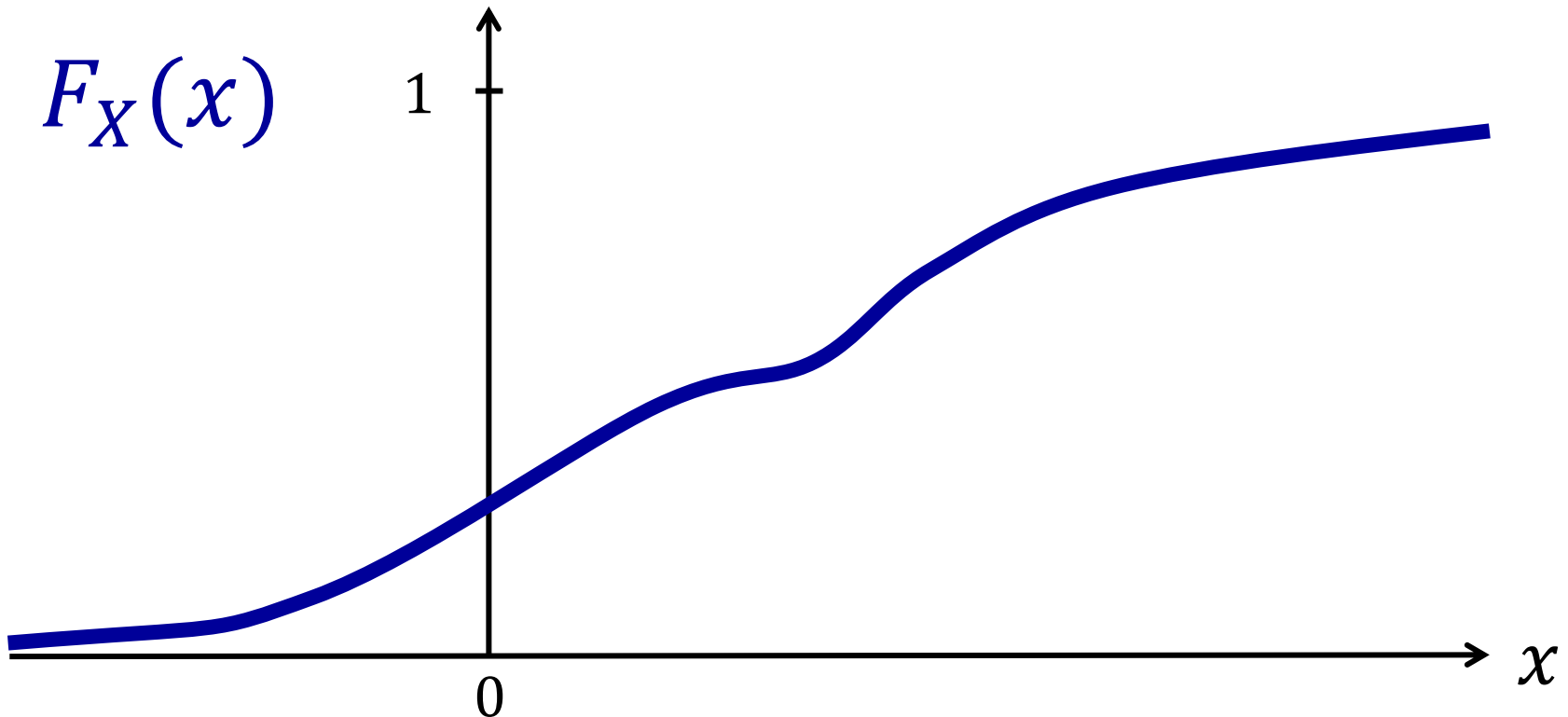
# Variable aléatoire discrète

- Si  $X$  prend un nombre dénombrable de valeurs  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = S_X$
- $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = p_i$



