

*Problèmes de mécanique continue*

**Exercice 1 :**

Imaginons qu'il soit possible - mis à part le problème d'instabilité - de construire une colonne de section constante aussi haute qu'on le désire. Si cette colonne est en granit, déterminer sa hauteur maximale.

Pour le granit :

Masse volumique  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$

Résistance ou contrainte de rupture en compression  $\sigma_c = 18 \text{ kN/cm}^2$ .

**Correction** Pour calculer la hauteur maximale de la colonne, il suffit de vérifier que la contrainte de compression due au poids propre à la base de la colonne ne dépasse pas la limite en compression du granit. Ainsi, on résout :

$$\rho g h_{max} = \sigma_c$$

A.N. :

$$h_{max} = \frac{180 \cdot 10^6}{9.81 \cdot 2700} = 6795.8 \text{ m}$$

**Exercice 2 :**

Un câble en acier pour mine, long de 600 m, est formé de 3 tronçons; chaque tronçon mesure 200 m et a une section constante. Ce câble doit supporter en service un poids  $Q = 30 \text{ kN}$  et l'acier a une contrainte admissible de  $18 \text{ kN/cm}^2$ , et une masse volumique de  $7800 \text{ kg.m}^{-3}$ . Dimensionner ce câble (déterminer  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ ); trouver ensuite son allongement total.

**Correction** 1) Le câble considéré doit être capable de supporter la charge appliquée et le poids propre du câble.

Il faut donc commencer le dimensionnement par le tronçon inférieur où la charge est appliquée et où le poids propre est moindre.

On appelle  $L$  la longueur d'un tronçon.

Tronçon  $A_1$ , inférieur :

$$\sigma_{lim} = \rho g L + \frac{Q}{A_1}$$

A.N.

$$A_1 \simeq 1.8 \text{ cm}^2$$

Tronçon  $A_2$ , milieu :

$$\sigma_{lim} = \rho g L + \frac{Q + \rho g L A_1}{A_2}$$

A.N.

$$A_2 \simeq 2,0 \text{ cm}^2$$

Tronçon  $A_3$ , supérieur :

$$\sigma_{lim} = \rho g L + \frac{Q + \rho g L (A_1 + A_2)}{A_3}$$

A.N.

$$A_3 \simeq 2.2 \text{ cm}^2$$

2) Pour calculer l'allongement total, on peut par exemple calculer l'allongement de chaque tronçon. Le tenseur des contraintes est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après la loi de Hooke, on a :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{\sigma_{xx}}{E}.$$

On peut donc calculer l'allongement par tronçon.

Tronçon  $A_1$ , inférieur :

$$u_{A1} = \int_0^L \varepsilon_{A1}(x) dl = \int_0^L \frac{\sigma_{lim}}{E} dl = \int_0^L \frac{1}{E} \left( \frac{Q}{A_1} + \int_0^l \rho g dl \right) dl = \frac{1}{E} \int_0^L \left( \frac{Q}{A_1} + \rho g l \right) dl = \frac{1}{E} \left( \frac{QL}{A_1} + \frac{\rho g L^2}{2} \right)$$

A.N.

$$u_{A1} \simeq 0.17 \text{ m}$$

Tronçon  $A_2$ , milieu :

$$u_{A2} = \int_0^L \varepsilon_{A2} dl = \int_0^L \frac{1}{E} \left( \frac{Q}{A_2} + \rho g L \frac{A_1}{A_2} + \int_0^l \rho g dl \right) dl = \frac{1}{E} \left( L \left( \frac{Q}{A_2} + \rho g L \frac{A_1}{A_2} \right) + \frac{\rho g L^2}{2} \right)$$

A.N.

$$u_{A2} \simeq 0.17 \text{ m}$$

Tronçon  $A_3$ , supérieur :

$$\begin{aligned} u_{A3} &= \int_0^L \varepsilon_{A3} dl = \int_0^L \frac{1}{E} \left( \frac{Q}{A_3} + \rho g L \frac{A_1 + A_2}{A_3} + \int_0^l \rho g dl \right) dl = \frac{1}{E} \int_0^L \left( \frac{Q}{A_3} + \rho g L \frac{A_1 + A_2}{A_3} + \rho g l \right) dl \\ &= \frac{1}{E} \left( L \left( \frac{Q}{A_3} + \rho g L \frac{A_1 + A_2}{A_3} \right) + \frac{\rho g L^2}{2} \right) \end{aligned}$$

A.N.

$$u_{A3} \simeq 0.17 \text{ m}$$

Au total,

$$u_{tot} = u_{A1} + u_{A2} + u_{A3} \simeq 0.50 \text{ m}$$

Pour comparaison, si on avait considéré la contrainte constante dans tout le câble, on aurait trouvé :

$$u_{tot} = \frac{3L}{E} \sigma_{lim} \simeq 0.525 \text{ m}$$

### Exercice 3 :

Un prisme rectangulaire droit de longueur  $l$ , hauteur  $h$  et largeur  $w$  est composé d'un matériau linéaire élastique, isotrope et homogène (voir figure 1).

