Modèles stochastiques pour les communications
Test

Faculté I&C, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 9 pages. Les réponses aux deux premières questions doivent détailler les (principales) étapes de vos calculs. Quand elles sont demandées, vos justifications doivent être rigoureuses et complètes. Les réponses aux questions à choix multiple regroupées sous la question 3 sont un choix entre trois réponses possibles (sans autre détail à fournir).

Abbréviations : v.a. = variable aléatoire ; i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

Maximum : 30 points

Question 1 (7 points)

On lance de manière répétée une pièce à pile ou face ; les différents lancers sont indépendants les uns des autres. Soit $0 < p < 1$ la probabilité d'avoir le côté pile (et donc $(1-p)$ est la probabilité d'avoir le côté face). Soit X_r le nombre d'essais (i.e., de lancers) nécessaires pour obtenir exactement r fois le côté pile. Le domaine de X_r est donc $S_{X_r} = \{r, r+1, r+2, \dots\}$.

1. (1pt) Dans le cas où $r = 1$, que vaut $\mathbb{P}(X_1 = n)$ pour tout $n \in S_{X_1} = \mathbb{N}^*$? Justifiez votre réponse.

Solution : La v.a. X_1 compte le nombre d'essais nécessaires pour obtenir une fois le côté pile, ce qui définit une v.a. géométrique de paramètre p. Donc $\mathbb{P}(X_1 = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in S_{X_1} = \mathbb{N}^*$.

2. (1pt) Soit $D_2 = X_2 - X_1$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une seconde fois le côté pile à partir du lancer qui a donné le premier résultat pile. Que vaut $\mathbb{P}(D_2 = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifiez votre réponse.

Solution : La v.a. D_2 compte le nombre d'essais nécessaires à partir du lancer qui a donné le premier résultat pile pour obtenir une nouvelle fois le côté pile. Comme tous les lancers sont indépendants, les D_2 lancers ayant eu lieu entre les lancers numéro $X_1 + 1$ et $X_2 = X_1 + D_2$ sont donc indépendants des X_1 premiers lancers ayant eu lieu entre les lancers numéro 1 et X_1, et donc v.a. D_2 est indépendante de X_1, et est de nouveau une v.a. géométrique de paramètre p : $\mathbb{P}(D_2 = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in S_{X_1} = \mathbb{N}^*$.

3. (1pt) Que vaut $\mathbb{P}(X_2 = n)$ pour tout $n \in S_{X_2} = \{2, 3, 4, \dots\}$? Justifiez votre réponse.

Solution : Comme $X_2 = D_2 + X_1$ et comme D_2 est donc indépendant de X_1,

$$\mathbb{P}(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = k, D_2 = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(D_2 = n-k) \tag{1}$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}(1-p)^{n-k-1} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}. \tag{2}$$

4. (1pt) Pour tout $r \geq 2$, soit $D_r = X_r - X_{r-1}$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une r-ième fois le côté pile à partir du lancer qui a donné le $(r-1)$ème résultat pile. Que vaut $\mathbb{P}(D_r = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifiez rigoureusement votre réponse.

Solution : La v.a. D_r compte le nombre d'essais nécessaires à partir du lancer X_{r-1} qui a donné le $(r-1)$ième résultat pile pour obtenir une nouvelle fois le côté pile. Comme tous les lancers sont indépendants, la v.a D_r est donc indépendante de X_{r-1} et est de nouveau une v.a. géométrique de paramètre p : $\mathbb{P}(D_r = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in S_{X_1} = \mathbb{N}^*$.

5. (1pt) Les v.a. $\{D_r, r \geq 2\}$ sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.

Solution : On a vu à la sous-question 2 que la v.a D_2 est indépendante de X_1. En appliquant le même raisonnement, comme D_3 compte le nombre d'essais nécessaires à partir du lancer qui a donné le 2ème résultat pile pour obtenir une nouvelle fois le côté pile et comme tous les lancers sont indépendants, les D_3 lancers ayant eu lieu entre les lancers numéro X_2+1 et $X_3 = X_2+D_3$ sont donc indépendants des X_2 premiers lancers ayant eu lieu entre les lancers numéro 1 et X_2, ce qui montre que la v.a. D_3 est indépendante de X_2, et donc de D_2 et de X_1.

Par récurrence, supposons que D_{r-1} est indépendante de $X_{r-1}, D_{r-1}, D_{r-2}, \dots, D_2, X_1$. Comme tous les lancers sont indépendants, les D_r lancers ayant eu lieu entre les lancers numéro $X_{r-1}+1$ et $X_r = X_{r-1}+D_r$ sont indépendants des X_{r-1} lancers ayant eu lieu entre les lancers numéro 1 et X_{r-1}, ce qui montre que la v.a. D_r est indépendante de X_{r-1}, et donc de $D_{r-1}, D_{r-2}, \dots, D_2, X_1$.

