

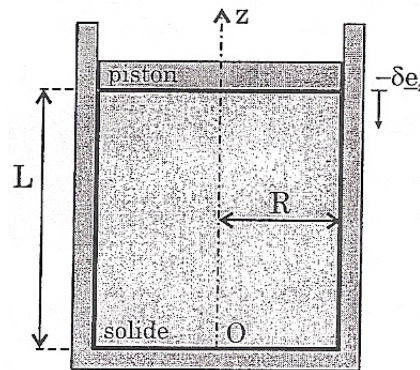
Correction

Exercice 1 : Essai oedométrique

On considère un bloc parallélépipédique d'axe Oz de section carrée, de côté $2R$ sur la surface $x - y$ et de hauteur L dans la direction z (voir figure 1). Il est placé dans un conteneur indéformable de même géométrie. Le contact entre le conteneur et le bloc est sans frottement.

Un piston indéformable, astreint à coulisser dans le conteneur, est en contact sans frottement avec la partie supérieure du bloc.

Le bloc est constitué d'un matériau thermoélastique linéaire isotrope homogène, de caractéristiques λ , μ et α . Le piston est soumis à un déplacement vertical $(-\delta e_z)$. Les forces de masse sont négligées.



Essai oedométrique.

FIGURE 1 –

1. Traduire les conditions aux limites en termes de données.
2. Le but de cette question est de calculer un champ de déplacement, qui est éventuellement solution du problème. On cherche un déplacement de la forme :

$$\underline{u}(x, y, z) = f(z)\underline{e}_z \tag{1}$$

- (a) Ecrire deux conditions sur f .
 - (b) Expliciter le tenseur des petites déformations en fonction de f .
 - (c) Calculer le tenseur des contraintes. Déterminer la forme de f à partir de l'équation d'équilibre.
 - (d) Donner l'expression du déplacement en fonction de δ .
 - (e) Vérifier que le tenseur des contraintes est admissible (i.e. qu'il satisfait les conditions aux limites).
3. La solution trouvée est-elle exacte ?
 4. On donne l'expression de la force extérieure $\underline{f}_{\text{ext}}$ et du moment extérieur $\underline{m}_{\text{ext}}$ qui s'appliquent sur la face supérieure du bloc S :

$$\underline{f}_{\text{ext}} = \int_S \underline{\sigma} \underline{e}_z dS \tag{2}$$

$$\underline{m}_{\text{ext}} = \int_S \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma} \underline{e}_z) dS \tag{3}$$

où M est un point de S . Calculer $\underline{f}_{\text{ext}}$ et $\underline{m}_{\text{ext}}$.

5. Le piston est maintenant astreint à rester fixe à la côte $z = L$. On fait subir un échauffement uniforme ΔT . Déterminer le champ de contrainte dans le bloc.

Correction

1. Conditions aux limites

Les surfaces du problème sont :

- S_0 surface du bas en $z = 0$.
- S_L surface du haut en $z = L$.
- S_{lat_x} surfaces latérales définies par $x = \pm R$.
- S_{lat_y} surfaces latérales définies par $y = \pm R$.

Sur chacune de ces surfaces, il faut donner une condition en traction ou en déplacement dans chaque direction : \underline{e}_x , \underline{e}_y et \underline{e}_z .

Limite	\underline{e}_x	\underline{e}_y	\underline{e}_z
S_0	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$u_z = 0$
S_L	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$u_z = -\delta$
S_{lat_x}	$u_x = 0$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
S_{lat_y}	$t_x = 0$	$u_y = 0$	$t_z = 0$

\underline{u} = vecteur déplacement, $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ vecteur des contraintes.

2. (a) On suppose que $\underline{u}(x, y, z) = f(z)\underline{e}_z$.