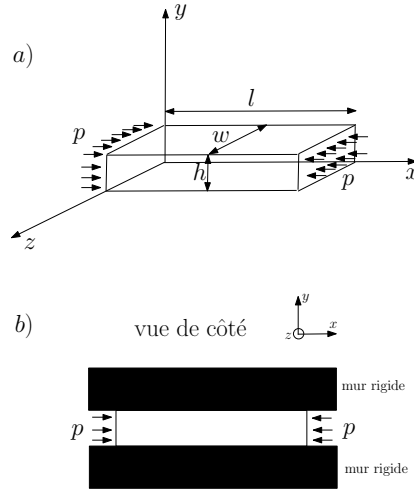


FIGURE 1 – (a) Géométrie du prisme pour les cas a). (b) Géométrie du prisme pour les cas b).

- a) Le prisme est soumis à une pression uniforme sur les faces d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ . Toutes les autres faces sont libres.
1. Exprimer le tableau des conditions aux limites.
  2. Exprimer les composantes du tenseur des contraintes et des déformations infinitésimales.
  3. En déduire le module d'élasticité effectif qui est défini par :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} \quad (1)$$

en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

- b) Le prisme est soumis, comme pour le cas a), à une pression uniforme sur les faces d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ . De plus, le prisme est en contact sans frottement avec des murs rigides d'ordonnée  $y = 0$  et  $y = h$ . Les autres faces ( $z = 0$  et  $z = w$ ) sont libres.
1. Exprimer le tableau des conditions aux limites.
  2. Exprimer les composantes du tenseur des contraintes et des déformations infinitésimales (Indication : les conditions aux limites imposent ici que  $\epsilon_{yy} = 0$  en tout point).
  3. En déduire le module d'élasticité effectif qui est défini par :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} \quad (2)$$

en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

- c) Enfin, le prisme est soumis, comme pour le cas a), à une pression uniforme sur les faces d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ . Cette fois, le prisme est en contact sans frottement avec des murs rigides dans les deux autres directions (ordonnée  $y = 0$ ,  $y = h$ ,  $z = 0$  et  $z = w$ ).
1. Exprimer le tableau des conditions aux limites.
  2. Exprimer les composantes du tenseur des contraintes et des déformations infinitésimales.
  3. En déduire le module d'élasticité effectif qui est défini par :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}$$

en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

## Solution

a) Le prisme est soumis à une pression uniforme sur les faces d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ .

1. Le tableau des conditions aux limites :

Limite	$e_x$	$e_y$	$e_z$
$S_{x=0}$	$t_x = p$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{x=l}$	$t_x = -p$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{lat_y}$	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{lat_z}$	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$t_z = 0$

2. La seule composante non nulle du tenseur des contraintes est  $\sigma_{xx}$ .

$$\rightarrow \sigma_{ij} = 0 \quad \text{pour tous } i, j \text{ sauf } i = j = x$$

On peut déterminer  $\sigma_{xx}$  par :

$$\begin{aligned} e_x \cdot \sigma_{ij} &= t_x & (\text{sur } S_{x=l}) \\ \rightarrow \sigma_{xx} &= -p \end{aligned}$$

Déterminer  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  et  $\epsilon_{zz}$  par la loi de Hooke :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{xx} - \nu \sigma_{xx}] = \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\frac{p}{E} \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = \frac{\nu p}{E} \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \end{aligned}$$

3. Le module d'élasticité effectif est :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = E$$

Cette configuration permet donc d'évaluer le module d'Young d'un matériau expérimentalement.

b) Le prisme est soumis à une pression uniforme sur les faces d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ , et le déplacement dans la direction  $y$  aux faces d'ordonnée  $y = 0$  et  $y = h$  est nulle.