Par conséquent les v.a. $\{D_r, r \geq 2\}$ sont indépendantes.

Notons que les v.a. $\{X_r, r \geq 1\}$ ne sont pas indépendantes. Ce sont les accroissements $\{D_r, r \geq 2\}$ entre X_{r-1} et X_r qui sont des v.a. indépendantes.

6. (1pt) Pour tout $r \geq 1$, déterminez la fonction génératrice de probabilité $G_{X_r}(z) = \mathbb{E}[z^{X_r}]$ pour tout $0 < z < 1/(1-p)$. Justifiez votre réponse.

Solution : Comme $X_r = D_r + D_{r-1} + \cdots + D_2 + X_1$ est la somme de r v.a. géométriques i.i.d., et donc sa fonction génératrice de probabilité est

$$\begin{aligned} G_{X_r}(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_r}\right] = \mathbb{E}\left[z^{D_r+D_{r-1}+\cdots+D_2+X_1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[z^{D_r}\right] \cdot \mathbb{E}\left[z^{D_{r-1}}\right] \cdots \mathbb{E}\left[z^{D_2}\right] \cdot \mathbb{E}\left[z^{X_1}\right] \\ &= \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^r . \end{aligned}$$

Hors exercice : Notons qu'en prenant la transformée inverse, on trouve pour tout $n \in S_{X_r} = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$,

$$\mathbb{P}(X_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

Cette distribution porte le nom de binomiale négative de paramètre (r, p).

7. (1pt) Pour tout $r \geq 1$, que vaut la moyenne $\mathbb{E}[X_r]$ de la v.a X_r. Justifiez votre réponse. Conseil : Vous pouvez obtenir la réponse à cette dernière sous-question à partir de la réponse à la sous-question précédente ou indépendamment de celle-ci.

Solution : Méthode 1 : On calcule

$$\frac{dG_{X_r}}{dz}(z) = r\left(\frac{p}{(1-(1-p)z)^2}\right)\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^{r-1}$$

d'où

$$\mathbb{E}[X_r] = \frac{dG_{X_r}}{dz}(z=1) = \frac{r}{p}.$$

Méthode 2 : Comme X_r est la somme de r v.a. géométriques i.i.d. de paramètre p, dont l'espérance est donc $1/p$,

$$\mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}[D_r] + \mathbb{E}[D_{r-1}] + \cdots + \mathbb{E}[D_2] + \mathbb{E}[X_1] = \frac{r}{p}.$$

Question 2 (9 points)

Soient U et V deux v.a. gaussiennes jointes. Leurs moyennes sont nulles. Leurs variances sont, respectivement, $\mathrm{VAR}(U) = \sigma_U^2$ et $\mathrm{VAR}(V) = \sigma_V^2$, et leur covariance est $\mathrm{COV}(U, V) = \rho\sigma_U\sigma_V$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel fixé et soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ le processus défini par

$$X(t) = U\cos(\lambda t) + V\sin(\lambda t).$$

1. (3pts) Calculez la fonction d'auto-covariance $C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] - \mathbb{E}[X(t_1)]\mathbb{E}[X(t_2)]$ de ce processus pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Détaillez vos calculs.

Solution : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la moyenne du processus est $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[U\right]\cos(\lambda t) + \mathbb{E}\left[V\right]\sin(\lambda t) = 0$, car $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = 0$.

Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(U\cos(\lambda t_1) + V\sin(\lambda t_1)\right)\left(U\cos(\lambda t_2) + V\sin(\lambda t_2)\right)\right] \\
&= \sigma_U^2\cos\left(\lambda t_1\right)\cos\left(\lambda t_2\right) + \sigma_V^2\sin(\lambda t_1)\sin(\lambda t_2) + \rho\sigma_U\sigma_V\left(\cos(\lambda t_1)\sin(\lambda t_2) + \cos(\lambda t_2)\sin(\lambda t_1)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant les identités

$$\begin{aligned}
\cos A\cos B &= \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right) \\
\sin A\sin B &= \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right) \\
\sin(A-B) &= \cos A\sin B + \cos B\sin A,
\end{aligned}$$

on obtient

$$C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(\sigma_U^2+\sigma_V^2)\cos(\lambda(t_1-t_2)) + \frac{1}{2}\left(\sigma_U^2 - \sigma_V^2\right)\cos(\lambda(t_1+t_2)) + \rho\sigma_U\sigma_V\sin(\lambda(t_1+t_2)). \quad (3)$$

2. (3pts) Déterminez les conditions nécessaires et suffisantes sur σ_U^2, σ_V^2, λ et ρ pour que le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ soit (a) stationnaire au sens large et ensuite (b) stationnaire au sens strict. Justifiez rigoureusement votre réponse.