Vérifions que ce \underline{u} satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_z(z=0) = 0 &\Leftrightarrow f(0) = 0 \\ u_z(z=L) = -\delta &\Leftrightarrow f(L) = -\delta \\ u_x(x=\pm R) = 0 &\text{ car } u_x = 0 \\ u_y(y=\pm R) = 0 &\text{ car } u_y = 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^t) \\ \underline{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f'(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= 2\mu \underline{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \mathbf{1} \\ \underline{\sigma} &= \begin{bmatrix} \lambda f'(z) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda f'(z) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) f'(z) \end{bmatrix} \\ \text{div} \underline{\sigma} = 0 &\Leftrightarrow f''(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(z) = a \cdot z + b \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow b = 0 \\ f(L) = -\delta &\Rightarrow a = \frac{-\delta}{L} \\ \underline{u} &= -\frac{\delta}{L} z \cdot \underline{e}_z \end{aligned}$$

(e)

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\delta}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda\delta}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{L} \end{bmatrix} \quad (4)$$

On vérifie que les conditions limites sont bien vérifiées. :

$$\begin{aligned}
 -S_0 : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(-\underline{e}_z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{L} \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_x = t_y = 0 \\
 -S_L : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(\underline{e}_z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{L} \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_x = t_y = 0 \\
 -S_{lat_x} : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(\pm\underline{e}_x) &= \pm \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\delta}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_y = t_z = 0 \\
 -S_{lat_y} : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(\pm\underline{e}_y) &= \pm \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda\delta}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_x = t_z = 0
 \end{aligned}$$

3. La solution trouvée est exacte car :

- elle vérifie l'équation d'équilibre;
- elle vérifie les conditions limites en contrainte et en déplacement sur chacune des faces;
- elle est intégrable (et continue) dans tout le domaine.

4.

$$\begin{aligned}
 \underline{f}_{\text{ext}} &= \int_{S_L} \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{e}_z dS = \int_{S_L} -(\lambda + 2\mu) \frac{\delta}{L} \underline{e}_z dx dy \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\underline{f}_{\text{ext}} = -(\lambda + 2\mu) \frac{\delta}{L} (2R)^2 \underline{e}_z}
 \end{aligned}$$

$$\underline{m}_{\text{ext}} = \int_S \underline{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{e}_z) dS = \int_S \begin{bmatrix} x \\ y \\ L \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \end{bmatrix} dx dy$$

$$\underline{m}_{\text{ext}} = -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \int_{x=-R}^R \int_{y=-R}^R \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} dx dy$$

$$\underline{m}_{\text{ext}} = -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \int_{x=-R}^R \begin{bmatrix} \frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \\ -x(R - (-R)) \\ 0 \end{bmatrix} dx$$

$$\underline{m}_{\text{ext}} = -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \left(\frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{m}_{\text{ext}} = \underline{0}}$$

5. $\delta = 0$ mais $\Delta T \neq 0$.

Tous les calculs précédents ne prenaient pas en compte les effets thermiques. Il faut les rajouter dans la relation de comportements.

$\delta = 0$ nous permet de supposer $\epsilon = 0$

En utilisant la loi de Hooke généralisée, on obtient $\boxed{\boldsymbol{\sigma} = -\alpha(2\mu + 3\lambda)\Delta T \mathbf{1} = -\alpha \frac{E}{1 - 2\nu} \Delta T \mathbf{1}}$ qui

respecte bien les conditions aux limites de la question 1 avec $\delta = 0$, l'équilibre et la compatibilité.

Exercice 2 :

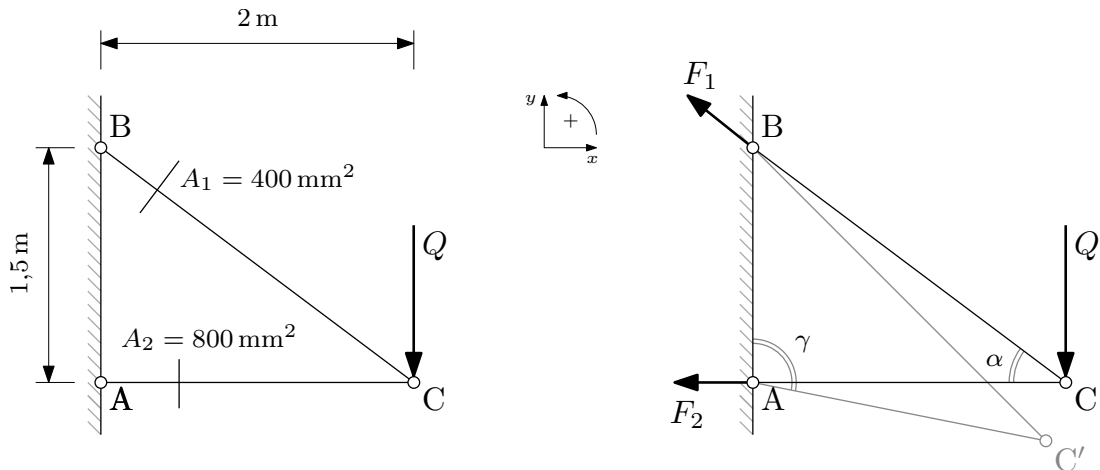


FIGURE 2 – Console triangulée.

