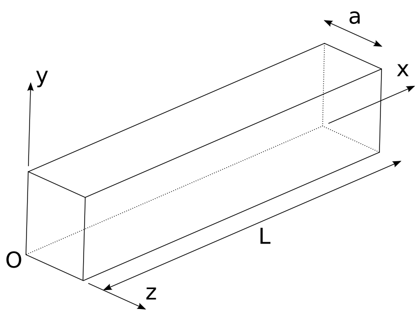
Énoncé

Exercice 1 :

Soit une poutre prismatique de longueur L et de section carrée de côté a, montrée sur la figure à droite.



Les conditions en déplacement suivantes sont appliquées :

— $u_x = 0$ au point (0, 0, 0)
— $u_y = 0$ pour la face $y = 0$, avec contact sans frottement.
— $u_z = 0$ pour la face $z = 0$, avec contact sans frottement.

Les autres surfaces sont libres de se déplacer. Il n'y a pas de force volumique. Aucune contrainte n'est appliquée à la poutre, mais celle-ci est soumise à un changement du champ de température de la forme :

$$\theta(x, y, z) = \gamma x$$

Avec γ une constante (unité K/m). On note E le module de Young, ν le coefficient de Poisson, ainsi que α le coefficient d'expansion thermique du matériau, dont la loi de comportement est linéaire, élastique et isotrope.

1. Donnez dans un tableau des conditions limites les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\underline{u}$ sur les faces $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$, $x = 0$ et $x = L$ de la poutre.

L'exercice peut se résoudre par la méthode des contraintes. Étant donné qu'aucune force n'est appliquée sur la structure et que les conditions d'appui permettent la dilatation thermique, on fait l'hypothèse que $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ dans toute la poutre.

2. Énoncez l'équation d'équilibre et montrez que le $\underline{\underline{\sigma}}$ choisi la satisfait.
3. Écrivez la loi de Hooke et donnez l'expression pour le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Montrez que ce tenseur satisfait les conditions de compatibilité de St Venant.
4. Intégrez $\underline{\underline{\varepsilon}}$ pour trouver $\underline{u}$, le champ de déplacement.
5. Quelle est l'augmentation totale de volume ΔV de la poutre ?

Exercice 2 :

On considère un rail de chemin de fer d'axe Ox, de longueur $L = 50\,\text{m}$, de section droite $S = 77\,\text{cm}^2$ (voir figure 1). Le rail est en acier et le matériau est thermoélastique linéaire isotrope (E, ν, α).

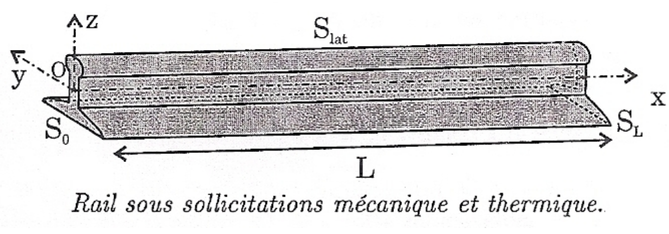


FIGURE 1 – Rail de chemin de fer

1. Cas isotherme

   La section S_0 en x=0 demeure à chaque instant en contact sans frottement avec le plan x=0. La section S_L en est en contact sans frottement avec le plan rigide qui lui impose le déplacement $\delta \underline{e_x}$. La surface latérale S_{lat} est libre de contrainte. On suppose l'évolution quasi-statique isotherme.

   (a) Ecrire les conditions aux limites
   (b) Trouver l'expression du tenseur des contraintes. Vérifier qu'il satisfait les conditions aux limites et l'équation d'équilibre.
   (c) Donner la variation de volume du rail.
   (d) En déduire la procédure expérimentale de détermination du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

2. Effets thermiques

   Le rail est maintenant supposé libre d'efforts et, placé au soleil, il subit un écart de température uniforme ΔT de 20 °C par rapport à sa température à l'état naturel. Le rail s'allonge de 1.5 cm.