Solution : (a) Comme la moyenne $\mathbb{E}[X(t)]$ est constante (égale à 0) pour tout $t \in \mathbb{R}$, le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est WSS si et seulement si on peut exprimer $C_X(t_1, t_2)$ comme une fonction de $(t_1 - t_2)$. C'est le cas si et seulement si la dépendance en $t_1 + t_2$ des deux derniers termes de (3) disparait, i.e. ssi

— soit $\sigma_U^2 = \sigma_V^2$ et $\rho = 0$, auquel cas $C_X(t_1, t_2) = \sigma_U^2 \cos(\lambda(t_1 - t_2))$,

— soit $\lambda = 0$, auquel cas $C_X(t_1, t_2) = \sigma_U^2$ (dans ce cas $C_X(t_1 - t_2)$ est constante).

(b) $X(t)$ est une combinaison linéaire de deux variables gaussiennes jointes, donc $X(t)$ est une variable gaussienne et $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus gaussien. Pour un processus gaussien, WSS $\iff$ SSS.

3. (3pts) A présent, on suppose que $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$, $\lambda = 1$ et $\rho = 0$. Si vous n'avez trouvé la réponse à la sous-question, vous pouvez remplacer $C_X(t_1, t_2)$ par $a\cos(b(t_1 - t_2))$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont deux constantes (déterminées par la réponse à la sous-question 1). Pour $T > 0$ fixé, on définit

$$M_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt.$$

Calculez $\mathbb{E}[M_T^2]$. Vers quelle valeur la v.a. M_T converge-t-elle en moyenne quadratique pour $T \to \infty$? Justifiez rigoureusement votre réponse.

Solution : Méthode 1 : Calculons $\mathbb{E}\left[M_T^2\right]$ sous les conditions $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$, $\lambda = 1$ et $\rho = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_T^2\right] &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right]dsdt = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T C_X(s,t)dsdt \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \cos(s-t)dsdt = \frac{1}{2T^2}\int_{-T}^T\left(\int_{|\tau|}^{2T-|\tau|}\cos(\tau)du\right)d\tau && (4)\\
&= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^T (T-|\tau|)\cos(\tau)d\tau = \frac{2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)\cos(\tau)d\tau && (5)
\end{aligned}$$

où (4) utilise le changement de variable $(\tau, u) = (s-t, s+t)$ (avec donc $-T \le \tau \le T$, $|\tau| \le u \le 2T - |\tau|$ et $dud\tau = 2dsdt$, tandis que (5) utilise la parité de l'intégrande. Une intégration par parties donne

$$\mathbb{E}\left[M_T^2\right] = \frac{2(1-\cos(T))}{T^2} = \left(\frac{\sin(T/2)}{T/2}\right)^2 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T}{2\pi}\right),$$

qui tend vers 0 si $T \to \infty$. Donc $\mathbb{E}\left[(M_T - 0)^2\right] \to 0$ pour $T \to \infty$, ce qui établit la convergence $M_T \to 0$ en moyenne quadratique.

Méthode 2 : On peut voir M_T comme la valeur $Y(T)$ au temps T de la sortie du filtre linéaire

$$Y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^t X(t)dt$$

soumis à l'entrée $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, et dont la transmittance est $H(f) = (1 - \exp(-2\pi jfT))/(2\pi jfT)$. Comme

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2$$

et $S_X(f) = (\delta(f - 1/(2\pi)) + \delta(f + 1/(2\pi)))/2$, on a

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \left(\frac{\sin(T/2)}{T/2}\right)^2\left(\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right)\frac{1}{2}$$

et en prenant la transformée inverse

$$R_Y(\tau) = \left(\frac{\sin(T/2)}{T/2}\right)^2\cos(\tau) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\cos(\tau).$$

Dès lors, $\mathbb{E}[M_T^2] = \mathbb{E}[Y^2(T)] = R_Y(0) = \operatorname{sinc}^2(T/2\pi)$, qui tend vers 0 si $T \to \infty$. Donc $\mathbb{E}\left[(M_T - 0)^2\right] \to 0$ pour $T \to \infty$, ce qui établit la convergence $M_T \to 0$ en moyenne quadratique.

Question 3 (14 points)

Pour cette question, toutes les sous-questions à choix multiple (QCM) ont une et une seule réponse. Cochez celle qui convient. Notation :

— Réponse correcte = +2 point
— Réponse fausse = −1 point
— Réponse "Je ne sais pas" ou absence de réponse = 0 point

QCM 1 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux v.a. discrètes indépendantes, qui sont définies sur le même domaine $S_X = S_Y = S = \{1, 2, \ldots, n\}$. On sait que $\mathbb{P}(X = k) = 1/n$ pour tout $k \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Par contre on sait seulement que le domaine de Y est également $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, mais on ne connait pas sa loi de probabilité. Que vaut $\mathbb{P}(X = Y)$?