Une console triangulée ABC (voir figure 2) est formée de deux barres en acier et est soumise à la seule charge concentrée verticale $Q = 60 \text{ kN}$ au nœud C (poids propre négligé). Déterminer pour de petits déplacements

1. la contrainte normale dans chaque barre ;
2. l'allongement ou le raccourcissement de chaque barre ;
3. les composantes horizontale et verticale du déplacement du nœud C. *Indication* : au nœud C, supprimer la liaison des barres, porter les variations de longueur calculées à la question 2 et construire la position C' du nœud en configuration déformée.

Note : il est possible d'utiliser le théorème de Pythagore généralisé à la question 3. Soient a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle quelconque. Soit :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

où γ est l'angle entre a et b .

Correction Ces barres ne peuvent pas fléchir (grâce aux appuis rotules). On cherche à calculer la contrainte normale dans chaque barre. On exprime, comme sur le schéma joint les forces de réactions en A et B comme F_2 et F_1 respectivement. Calculons tout d'abord les réactions. Pour ce faire on exprime l'équilibre des moments au point B :

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -Q \cdot 2 \text{ m} - F_2 \cdot 1.5 \text{ m} = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{-Q \cdot 2 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = -80 \text{ kN} \quad (6)$$

On exprime aussi l'équilibre des forces s'appliquant à notre objet :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_2 - F_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = -\frac{F_2}{\cos \alpha} = -\frac{-80 \text{ kN}}{\cos(\arctan(1.5/2))} = 100 \text{ kN} \quad (8)$$

On en déduit, les contraintes normales dans les barres :

$$\sigma_{BC} = \frac{F_1}{A_1} = 250 \text{ MPa} \quad (9)$$

$$\sigma_{AC} = \frac{F_2}{A_2} = -100 \text{ MPa} \quad (10)$$

Par la loi de Hooke on obtient simplement les déformations des barres :

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{250 \text{ MPa}}{205 \text{ GPa}} \simeq 0,00122 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{-100 \text{ MPa}}{205 \text{ GPa}} \simeq -0,000488 \quad (12)$$

Et finalement l'élongation est :

$$\Delta_{BC} = \varepsilon_{BC} \cdot \|BC\| \simeq 0,00122 \cdot \sqrt{2000^2 + 1500^2} = 3.05 \text{ mm} \quad (13)$$

$$\Delta_{AC} = \varepsilon_{AC} \cdot \|AC\| \simeq -0,000488 \cdot 2000 = -0.976 \text{ mm} \quad (14)$$

Enfin, pour déterminer le déplacement du noeud C, le plus simple est de trouver la position du point C' via le théorème de Pythagore généralisé :

$$\begin{aligned} \gamma &= \arccos \left(\frac{\|AB\|^2 + \|AC'\|^2 - \|BC'\|^2}{2\|AB\| \cdot \|AC'\|} \right) = \arccos \left(\frac{1500^2 + 1999,024^2 - 2503,05^2}{2 \cdot 1500 \cdot 1999,024} \right) \\ &\simeq 90,18^\circ \end{aligned} \quad (15)$$

La position de C' est donc maintenant :

$$C'_x = 1999.024 \text{ mm} \cdot \cos(90^\circ - \gamma) \quad (16)$$

$$C'_y = 1999.024 \text{ mm} \cdot \sin(90^\circ - \gamma) \quad (17)$$

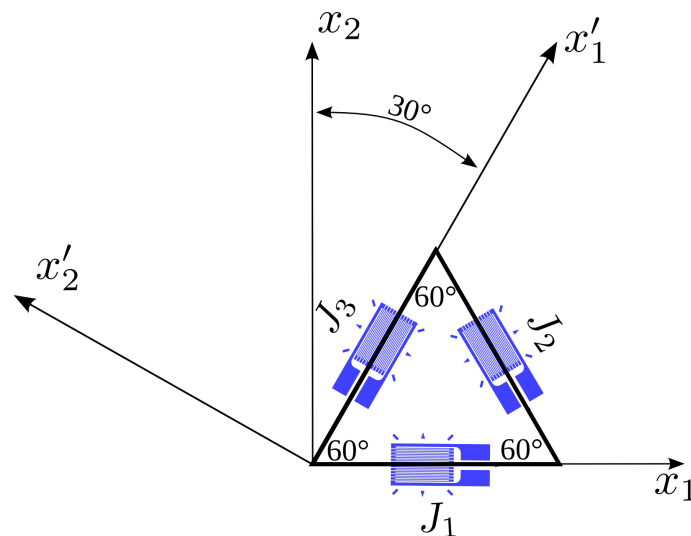
Le déplacement est donc finalement :

