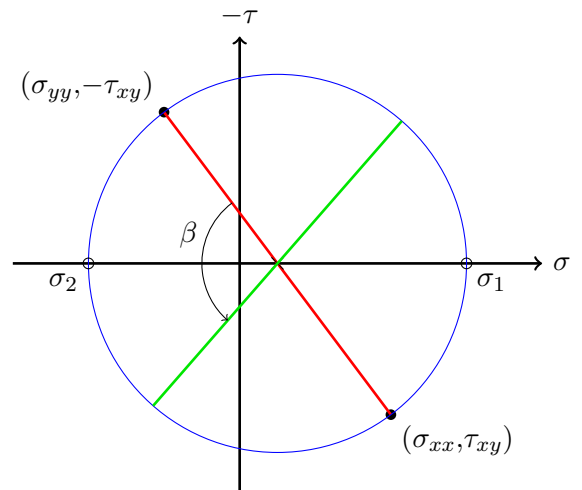


Cercle de Mohr : corrections

Conventions utilisées pour le cercle de Mohr

Pour tracer un cercle de Mohr en 2D correspondant à un tenseur de contraintes donné, commencez par tracer un système de coordonnées avec σ sur l'axe des abscisses et $-\tau$ sur l'axe des ordonnées. Placez les points (σ_{xx}, τ_{xy}) et $(\sigma_{yy}, -\tau_{xy})$, puis reliez-les par un segment (en rouge). Le point d'intersection de ce segment avec l'axe σ est le centre d'un cercle (en bleu) passant par les deux autres points. Les contraintes principales σ_1 et σ_2 se situent aux points d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses, avec $\sigma_1 > \sigma_2$. Pour effectuer une rotation du système de coordonnées d'un angle α , il faut tourner le segment (rouge) d'un angle $\beta = 2\alpha$ (donnant le segment vert). Les angles sont définis dans le sens *anti-horaire* (Notez que, bien que contre-intuitif, si l'axe des ordonnées n'était pas inversé, les angles auraient dû être définis dans le sens horaire).



Exercice 1 :

L'état de contrainte où les seules composantes non nulles sont $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ est appelé cisaillement simple. Autrement dit le tenseur des contraintes a la forme :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. Trouvez les contraintes et les directions principales.
2. Trouvez la contrainte de cisaillement maximale et la direction dans laquelle elle agit.

Solution :

1. Les contraintes principales sont les valeurs propres de la matrice des contraintes.

$$\det(\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \tau \\ \tau & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau^2 = (\tau - \lambda)(\tau + \lambda) = 0 \tag{2}$$

Les contraintes principales sont donc $\pm\tau$. On cherche les directions principales. Pour la valeur propre $\sigma_I = \tau$:

$$\begin{cases} -\tau x + \tau y = 0 \\ \tau x - \tau y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \tag{3}$$

Ainsi, le vecteur propre normé est $\underline{n}_I = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$.

Pour la valeur propre $\sigma_{II} = -\tau$:

$$\begin{cases} \tau x + \tau y = 0 \\ \tau x + \tau y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \tag{4}$$

Ainsi, le vecteur propre normé est $\underline{n}_{II} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$.

2. La contrainte de cisaillement maximale est obtenue par :

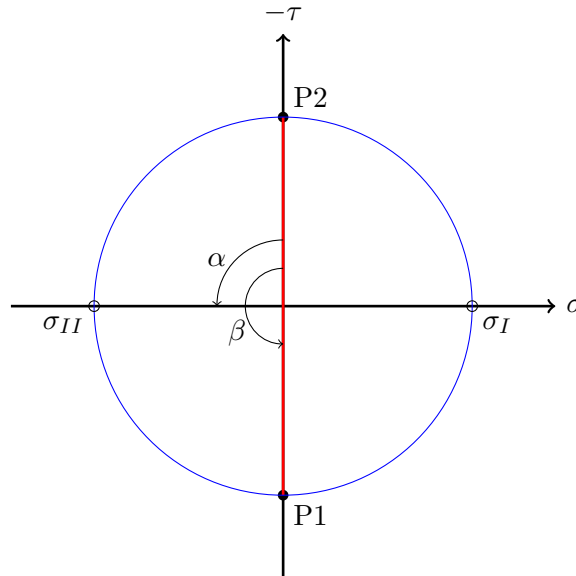
$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (5)$$

où σ_{\max} et σ_{\min} sont la plus grande et la plus petite des contraintes principales, respectivement. Dans ce cadre :