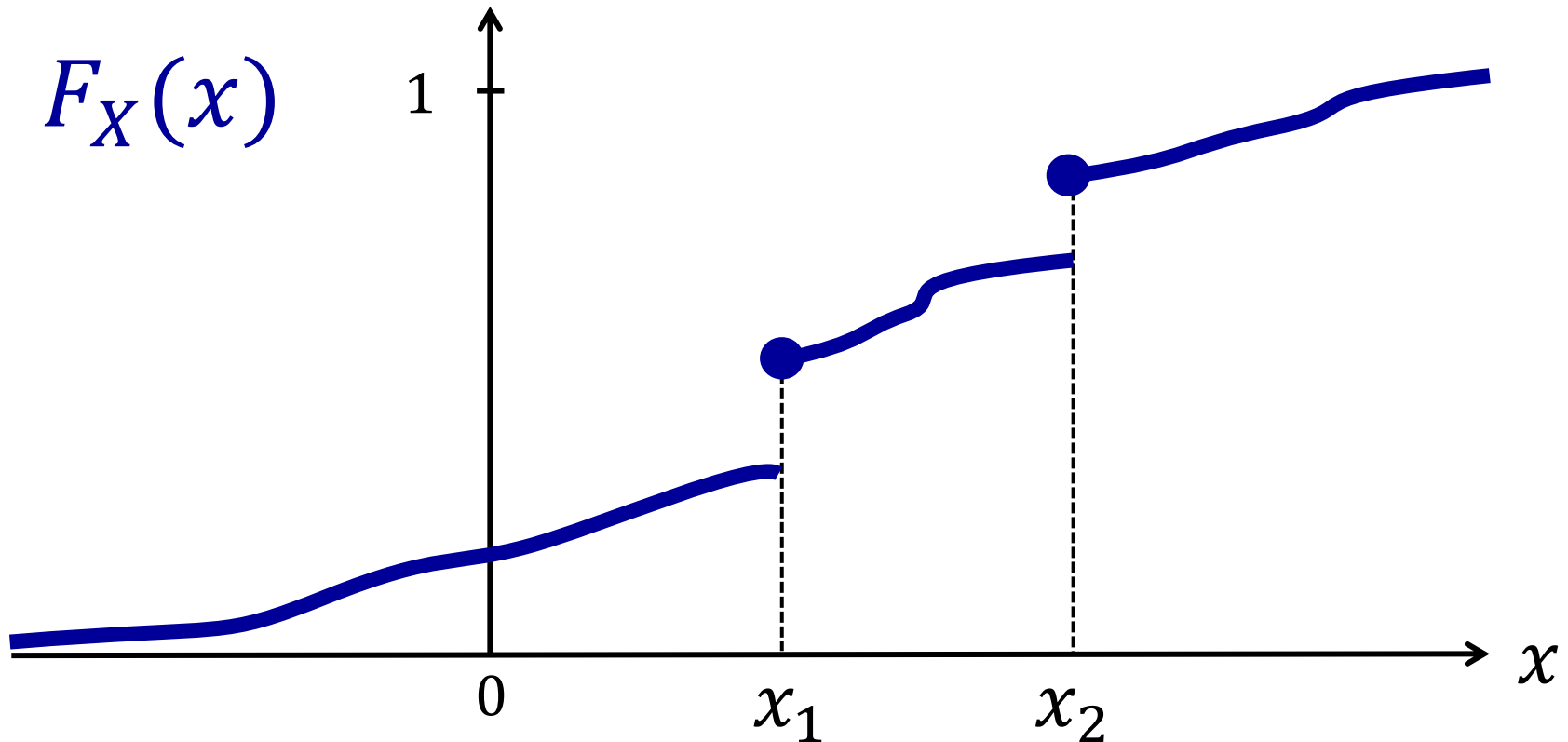
# Variable aléatoire continue

- $F_X(x)$  continue,  $X$  prend un nombre infini de valeurs
- $P(X = x) = 0$



# Variable aléatoire mixte

- $X$  prend un nombre infini de valeurs, mais  $F_X(x)$  n'est pas continue



# Densité de probabilité

- $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
- V.a. discrète ( $p_i = P(X = x_i)$ )
  - $f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$
  - Propriétés:
    - $p_i \geq 0$
    - $\sum p_i = 1$
    - $P(X \leq a) = F_X(a) = \sum_{x_i \leq a} p_i$
    - $P(X = x_i) = F(x_i) - F_X(x_i^-)$

# Densité de probabilité

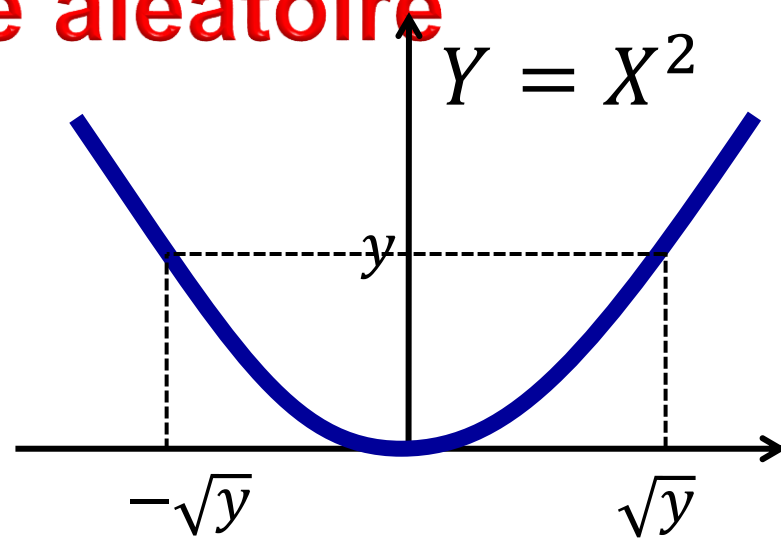
- $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
- V.a. continue
  - Propriétés:
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
    - $P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx$
    - $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)$

