

Dynamique

Exercice 1 : Impact d'une barre

Une barre de longueur L , de densité ρ et de module de Young E entre en collision avec un mur à l'instant $t = 0$. Calculez la durée pendant laquelle la barre reste en contact avec le mur avant de rebondir.

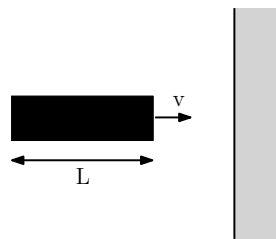


FIGURE 1 – Projectile impactant un mur.

Solution :

La Figure 2 illustre l'évolution des contraintes et des vitesses dans la barre en impact. L'impact à $t = 0$ génère une onde de compression qui se propage du bord droit vers le bord gauche où elle est réfléchiée, produisant une onde de traction se déplaçant vers le mur. Lorsque l'onde de traction atteint le mur impacté, la barre rebondit en raison d'une vitesse particulière négative associée à l'absence de résistance en traction à l'interface de contact. Par conséquent, le temps pendant lequel la barre reste en contact avec le mur est $t = \frac{2L}{v} = 2L\sqrt{\frac{\rho}{E}}$, où l'information se déplace le long de la barre unidimensionnelle à la vitesse des ondes élastiques : $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

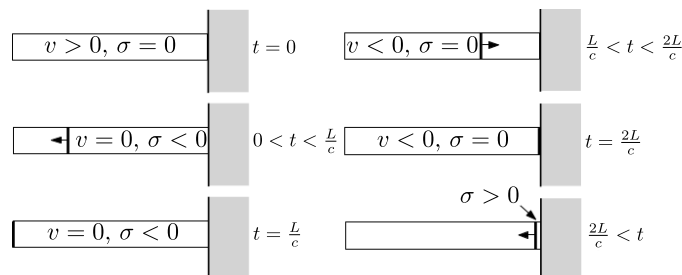


FIGURE 2 – Évolution des contraintes et de la vitesse dans la barre après l'impact.

Exercice 2 : Élasticité bilinéaire d'une barre

Une onde de traction d'amplitude σ_0 et de durée infinie se propage à travers une barre unidimensionnelle. Le matériau de la barre suit une élasticité bilinéaire, comme illustré dans la Figure 3. Tracez l'évolution de la contrainte en fonction du temps au point $x = L$ pour une onde de traction d'amplitude :

1. $\sigma_0 < \sigma_y$
2. $\sigma_0 > \sigma_y$

Solution :

En partant de l'équation de l'élastodynamique pour une barre unidimensionnelle

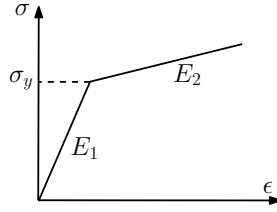


FIGURE 3 – Loi constitutive bilinéaire

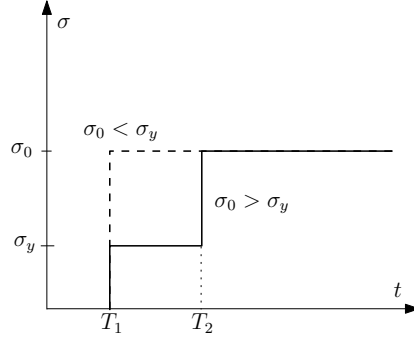


FIGURE 4 – Évolution des contraintes en fonction du temps à la position $x = L$.

$$\nabla \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

on peut écrire la réponse du système comme la somme des champs d'onde provoquant $\sigma = \sigma_y$ et des champs d'onde provoquant $\sigma = \sigma_0 - \sigma_y$, puisque le matériau est élastique linéaire :

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma|_{\sigma \leq \sigma_y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma|_{\sigma > \sigma_y}) = E_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Ainsi, la réponse totale du système est la somme de deux ondes élastiques. La première est caractérisée par u_2 et une variation de contrainte de $\sigma_0 - \sigma_y$, se déplaçant à la vitesse $c_2 = \sqrt{E_2/\rho}$, et l'autre est caractérisée par u_1 et une variation de contrainte de σ_y , se déplaçant à la vitesse $c_1 = \sqrt{E_1/\rho}$. Le temps auquel l'onde atteint $x = L$ est alors :

1. Pour les contraintes basses : $T_1 = \frac{L}{c_1} = \frac{L}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}}$
2. Pour les contraintes hautes : $T_2 = \frac{L}{c_2} = \frac{L}{\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}}$

La figure 4 présente l'évolution des contraintes au point $x = L$.