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\tau - (-\tau)}{2} = \pm \tau \quad (6)$$

L'état de contrainte donné dans l'énoncé est dans le repère du cisaillement maximal τ . Ainsi, le cisaillement maximal agit sur les plans de normale $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Remarque : L'exercice peut être résolu plus facilement à l'aide du cercle de Mohr. En utilisant les points $(0, \tau)$ et $(0, -\tau)$, on obtient un cercle centré à l'origine. Les contraintes principales se lisent sur l'axe σ . On obtient $\sigma_I = \tau$ et $\sigma_{II} = -\tau$, comme dans la résolution analytique. Pour passer à l'état des contraintes principales, il faut effectuer une rotation de 90° sur le cercle de Mohr, donc $\alpha/2 = 45^\circ$ dans le repère réel. Les directions principales sont donc obtenues en tournant les repères initiaux $((1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0))$ de 45° . On obtient les mêmes directions n_I et n_{II} que pour la solution analytique.



Les cisaillements maximaux, $\pm\tau$, peuvent être lus directement sur le cercle de Mohr. Ils agissent sur les plans de normale $(1, 0, 0)$, l'état initial, et $(0, 1, 0)$, la rotation de $\beta/2 = 90^\circ$ par rapport à l'état initial.

Exercice 2 :

L'état de contrainte dans lequel seules les trois composantes normales ne sont pas nulles est appelé état de contrainte triaxial. Autrement dit, on considère une contrainte de la forme :

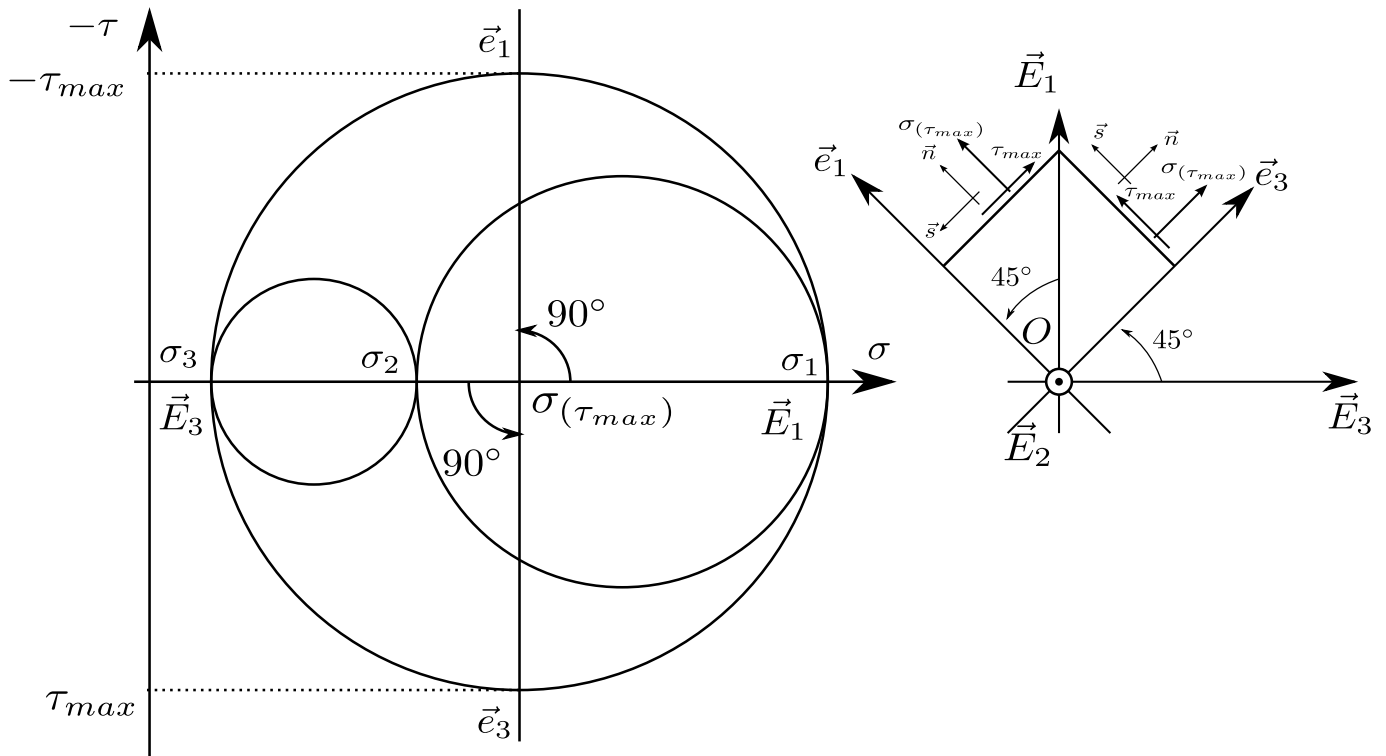
$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