1. Le tableau des conditions aux limites :

Limite	$e_x$	$e_y$	$e_z$
$S_{x=0}$	$t_x = p$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{x=l}$	$t_x = -p$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{lat_y}$	$t_x = 0$	$u_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{lat_z}$	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$t_z = 0$

2. Les seuls composants non nulles du tenseur des contraintes sont  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . On peut déterminer  $\sigma_{xx}$  par :

$$\begin{aligned} e_x \cdot \sigma_{ij} &= t_x & (\text{sur } S_{x=l}) \\ \rightarrow \sigma_{xx} &= -p \end{aligned}$$

Pour déterminer  $\sigma_{yy}$ , il faut utiliser :

$$u_y = 0 \tag{3}$$

Ceci implique que  $\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ . Par conséquent, nous utilisons la loi de Hooke pour déterminer  $\sigma_{yy}$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \\ &\rightarrow \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] = 0 \\ &\rightarrow \sigma_{yy} = \nu \sigma_{xx} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat pour  $\sigma_{xx}$  nous trouvons :

$$\rightarrow \sigma_{yy} = -\nu p$$

Les autres composantes du tenseur des contraintes sont toutes nulles :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 0 \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{zz}$  analogue à la partie a).

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{xx} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] = \frac{\sigma_{xx}}{E} [1 - \nu^2] \\ &= -\frac{p}{E} (1 - \nu^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \nu \sigma_{xx}) = -\frac{\nu(1 + \nu)}{E} \sigma_{xx} \\ &= \frac{\nu p (1 + \nu)}{E} \end{aligned}$$

Les autres composantes du tenseur des déformations sont nulles :

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$$

3. Le module d'élasticité effectif est :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Cette seconde configuration permet donc d'évaluer le coefficient de Poisson d'un matériau (une fois le module d'Young connu).

c) Le prisme est soumis à une pression uniforme sur les faces d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ . De plus le déplacement dans la direction  $y$  pour les faces  $y = 0$  et  $y = h$  est nul, ainsi que dans la direction  $z$  pour les faces  $z = 0$  et  $z = w$ .

1. Le tableau des conditions aux limites :

Limite	$e_x$	$e_y$	$e_z$
$S_{x=0}$	$t_x = p$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{x=l}$	$t_x = -p$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{lat_y}$	$t_x = 0$	$u_y = 0$	$t_z = 0$
$S_{lat_z}$	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$u_z = 0$

2. Les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$ . On peut déterminer  $\sigma_{xx}$  par :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \cdot e_{xj} &= t_x \quad (\text{sur } S_{x=l}) \\ \rightarrow \sigma_{xx} &= -p \end{aligned}$$

Pour déterminer  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$ , il faut utiliser :

$$u_y(y) = 0$$

$$u_z(z) = 0$$

Ceci implique que  $\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$  et que  $\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ .

$$\begin{cases} \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = 0 \\ \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{-\nu p}{1 - \nu}$$

Grâce à ça nous pouvons donc calculer la seule composante non nulle du tenseur des déformations :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = -p \frac{1 - \nu(1 + 2\nu)}{E(1 - \nu)}$$

3. Le module d'élasticité effectif est :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = E \frac{1 - \nu}{1 - \nu(1 + 2\nu)}$$

#### Exercice 4 :

Une paroi rectangulaire  $a.2b$ , d'épaisseur unité, est soumise à un état plan de contrainte par les forces de surface indiquées sur la figure ci-dessous ; seul  $q$  est connu et il n'y a pas de forces en volume. Dans les axes  $(x, y)$  donnés, on propose comme solution à ce problème le tenseur contrainte

$$\sigma_x = A_1x + B_1y \quad \sigma_y = A_2x + B_2y \quad \tau_{xy} = A_3x + B_3y$$

La matériau est élastique linéaire isotrope.

1. Trouver  $q_1, q_2$  et  $q_3$  pour que les charges extérieures soient en équilibre.
2. Démontrer que l'état de contrainte proposé est la solution exacte du problème, et trouver la valeur des constantes  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  pour qu'il en soit ainsi.

#### Correction

1. Équilibre des forces :