# Fonction d'une variable aléatoire

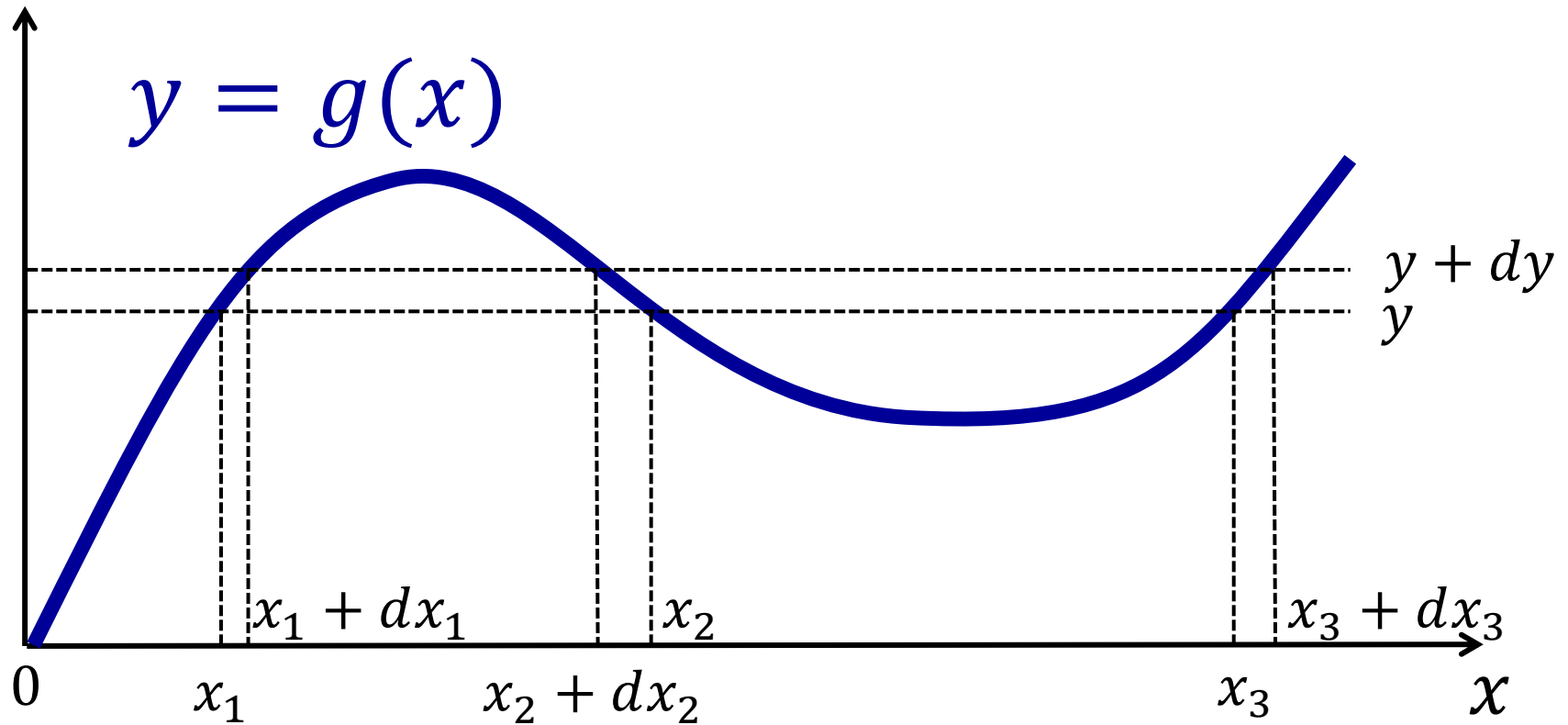
- $Y = g(X)$
- Exemple:  $g(X) = X^2$

- $$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \quad (y \geq 0) \\ &= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= \left( \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) \frac{dF_X(\sqrt{y})}{d(\sqrt{y})} - \left( \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right) \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{d(-\sqrt{y})} \\ &= \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \text{si } y > 0 \end{aligned}$$



# Densité de probabilité $f_Y(y)$



- $$\begin{cases} A = \{y < Y < y + dy\} \\ A = \{x_1 < X < x_1 + dx_1\} \cup \{x_2 + dx_2 < X < x_2\} \cup \\ \quad \cup \{x_3 < X < x_3 + dx_3\} \end{cases}$$

# Densité de probabilité $f_Y(y)$

- $$\begin{cases} P(A) \cong \int f_Y(y) |dy| \\ P(A) \cong \int f_X(x_1) |dx_1| + \int f_X(x_2) |dx_2| + \int f_X(x_3) |dx_3| \end{cases}$$
- $$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_i f_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right| = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$
- En résumé:
  - $\{x_i\}$  sont les racines de  $g(x_i) = y$
  - $$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

# Moyenne et variance d'une v.a.

- Espérance (mathématique) ou moyenne:

- $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

- Cas discret:  $P(X = x_i) = p_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\sum_i p_i \delta(x - x_i)) dx \\ &= \sum_i p_i \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_i) dx = \sum_i p_i x_i \end{aligned}$$

- Variance:

- $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$

- Cas discret:

$$\begin{aligned} E[(X - \mu_X)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 (\sum_i p_i \delta(x - x_i)) dx \\ &= \sum_i p_i \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \delta(x - x_i) dx \\ &= \sum_i p_i (x_i - \mu_X)^2 \end{aligned}$$

- Ecart-type:  $\sigma_X$

# Espérance d'une fonction d'une v.a.

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$
- Exemple:
  - $g(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$
  - $E[g(X)] = a_0 + a_1E[X] + a_2E[X^2] + \dots + a_nE[X^n]$
- Moment d'ordre  $n$ :  $E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$ 
  - Moyenne:  $\mu_X = E[X]$
  - Variance:  $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2]$   
 $= E[X^2] - 2\mu_X E[X] + \mu_X^2$   
 $= E[X^2] - (E[X])^2$

# Transformées

- Fonction caractéristique (characteristic function):
  - $\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx$
  - Propriétés:
    - $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega$
    - $E[X^k] = j^{-k} \left[ \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \right]_{\omega=0}$
    - $|\Phi_X(\omega)| \leq \Phi_X(0) = 1$
- Fonction génératrice de moment (moment-generating function):
  - $\hat{\Phi}_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{sX} dx$
  - Propriété:
    - $\hat{\Phi}_X(s = j\omega) = \Phi_X(\omega)$

# Transformées

- Fonction génératrice de cumulant

$$\Psi_X(\omega) = \ln \Phi_X(\omega)$$

- Propriété:

- $$\Psi_X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \frac{(j\omega)^i}{i!}$$

- $K_i$ : cumulants

- $E[X] = K_1$

- $E[X^2] = K_2 + K_1^2$

- $E[X^3] = K_3 + 3K_2K_1 + K_1^3$

- ...