- [X] $\mathbb{P}(X = Y) = 1/n$.
- [ ] Les informations données dans l'énoncé de la question permettent d'affirmer que $\mathbb{P}(X = Y) \leq 1/n$, mais pas nécessairement que $\mathbb{P}(X = Y) = 1/n$.
- [ ] Les informations données dans l'énoncé de la question permettent d'affirmer que $\mathbb{P}(X = Y) \geq 1/n$, mais pas nécessairement que $\mathbb{P}(X = Y) = 1/n$.
- [ ] Je ne sais pas.

QCM 2 : Vous êtes venu.e à l'EPFL avec votre parapluie ce matin, mais vous ne le retrouvez plus. Avec probabilité $p/6$, où $0 < p < 1$, il se trouve dans l'un quelconque des 6 auditoires CE1 à CE6 de l'EPFL (et donc avec probabilité $(1 - p)$ ailleurs que dans un de 6 auditoires). Vous avez exploré en vain (donc sans trouver le parapluie) les 5 auditoires CE1 à CE5. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve dans l'auditoire CE6 ?

- [ ] $p/6$.
- [X] $p/(6 - 5p)$.
- [ ] p.
- [ ] Je ne sais pas.

QCM 3 : Soit X une v.a. dont la fonction caractéristique est

$$\Phi_X(\omega) = \frac{\exp(j\omega) - 1}{j\omega},$$

et soit $Y = e^X$. Que vaut $\mathbb{E}[Y]$?

- [ ] $\mathbb{E}[Y] = 1$.
- [X] $\mathbb{E}[Y] = e - 1$.
- [ ] $\mathbb{E}[Y] = e/2$.
- [ ] Je ne sais pas.

QCM 4 : Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de v.a. exponentielles i.i.d. de paramètre $\lambda > 0$. On a donc que $\mathbb{P}(X_n > x) = \exp(-\lambda x)$ pour tout $x \geq 0$. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}(X_n > \ln(n) \quad i.o.)$ que l'évènement $\{X_n > \ln(n)\}$ se produise pour une infinité d'indices $n \geq 1$?

- [ ] $\mathbb{P}(X_n > \ln(n) \quad i.o.) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.
- [ ] $\mathbb{P}(X_n > \ln(n) \quad i.o.) = 1$ pour tout $\lambda > 0$.
- [X] $\mathbb{P}(X_n > \ln(n) \quad i.o.) = 0$ si et seulement si $\lambda > 1$, et $\mathbb{P}(X_n > \ln(n) \quad i.o.) = 1$ sinon.
- [ ] Je ne sais pas.

QCM 5 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ processus stationnaire au sens large dont la moyenne est nulle et la densité spectrale de puissance est $S_X(f)$. On cherche une borne supérieure aussi petite que possible de la probabilité $\mathbb{P}(|X(t)| > 10)$. Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = 1,$$

quelle est la borne supérieure la plus petite que vous pouvez garantir parmi les suivantes ?

- [ ] $\mathbb{P}(|X(t)| > 10) \leq 1/2$.
- [ ] $\mathbb{P}(|X(t)| > 10) \leq 1/10$.
- [X] $\mathbb{P}(|X(t)| > 10) \leq 1/100$.
- [ ] Je ne sais pas.

QCM 6 : Soit X une v.a. normale (i.e., gaussienne de moyenne nulle de variance unité). Soit $0 < p < 1$ et Y la v.a définie par

$$Y = \begin{cases} X & \text{avec probabilité } p \\ -X & \text{avec probabilité } 1-p. \end{cases}$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie pour tout $0 < p < 1$?

- [ ] Y n'est pas une v.a. gaussienne mais est indépendante de X.
- [X] Y est une v.a. gaussienne, mais qui n'est pas indépendante de X.
- [ ] Y n'est pas une v.a. gaussienne et n'est pas indépendante de X.
- [ ] Je ne sais pas.

QCM 7 : Soient $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ et $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ deux processus stationnaires au sens large et indépendants, dont les moyennes sont nulles. Soit $S_{XY}(f)$ leur densité spectrale mutuelle de puissance pour tout $f \in \mathbb{R}$. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- [X] $S_{XY}(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{R}$.
- [ ] $S_{XY}(f) \in \mathbb{R}$ pour tout $f \in \mathbb{R}$, mais peut prendre des valeurs non nulles pour certaines valeurs de $f \in \mathbb{R}$.
- [ ] $S_{XY}(f) = \delta(f)$.
- [ ] Je ne sais pas.