$$u_C = 2000 \text{ mm} - C'_x \simeq 1 \text{ mm} \quad (18)$$

$$v_C = C'_y \simeq 6.33 \text{ mm} \quad (19)$$

Exercice 3 :

On considère une rosette « Delta » comme instrument de mesure de la déformation d'un solide durant une expérience :



Ce dispositif utilise trois jauges de déformation J_1 , J_2 et J_3 placées en triangle équilatéral. Les mesures apportées par ces trois jauges sont :

$$\varepsilon_{J_1} = a$$

$$\varepsilon_{J_2} = b$$

$$\varepsilon_{J_3} = c.$$

1. Calculer ε et ε' les tenseurs des petites déformations dans les bases (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) .
2. Avons nous $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$?

Correction :

1. Soient \underline{a} , \underline{b} et \underline{c} les vecteurs unitaires portés par les jauges. On peut donc les écrire dans la base (x_1, x_2) :

$$\underline{a} = \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ \\ \sin 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'allongement unitaire en O dans les trois directions \underline{a} , \underline{b} et \underline{c} est égal à $\underline{n}^T \boldsymbol{\varepsilon}(O) \underline{n}$, avec $\underline{n} = \underline{a}$, \underline{b} ou \underline{c} .

$$\varepsilon_{nn} = n_1^2 \varepsilon_{11} + n_2^2 \varepsilon_{22} + 2n_1 n_2 \varepsilon_{12}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \varepsilon_{11} \\ b = \frac{\varepsilon_{11}}{4} + \frac{3\varepsilon_{22}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{12} \\ c = \frac{\varepsilon_{11}}{4} + \frac{3\varepsilon_{22}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{12} \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon_{11} = a \\ \varepsilon_{12} = \frac{c-b}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_{22} = \frac{2(b+c)-a}{3} \end{cases}$$

Afin de trouver la solution dans la base (x'_1, x'_2) , on écrit les vecteurs unitaires \underline{a} , \underline{b} et \underline{c} portés par les jauges dans cette nouvelle base :

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \cos(-60)^\circ \\ \sin(-60)^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'allongement unitaire en O dans les trois directions \underline{a} , \underline{b} et \underline{c} est égal à $\underline{n}'^T \boldsymbol{\varepsilon}(O) \underline{n}'$, avec $\underline{n}' = \underline{a}$, \underline{b} ou \underline{c} .

$$\varepsilon'_{nn} = n_1'^2 \varepsilon'_{11} + n_2'^2 \varepsilon'_{22} + 2n_1' n_2' \varepsilon'_{12}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \frac{\varepsilon'_{11}}{4} + \frac{3\varepsilon'_{22}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon'_{12} \\ b = \frac{\varepsilon'_{11}}{4} + \frac{3\varepsilon'_{22}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon'_{12} \\ c = \varepsilon'_{11} \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon'_{11} = c \\ \varepsilon'_{12} = \frac{b-a}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon'_{22} = \frac{2(a+b)-c}{3} \end{cases}$$

2. En utilisant les résultats précédents, on peut donc montrer que :

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} = \frac{2(a+b+c)}{3}$$

On peut aussi montrer cette égalité en s'appuyant sur le premier invariant de la déformation. Pour passer de la base (x_1, x_2) à la base (x'_1, x'_2) , on fait une rotation autour de l'axe x_3 . Ce qui veut dire que la déformation dans cette troisième direction est la même dans les deux bases, on a alors : $\varepsilon_{33} = \varepsilon'_{33}$. Maintenant si on écrit le premier invariant du tenseur de déformation, on aura donc :

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon_{ij}) &= I_1(\varepsilon'_{ij}) \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} &= \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33} \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} &= \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} \end{aligned}$$