# Fonction génératrice de probabilité

- S'applique aux v.a. discrètes et qui prennent des valeurs uniformément espacées
  - Exemple:  $S_X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $G_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i p_i = E[z^X]$
- Propriétés:
  - $P(X = k) = p_k = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k G_X(z)}{dz^k} \right]_{z=0}$
  - $E[X(X-1)(X-2) \dots (X-n+1)] = \left[ \frac{d^n G_X(z)}{dz^n} \right]_{z=1}$
  - $\mu_X = E[X] = \left[ \frac{dG_X(z)}{dz} \right]_{z=1}$
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$   
 $= \left[ \frac{d^2 G_X(z)}{dz^2} \right]_{z=1} + \left[ \frac{dG_X(z)}{dz} \right]_{z=1} - \left[ \frac{dG_X(z)}{dz} \right]_{z=1}^2$

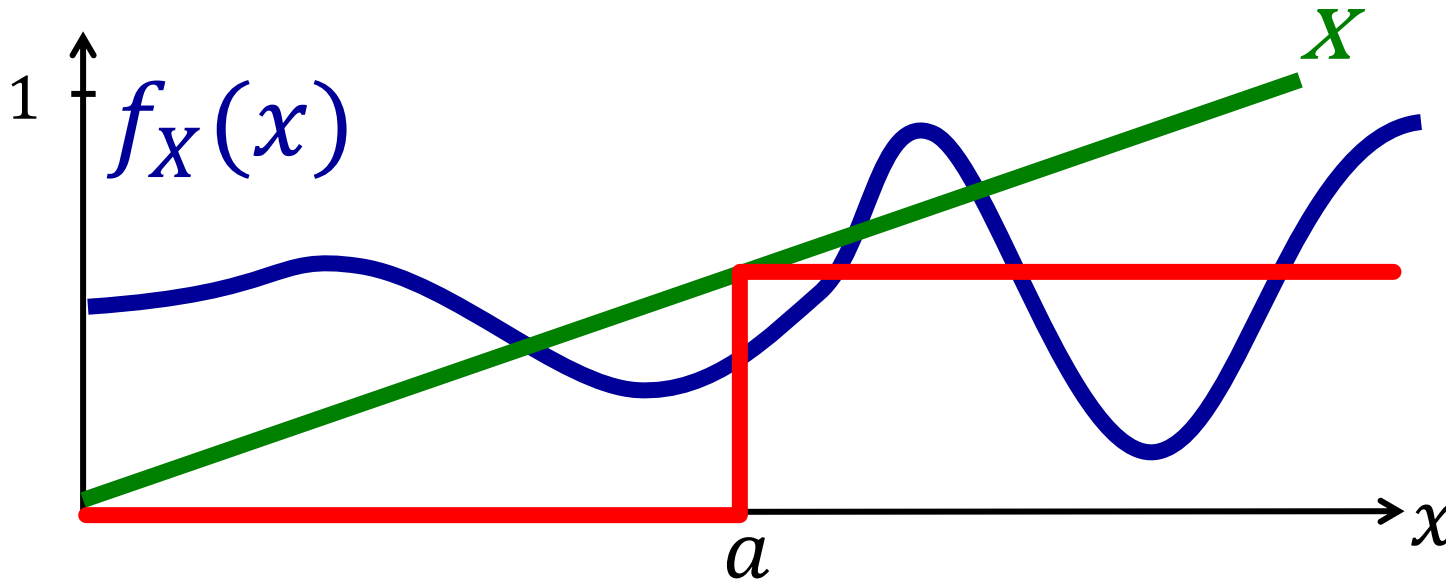
# Inégalités

- Inégalité de Markov:

- $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}, \quad X \geq 0$

- Dém:

- $$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^a x f_X(x) dx + \int_a^\infty x f_X(x) dx \\ &\geq \int_a^\infty x f_X(x) dx \geq \int_a^\infty a f_X(x) dx \\ &= a \int_a^\infty f_X(x) dx = aP(X \geq a) \end{aligned}$$



# Inégalités

- Inégalité de Tchebychev (Chebyshev):

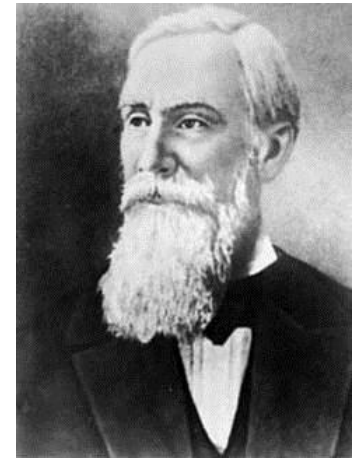
- $P(|X - \mu_X| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}$

- Dém:

- Soit  $Y^2 = (X - \mu_X)^2$

- $P(Y^2 \geq a^2) = P(|X - \mu_X| \geq a)$

- Inégalité de Markov:  $P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{E[Y^2]}{a^2} = \frac{E[(X - \mu_X)^2]}{a^2} = \frac{\sigma_X^2}{a^2}$