Exercice 3 : Rupture d'une barre

Une onde de compression imposée de manière linéaire, d'amplitude $-4\sigma_0$, se propage à travers une barre de module élastique E et de densité ρ . L'onde est réfléchiée à la frontière libre située à droite (voir la Figure 5). Déterminez la position moyenne x_r où la rupture se produira le long de la barre, sachant que la limite d'élasticité en traction est de $2\sigma_0$.

Solution :

La condition de bord libre ($\sigma = 0$) à l'extrémité droite de la barre entraîne une onde réfléchiée de même forme triangulaire mais de signe opposé (traction). Une illustration graphique du problème est présentée à la figure 6. La contrainte totale $\sigma(x)$ est la somme de l'onde de compression incidente $\sigma^-(x)$ et de l'onde de traction réfléchiée $\sigma^+(x)$. On les définit comme suit.

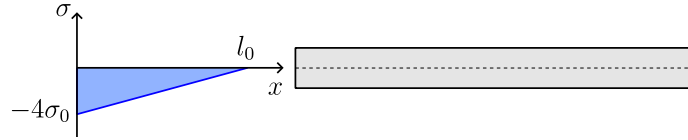


FIGURE 5 – Onde de compression a croissance linéaire dans une barre.

$$\sigma(x) = \sigma^-(x) + \sigma^+(x), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma^-(x) = -4\sigma_0 + \frac{4\sigma_0}{l_0}x \\ \sigma^+(x) = \sigma^+(0) + \frac{4\sigma_0}{l_0}x \end{cases}$$

Géométriquement, à l'aide de la figure 6, la rupture a lieu lorsque $\sigma^+(0) = 2\sigma_0$. On sait alors qu'en $x = x_r$, nous sommes au bord libre, $\sigma(x_r) = 0$ et donc $\sigma^+(x_r) = -\sigma^-(x_r)$:

$$\begin{aligned} 2\sigma_0 + \frac{4\sigma_0}{l_0}x_r &= 4\sigma_0 - \frac{4\sigma_0}{l_0}x_r \\ x_r &= \frac{l_0}{4} \end{aligned}$$

La rupture se produit donc à une distance de $l_0/4$ du bord droit de la barre.

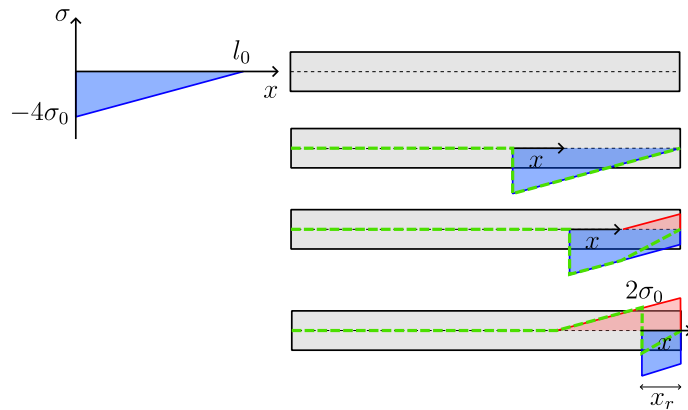


FIGURE 6 – Réflexion des contraintes à l'extrémité libre de la barre. En bleu, onde de compression $\sigma^-(x)$; en rouge, onde de traction $\sigma^+(x)$; et en vert, contrainte totale $\sigma(x)$.

Exercice 4 : (Examen 2025) Propagation d'onde dans une barre bimatérielle 1D

On considère une barre de longueur $2L$ constituée de deux matériaux élastiques linéaires, de modules de Young E_1 et E_2 , et de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , impactant un mur rigide à une vitesse V (figure 7). On cherche à calculer la durée pendant laquelle la barre reste en contact avec le mur avant de rebondir.

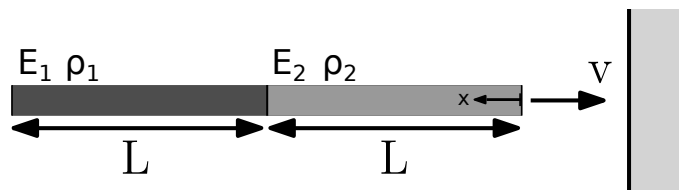


FIGURE 7 – Représentation schématique de la barre bimatérielle.

