

Modèles stochastiques pour les communications

Test

Faculté I&C, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veuillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 7 pages. Les réponses aux deux premières questions doivent détailler les (principales) étapes de vos calculs. Quand elles sont demandées, vos justifications doivent être rigoureuses et complètes. Les réponses aux questions à choix multiple regroupées sous la question 3 sont un choix entre trois réponses possibles (sans autre détail à fournir).

Abbréviations : v.a. = variable aléatoire ; i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées.

Maximum : 30 points

Question 1 (9 points)

Soient X_1, X_2, \dots, X_n un ensemble de n v.a i.i.d continues uniformément distribuées dans l'intervalle $[0, 1]$ à partir desquelles on construit les deux v.a.

$$\begin{aligned} Y &= \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \\ Z &= \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \end{aligned}$$

1. (2pts) Calculez $P(Y \leq y)$ pour tout $0 < y < 1$.

2. (2pts) Calculez $P(Z \leq z)$ pour tout $0 < z < 1$.

3. (2pts) Les v.a. Y et Z sont-elles indépendantes ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

4. (2pts) Calculez la variance $\sigma_Y^2 = \text{VAR}(Y)$ de la v.a. Y .

5. (1pt) Calculez la variance $\sigma_Z^2 = \text{VAR}(Z)$ de la v.a. Y . Conseil : Vous pouvez obtenir la réponse à cette dernière sous-question soit par calculs, soit à partir de la réponse à la sous-question précédente.

Question 2 (7 points)

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus gaussien qui a les propriétés suivantes :

- il est défini sur \mathbb{R}^+ (i.e., pour tout $t \geq 0$), avec $X(0) = 0$,
- sa moyenne est nulle pour tout $t \geq 0$,
- sa variance est égale à t pour tout $t \geq 0$,
- ses accroissements sont indépendants, ce qui veut dire que pour tout $0 \leq t_1 < t_2$, la v.a. $(X(t_2) - X(t_1))$ est indépendante de la v.a. $X(t_1)$.

1. (4pts) Calculez la fonction d'auto-corrélation $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ de ce processus pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

2. (1pt) Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est-il stationnaire au sens strict ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

3. (2pts) Soit $Y(t) = |X(t)|$. Calculez la moyenne $\mathbb{E}[Y(t)]$ de $Y(t)$.

Question 3 (14 points)

Pour cette question, toutes les sous-questions à choix multiple (QCM) ont une et une seule réponse. Cochez celle qui convient. Notation :

- Réponse correcte = +2 point
- Réponse fausse = -1 point
- Réponse "Je ne sais pas" ou absence de réponse = 0 point

QCM 1 : Soit $\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique à temps discret stationnaire au sens strict et ergodique par rapport à sa moyenne. Soit $Y(n) = X^2(n)$. Laquelle des propositions suivantes sur $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est vraie ?

- Le processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens strict et ergodique par rapport à sa moyenne.
- Le processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens strict mais peut ne pas être ergodique par rapport à sa moyenne.
- Le processus $\{Y(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est ergodique par rapport à sa moyenne mais peut ne pas être stationnaire au sens strict.
- Je ne sais pas.

QCM 2 : Soit $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Si $0 < t' < t$, que vaut $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2)$?

- $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2) = \exp(-\lambda t')$.
- $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2) = (1 - t'/t)^2$.
- $\mathbb{P}(N(t') = 0 \mid N(t) = 2) = \lambda^2(t - t')^2 \exp(-\lambda(t - t')/2)$.
- Je ne sais pas.

QCM 3 : Soient X une v.a continue dont la fonction caractéristique est notée $\Phi_X(\omega)$, et soit $Y = 2X - 1$. La fonction caractéristique $\Phi_Y(\omega)$ de la v.a Y est

- $\Phi_Y(\omega) = 2\Phi_X(\omega) - 1$.
- $\Phi_Y(\omega) = \Phi_X(2\omega)\Phi_X(-\omega)$.
- $\Phi_Y(\omega) = \exp(-j\omega)\Phi_X(2\omega)$.
- Je ne sais pas.

QCM 4 : Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que

$$X_n = \begin{cases} n & \text{avec probabilité } 1/n^2 \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - 2/n^2 \\ -n & \text{avec probabilité } 1/n^2. \end{cases}$$

Laquelle des propositions suivantes sur cette suite est vraie ?

- La suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge vers 0 presque sûrement, mais pas en moyenne quadratique.
- La suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge vers 0 en moyenne quadratique, mais pas presque sûrement.
- La suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ ne converge pas presque sûrement ni en moyenne quadratique.
- Je ne sais pas.

QCM 5 : Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stationnaire au sens large dont la densité spectrale de puissance est $S_X(f)$, et $Y(t) = (X(t+T) + X(t-T))/2$ où $T \in \mathbb{R}$ est une constante déterministe. Que vaut la densité spectrale de puissance $S_Y(f)$ du processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$?

- $S_Y(f) = S_X(f)$.
- $S_Y(f) = S_X(f) \cos(2\pi fT)$.
- $S_Y(f) = S_X(f) \cos^2(2\pi fT)$.
- Je ne sais pas.

QCM 6 : Soient X et Y deux v.a. gaussiennes jointes centrées (i.e., de moyenne nulle), chacune de variance σ^2 . Leur covariance est $\text{COV}(X, Y) = \rho\sigma^2$, avec $-1 < \rho < 1$. Déterminez l'espérance de la v.a. $Z = X^2Y^2$.

- $\mathbb{E}[Z] = \sigma^4(1 + 2\rho^2)$.
- $\mathbb{E}[Z] = 3\sigma^4(1 + \rho^2)$.
- $\mathbb{E}[Z] = 3\sigma^4 + 6\sigma^4\rho^2$.
- Je ne sais pas.

QCM 7 : Soient X et Y deux v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), dont la moyenne vaut 1 : $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 1$. Que vaut $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4]$?

- $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4] = 3$.
- $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4] = 2$.
- $\mathbb{E}[X \mid X + Y = 4] = 1$.
- Je ne sais pas.