# Inégalités

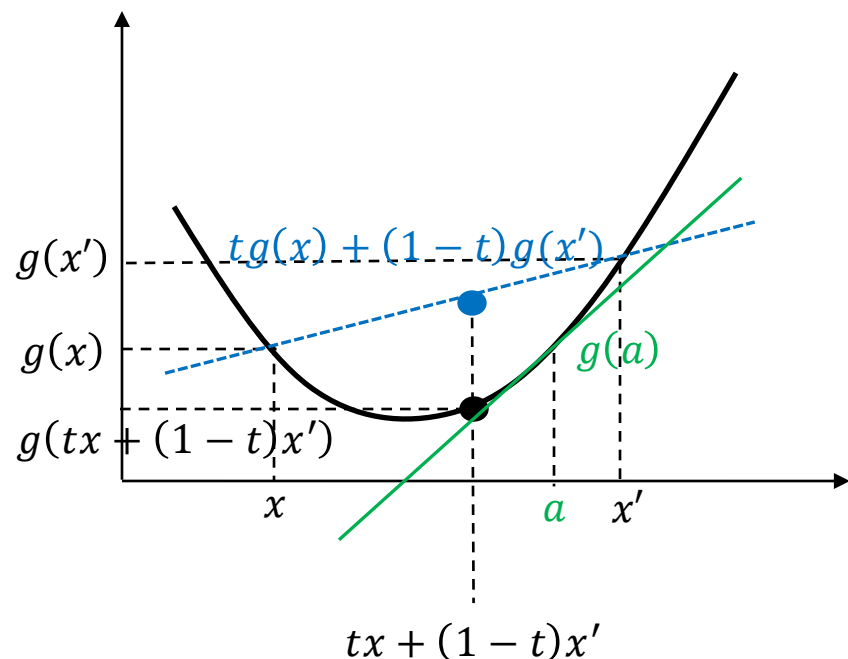
- Inégalité de Jensen
- Fonction convexe  $g(x)$ :  $\forall t \in [0,1]$ ,  
 $g(tx + (1-t)x') \leq tg(x) + (1-t)g(x')$
- Propriété:  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \theta$  (i.e.,  $\theta(a)$ ) tel que

$$g(x) \geq g(a) + \theta(x - a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $g(E[X]) \leq E[g(X)]$

- Dém:

- Prenons  $a = E[X], x = X$
- $g(X) \geq g(E[X]) + \theta(X - E[X])$
- $E[g(X)] \geq g(E[X]) + \theta(E[X] - E[X])$



# Variables aléatoires discrètes

- Bernoulli («coin flip»)

- Fonction indicatrice d'un événement  $A$ :

$$1_{\{\zeta \in A\}} = I_A(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \zeta \notin A \\ 1, & \text{si } \zeta \in A \end{cases}$$

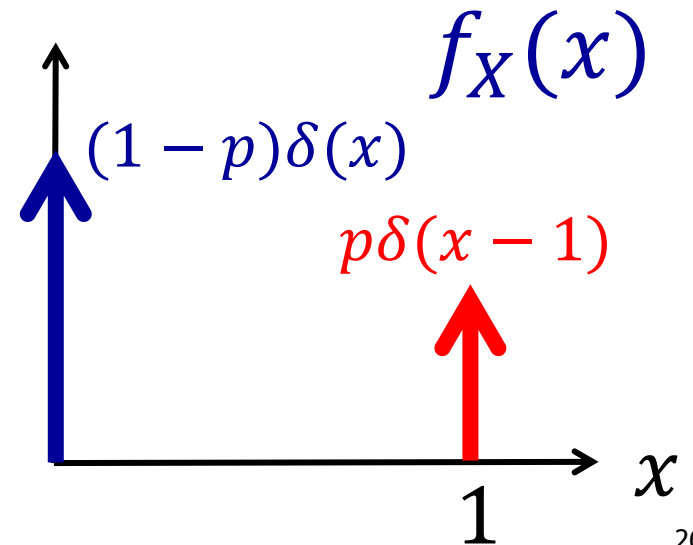
- $X = I_A$  est une v.a. dont  $S_X = \{0,1\}$  et caractérisée par un paramètre  $p$

- $$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{cases}$$

- $$\mu_X = E[X] = 0(1 - p) + 1 \cdot p = p$$

- $$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= (0^2(1 - p) + 1^2p) - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p) \end{aligned}$$

- $$G_X(z) = (1 - p) + pz$$



# Variables aléatoires discrètes

- Binomiale  $(n, p)$

- On répète une expérience de Bernoulli  $n$  fois indépendamment.

- $X$  est la v.a. comptant le nombre des succès obtenus:

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

- $S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ , où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- $\mu_X = E[X] = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} = np$

- $\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = np(1 - p)$

- $G_X(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} z^k$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pz)^k (1 - p)^{n-k} = (pz + (1 - p))^n$$

# Variables aléatoires discrètes

- Géométrique ( $p$ ):
  - On compte le nombre d'essais de Bernoulli nécessaires pour obtenir un succès (essais indépendants)
- Version 1:  $X$ =nombre d'échecs avant le 1<sup>er</sup> succès
  - $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - $P(X = k) = p(1 - p)^k$
  - $E[X] = \frac{1-p}{p}$ ,  $\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$
  - $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1 - p)^k z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1 - p)z)^k = \frac{p}{1-(1-p)z}$
- Version 2:  $X'$ =nombre d'essais avant le 1<sup>er</sup> succès
  - $S_X = \{1, 2, 3, \dots\}$
  - $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$
  - $E[X] = \frac{1}{p}$ ,  $\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$ ,  $G_{X'}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

# Variables aléatoires discrètes

- Poisson ( $\mu$ ):
  - $X$  est une v.a. comptant le nombre d'arrivées de clients dans un processus de Poisson pendant une unité de temps  $\mu$
  - $S_X = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$
  - $P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$
  - $\mu_X = E[X] = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \mu$
  - $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} z^k = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu z)^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu z} = e^{\mu(z-1)}$

# Propriété: Binomiale vs Poisson

- Soit  $X$  une binomiale  $(n, p)$ :

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

- Pour  $np = \mu$  constant et  $n \rightarrow \infty$ :