On suppose que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Exprimer la contrainte de cisaillement maximale et déterminer sur quel plan elle agit.

Solution :

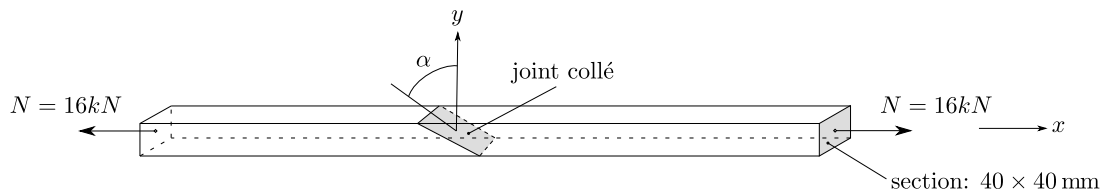
La contrainte de cisaillement maximale est $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.



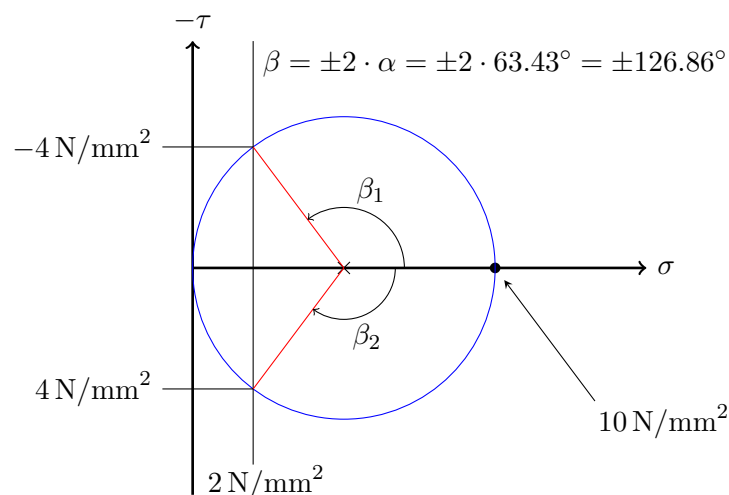
Les vecteurs \underline{E}_1 et \underline{E}_3 sont les directions principales dans lesquelles le tenseur des contraintes triaxiales est défini. Les vecteurs \underline{e}_1 et \underline{e}_3 sont les directions où le cisaillement est maximal. Leurs orientations sont données à l'aide du plus grand cercle de Mohr (Attention : les angles sont multipliés par deux dans ce cercle). Ainsi, le cisaillement maximal agit sur les plans de normale $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, \pm 1)$.

Exercice 3 : Cercle de Mohr

Un barreau de section carrée $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ est soumis à une force de traction $N = 16 \text{ kN}$. Déterminer graphiquement (cercle de Mohr) l'orientation α à donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'y excède pas 2 N/mm^2 ; quelle est alors la contrainte tangentielle dans le joint ?



Solution :

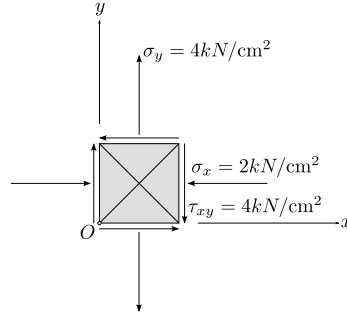


Exercice 4 : Etat plan de contrainte

Un état de contrainte en un point O d'un solide est défini par les valeurs des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} agissant sur les facettes d'un petit élément carré. En procédant graphiquement (cercle de Mohr), transformer cet état en l'état de contrainte

1. principal,
2. selon les diagonales du carré.