$$\Sigma R_x = 0, \quad \frac{q_1 a}{2} = \frac{q_2 a}{2}$$

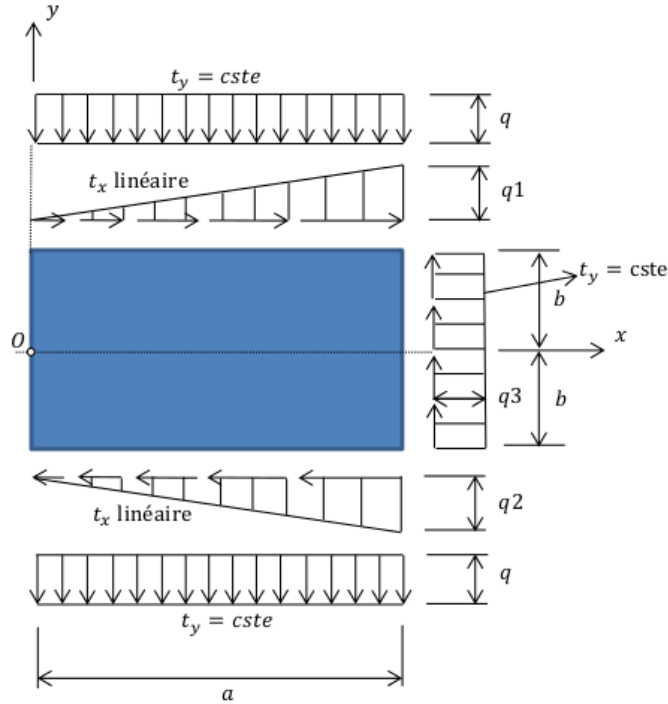
$$\rightarrow q_1 = q_2$$

$$\Sigma R_y = 0, \quad q_3 2b = 2qa$$

$$\rightarrow q_3 = q \frac{a}{b}$$

$$\text{au centre de la paroi : } \Sigma M_z = 0, \quad \frac{1}{2} q_1 ab + \frac{1}{2} q_2 ab = 2q_3 b \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow q_1 = q_2 = q_3 = q \frac{a}{b}$$



2. L'état de contrainte proposé est le suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} A_1x + B_1y & A_3x + B_3y \\ A_3x + B_3y & A_2x + B_2y \end{bmatrix}$$

vérifions que cette état satisfasse l'équilibre et la compatibilité des contraintes avec les charges extérieures sur chaque surface :

— Vérification de l'équilibre en l'absence de force volumique :

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} A_1 + B_3 \\ A_3 + B_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

— En utilisant l'équation  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}$  (conseillé)

(a) Sur la surface  $S_{x=a}$  avec  $\mathbf{n} = [1 \ 0]^T$

$$\begin{aligned} t_x = \sigma_{1i}n_i = \sigma_{xx}(x=a) &= A_1a + B_1y = 0 = cste \quad \text{pour tout } y \\ &\rightarrow A_1 = B_1 = 0 \\ t_y = \sigma_{2i}n_i = \tau_{xy}(x=a) &= A_3a + B_3y = q_3 = cste \quad \text{pour tout } y \\ &\rightarrow B_3 = 0 \\ &\rightarrow A_3 = \frac{q_3}{a} = q \frac{1}{b} \end{aligned}$$

L'équation (4) (haut)  $A_1 + B_3 = 0$  est bien vérifiée.

(b) Sur la surface  $S_{y=b}$  avec  $\mathbf{n} = [0 \ 1]^T$

$$t_x = \sigma_{1i}n_i = \tau_{xy}(y=b) = q\frac{1}{b}x$$

$$\tau(x=0, y=b) = \frac{q}{b}0 = 0$$

$$\tau(x=a, y=b) = q\frac{a}{b} = q_1 \quad \text{ok}$$

$$t_y = \sigma_{2i}n_i = \sigma_{yy}(y=b) = A_2x + B_2b = -q = cste \quad \text{pour tout } x$$

$$\rightarrow A_2 = 0$$

$$\rightarrow B_2 = -q\frac{1}{b}$$

L'équation (4) (bas)  $A_3 + B_2 = 0$  est bien vérifiée.

(c) Contrôle sur la surface  $S_{y=-b}$  avec  $\mathbf{n} = [0 \ -1]^T$

$$t_x = \sigma_{1i}n_i = -\tau_{xy}(y=b) = -q\frac{1}{b}x$$

$$\tau(x=0, y=b) = \frac{q}{b}0 = 0$$

$$\tau(x=a, y=b) = -q\frac{a}{b} = -q_2 \quad \text{ok}$$

$$t_y = \sigma_{2i}n_i = -\sigma_{xx}(y=-b) = q\frac{1}{b}(-b) = -q \quad \text{ok}$$

(d) Contrôle sur la surface  $S_{x=0}$  avec  $\mathbf{n} = [-1 \ 0]^T$

$$t_x = \sigma_{1i}n_i = -\sigma_{xx}(x=0) = 0 \quad \text{ok}$$

$$t_y = \sigma_{2i}n_i = -\tau_{xy}(x=0) = q\frac{1}{a}0 = 0 \quad \text{ok}$$