- $p_k \rightarrow \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$

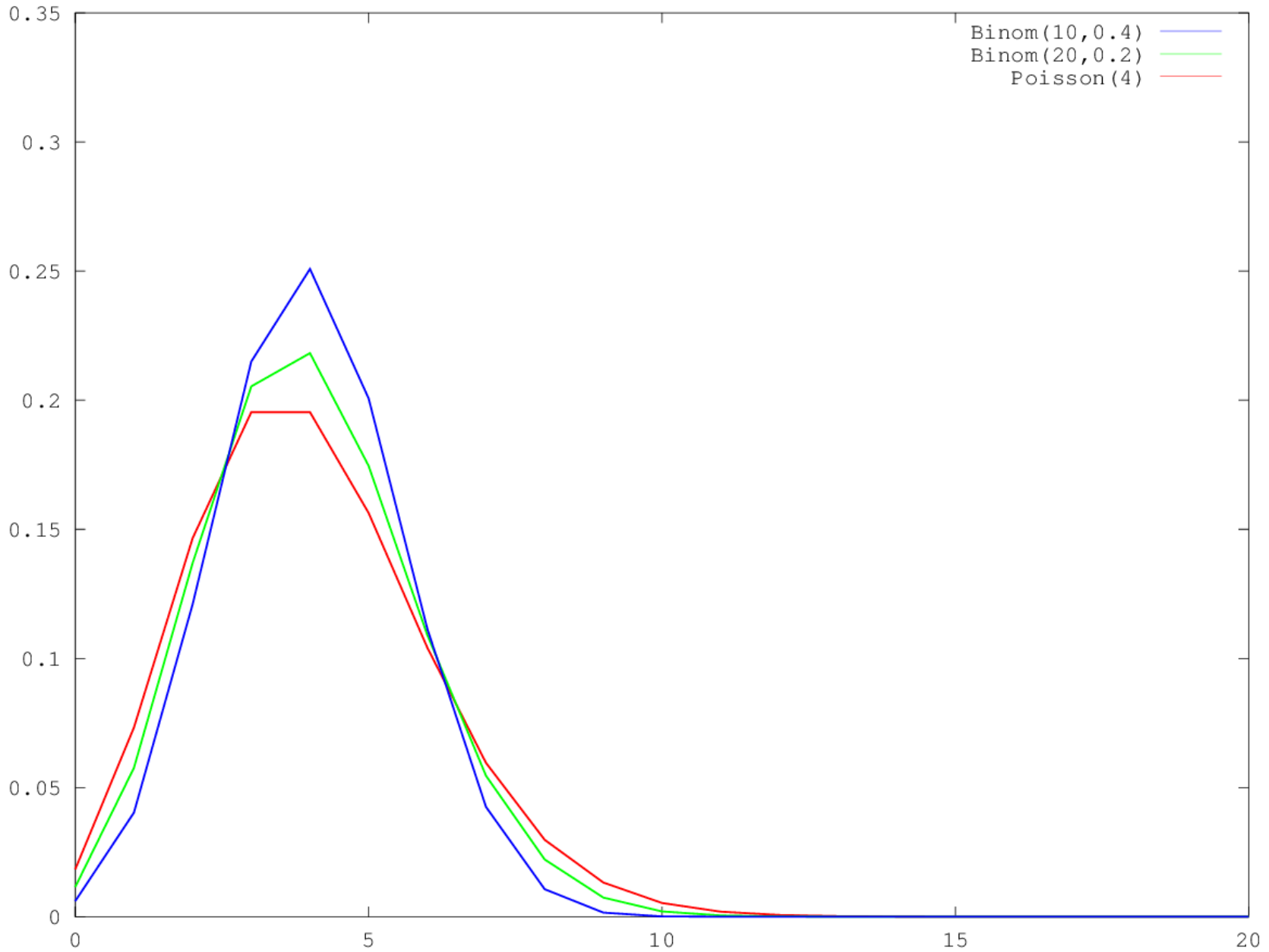
- Dém:

- $p_0 = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^n = (1 - p)^n = \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\mu}$

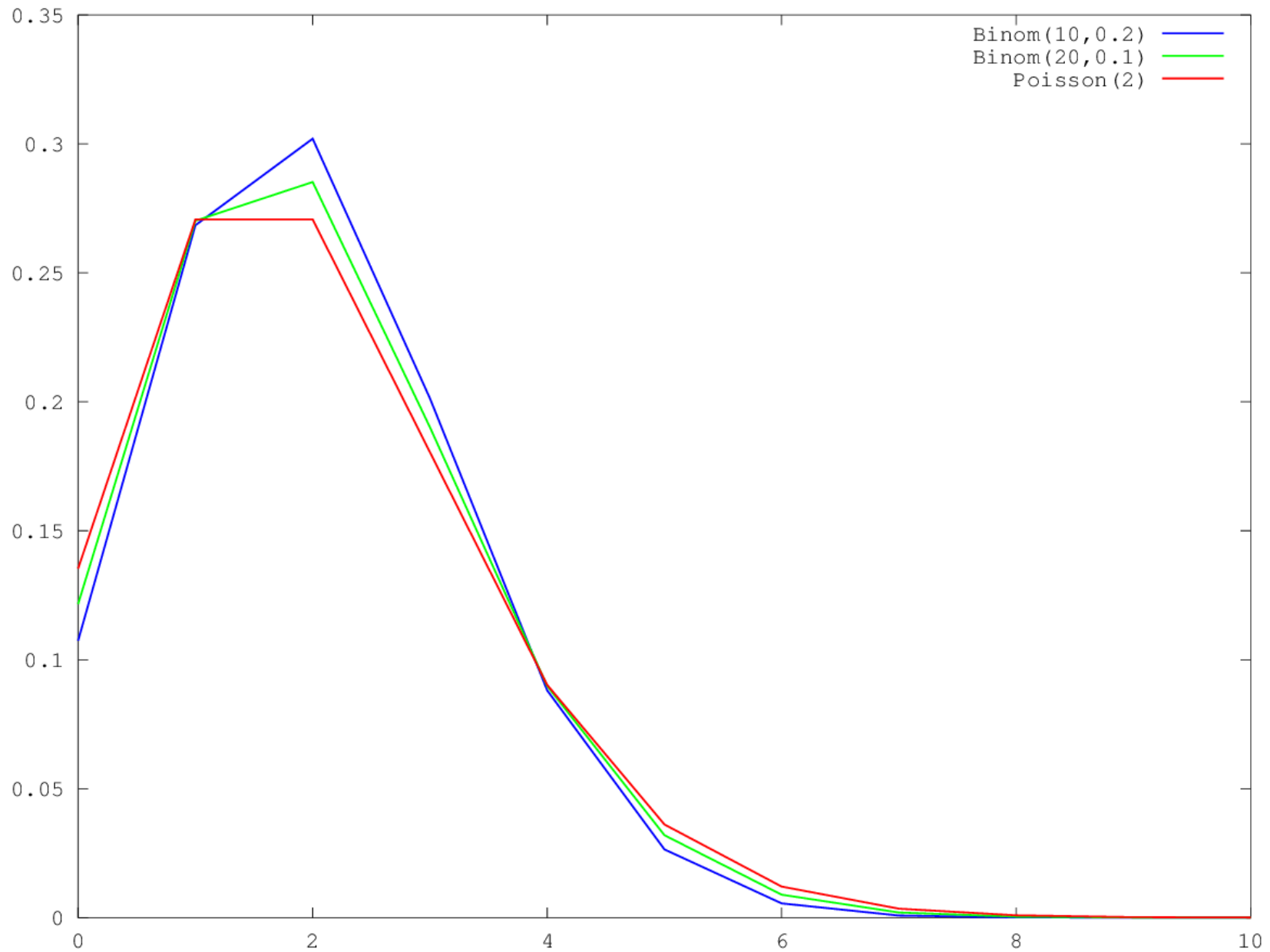
- $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(1-\frac{k}{n})\mu}{(k+1)(1-\frac{\mu}{n})} \rightarrow \frac{\mu}{k+1}$