   (a) Déterminer le coefficient de dilatation thermique α.

   Le rail est maintenant posé à 25 °C. Il est dans l'impossibilité de se déformer longitudinalement (cas des rails soudés).

   (b) Déterminer les contraintes dans le rail soumis à la température hivernale de -15 °C en prenant $E = 210$ GPa et $\nu = 0.3$.
   (c) On suppose que le matériau obéit à un critère de résistance de Tresca : *Les contraintes principales σ_i telles que $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$, permettent de calculer le cisaillement maximum $\tau_{max} = (\sigma_I - \sigma_{III})/2$. Le critère de Tresca définit le cisaillement limite τ_0 et prévoit la rupture dès que $\tau_{max} \geq \tau_0$.* Y-a-t'il risque de rupture, si $\tau_0 = 205$ MPa ?

Exercice 3 : *Examen 2019, Barres refroidies*

Deux barres verticales sont fixées au sol et à une poutre horizontale en haut (voir figure 2). La poutre se comporte comme un corps rigide dont on néglige la masse et est contrainte à rester horizontale. Elle se déplace verticalement sans frottement. Les barres sont composées d'un matériau élastique, homogène et isotrope. Leurs modules de Young sont E_1 et E_2, leurs sections sont A_1 et A_2 et leurs coefficients de dilatation thermique sont α_1 et α_2. Les barres sont soumises à un changement de température $\Delta T < 0$.

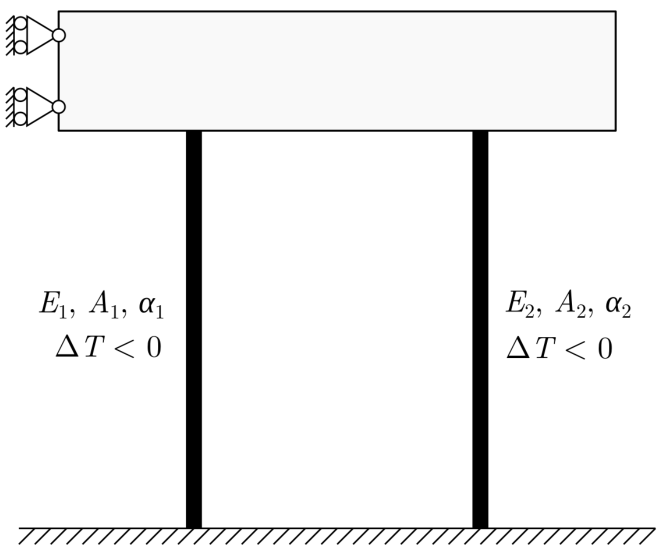


FIGURE 2 – Configuration pour les points 1 et 2

1. Écrire l'équation d'équilibre statique du système et le lien entre les déformations des deux barres.

2. Quels sont les états de contrainte dans les barres 1 et 2 ? Les exprimer en fonction de $\Delta T, E_1, E_2, A_1, A_2, \alpha_1$ et α_2. Que se passe-t-il à la limite où $E_2 \to 0$? Commenter.
3. Répondre aux questions précédentes dans le cas de barres mises en série (voir figure 3).

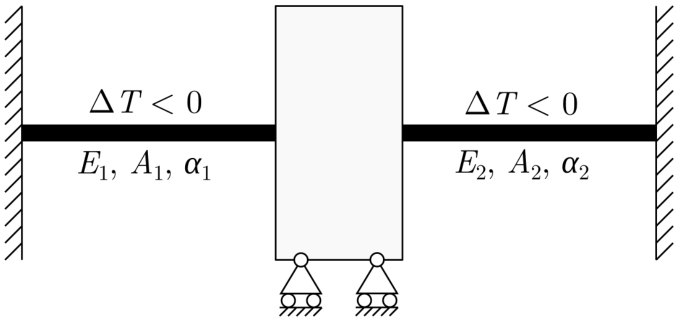


FIGURE 3 – Configuration pour le point 3