On prend pour valeurs numériques $E_1 = 20GPa$, $E_2 = 10GPa$, $\rho_1 = 1000kg/m^3$, $\rho_2 = 2000kg/m^3$ et $L = 0.5m$.

1. Calculer le rapport d'impédance R des deux matériaux et commenter. (1 pt)
2. Expliquer physiquement, sans calculs, ce qui se produit lorsque la barre impacte le mur et l'origine de son rebond. (1 pt)
3. Tracer le diagramme (C, t) de la propagation de l'onde. Veiller à respecter la convention de l'axe définie dans la figure 7. (2 pts)
4. Calculer la durée pendant laquelle la barre est en contact avec le mur. Développez les expressions analytiquement, puis n'appliquez l'application numérique qu'à la fin. (1 pt)

Solution :

1. Calculer le rapport d'impédance R des deux matériaux et commenter.

Le coefficient d'impédance est donné par :

$$Z = \rho c = \rho \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\rho E}.$$

A.N. :

$$Z_1 = \sqrt{\rho_1 E_1} = \sqrt{1000 * 20 \cdot 10^9} \approx 4.47 \cdot 10^6 \text{ Pa.s/m},$$

$$Z_2 = \sqrt{\rho_2 E_2} = \sqrt{2000 * 10 \cdot 10^9} \approx 4.47 \cdot 10^6 \text{ Pa.s/m},$$

$$R = Z_1/Z_2 = 1.$$

Les coefficients d'impédance des deux matériaux sont identiques. L'onde sera donc transmise intégralement à l'interface entre les deux matériaux sans réflexion.

2. Expliquer physiquement, sans calculs, ce qui se produit lorsque la barre impacte le mur et l'origine de son rebond. (1 pt)

Comme l'impédance des deux matériaux est identique, il n'y a pas d'onde réfléchie à leur interface. L'impact de la barre avec le mur génère une onde de compression qui se propage du bord droit vers le bord gauche où elle est réfléchie, produisant une onde de traction se déplaçant vers le mur. Lorsque l'onde de traction atteint le mur, la barre rebondit en raison d'une vitesse particulière négative.

3. Tracer le diagramme (C, t) de la propagation de l'onde. Veiller à respecter la convention de l'axe définie dans la figure 7. (2 pts)

Le diagramme (C, t) est présenté dans la figure 8.

4. Calculer la durée pendant laquelle la barre est en contact avec le mur. Développez les expressions analytiquement et ne faites l'application numérique qu'à la fin. (1 pt)

L'onde met un temps t_1 et t_2 à parcourir, respectivement, les parties de la barre composées des matériaux 1 et 2. On a :

$$t_1 = \frac{L_1}{c_1} = L_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}},$$

$$t_2 = \frac{L_2}{c_2} = L_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}.$$

Le temps total de contact t est donc :

$$t = 2(t_1 + t_2) = 2 \left(L_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} + L_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \right) = 2L \left(\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} + \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \right).$$

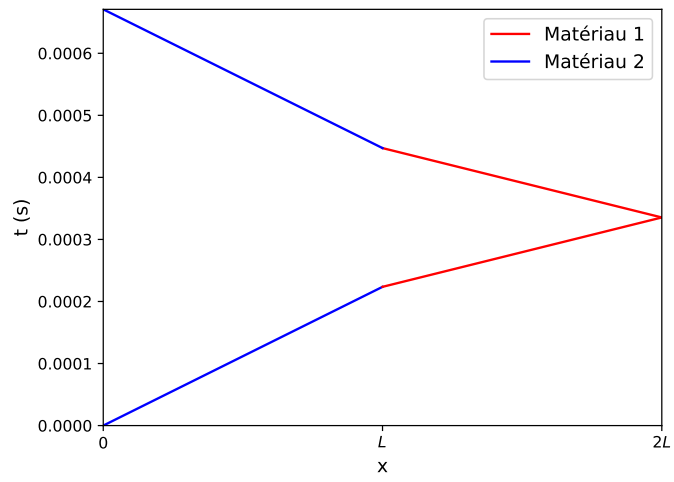


FIGURE 8 – Diagramme (C, t) de la barre bimatérielle.

A.N. : $t \approx 0.67ms$.