- $p_{k+1} = \frac{\mu}{k+1} p_k = \frac{\mu}{k+1} \frac{\mu}{k} p_{k-1} = \dots = \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} p_0 \rightarrow \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\mu}$

# Binom $\rightarrow$ Poisson

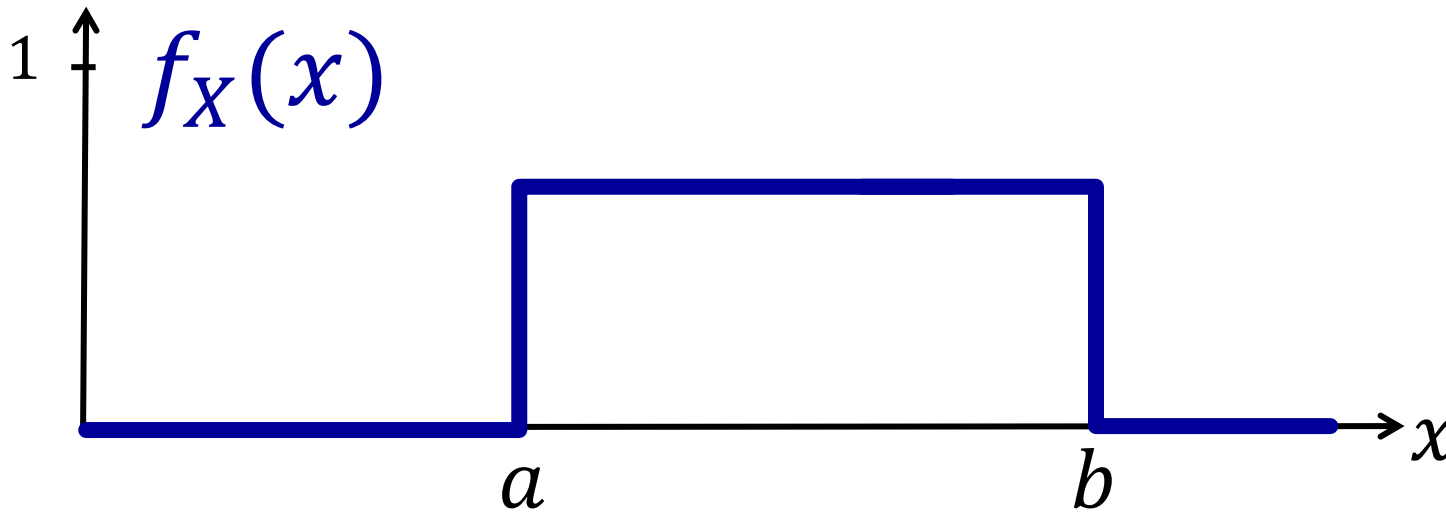


# Binom $\rightarrow$ Poisson



# Variables aléatoires continues

- Uniforme  $(a, b)$ :
  - $S_X = [a, b]$
  - $f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
  - $\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx = \frac{1}{b-a} \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega}$



# Variabes aléatoires continues

- Gaussienne  $N(\mu, \sigma^2)$ 
  - $S_X = \mathbb{R}$
  - $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
  - $F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-(x-\mu)/\sigma} e^{-t^2/2} dt$
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
  - $\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^{j\omega x} dx =$   
 $= e^{j\mu\omega} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$
- V.a. normale
  - = gaussienne normalisée  $N(0,1)$

# Variables aléatoires continues

- Exponentielle ( $\lambda$ )
  - Mesure le temps entre deux arrivées successives de clients dans un processus poissonien
  - $S_X = [0, \infty)$
  - $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
  - $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
  - $\mu_X = \lambda^{-1}$
  - $\sigma_X^2 = \lambda^{-2}$
  - $$\begin{aligned}\Phi_X(\omega) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{j\omega x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(j\omega - \lambda)x} dx = \\ &= \frac{\lambda}{j\omega - \lambda} \left[ e^{(j\omega - \lambda)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\end{aligned}$$

# VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

- Propriété: v.a. exponentielle est sans mémoire

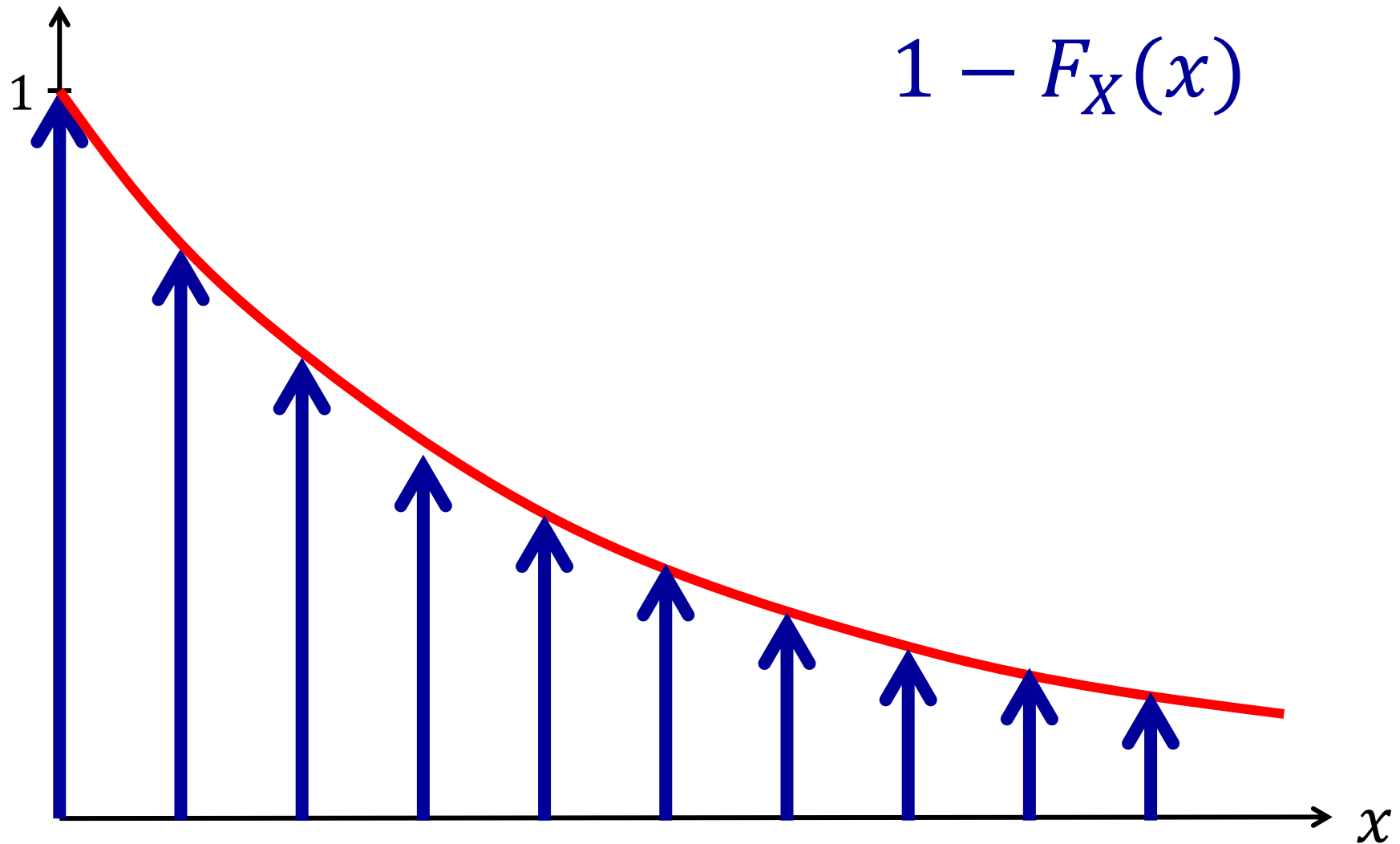
- $P(X > t + T | X > T) =$

- $= \frac{P(X > t + T, X > T)}{P(X > T)} =$

- $= \frac{P(X > t + T)}{P(X > T)}$

- $= \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

# Géométrie vs exponentielle



# Variabes aléatoires continues

- V.a. Gamma ( $\lambda, \alpha$ ):
  - $\lambda$ : «rate» ou «inverse scale»,  $\alpha$ : «shape»
  - $S_X = (0, \infty)$
  - $f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \lambda > 0$
  - $\mu_X = \alpha/\lambda$
  - $\sigma_X^2 = \alpha/\lambda^2$
  - $\Phi_X(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{j\omega}{\lambda}\right)^\alpha}$
- Fonction  $\Gamma(\cdot)$ :
  - $\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
  - Généralisation du factoriel:  $\Gamma(u + 1) = u\Gamma(u)$   
 $\Rightarrow \Gamma(u + 1) = u!$

# Variables aléatoires continues

- Propriétés de la v.a. Gamma:
  - Gamma  $(\lambda, m) \rightarrow$  Erlang  $(\lambda, m)$
  - Gamma  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \rightarrow X^2(\nu)$  (Chi-carré)
- $\lambda = \frac{1}{2}$
- $\alpha = \frac{\nu}{2}$ ,  $\nu$  est le # de degrés de liberté
- $X \sim N(0,1), Y = X^2 \sim X^2(1)$

▪ Dém:

$$\begin{aligned} \bullet f_Y(y) &= \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \left[ e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{y}{2}} \right] = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} = \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-y/2}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

# Gamma