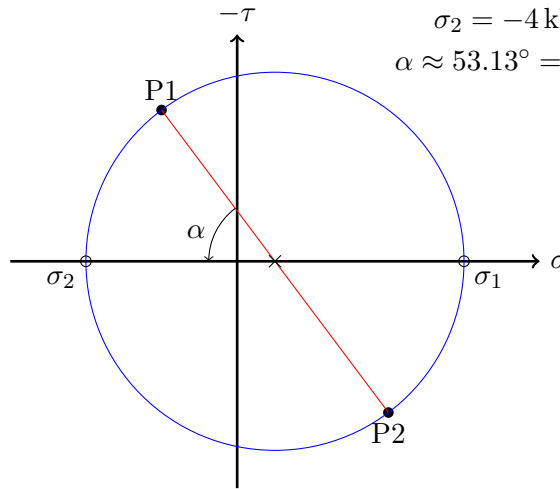
Pour chacun des deux états, dessiner les résultats sur un petit carré correctement orienté.



Solution :

$\sigma_x = -2 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 4 \text{ kN/cm}^2$ et $\tau_{xy} = -4 \text{ kN/cm}^2$

(1) $P1 = (\sigma_x, \tau_{xy})$, $P2 = (\sigma_y, -\tau_{xy})$
 $\sigma_1 = 6 \text{ kN/cm}^2$
 $\sigma_2 = -4 \text{ kN/cm}^2$
 $\alpha \approx 53.13^\circ = 2 \cdot 26.57^\circ$



(2)

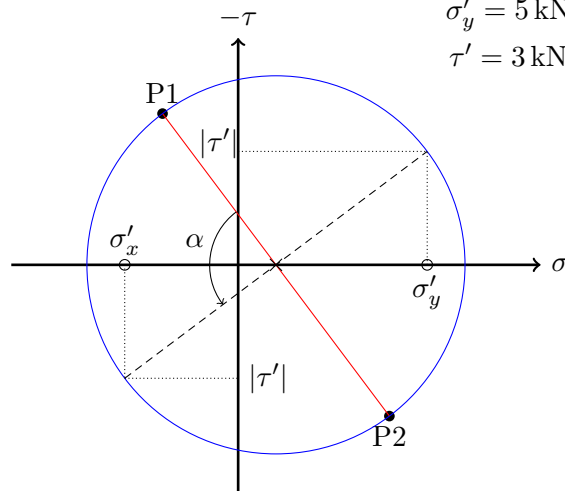
$$P1 = (\sigma_x, \tau_{xy}), P2 = (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$\alpha = 2 \cdot 45^\circ$$

$$\sigma'_x = -3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma'_y = 5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau' = 3 \text{ kN/cm}^2$$



Exercice 5 : Cercle de Mohr 3D

Les composantes cartésiennes du tenseur contraintes σ_{ij} au point 0 d'un solide sont

$$\begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} [\text{N/mm}^2]$$

Trouver,

1. les contraintes normales principales,
2. la matrice des cosinus directeurs des axes principaux,
3. la contrainte normale moyenne,
4. le tenseur déviateur,
5. la contrainte tangentielle maximale

Dessiner le tricerple de Mohr en y indiquant vos résultats.

Solution :

1. Les contraintes principales sont les valeurs propres de la matrice de contraintes.

$$\det[\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = \det(\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}) = 0$$

pour notre tenseur de contraintes on a

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 - \lambda & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

on obtient le polynôme :

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 24 = (-\lambda^2 + 4)(\lambda + 6) = (\lambda + 2)(-\lambda + 2)(\lambda + 6) = 0$$

par conséquent les contraintes normales principales sont

$$\sigma_I = 2 \text{ N/m}^2, \sigma_{II} = -2 \text{ N/m}^2, \sigma_{III} = -6 \text{ N/m}^2, \quad \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

2. Pour trouver la matrice des cosinus directeurs des axes principaux, on calcule les vecteurs propres du tenseur des contraintes :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda)n_i = 0 \quad \text{avec} \quad n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

où λ est une valeur propre et n_i le vecteur des cosinus directeurs correspondant. Pour $\lambda = \sigma_I = 2$ on obtient

$$\begin{aligned} -6n_1 + \sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3 &= 0 & n_1 &= \frac{1}{6}(\sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3) \\ \sqrt{2}n_1 - 3n_2 + 3n_3 &= 0 & \Rightarrow & n_2 = n_3 \\ -\sqrt{2}n_1 + 3n_2 - 3n_3 &= 0 & n_1 &= 0 \end{aligned}$$

et en utilisant $n_i n_i = 1$ on trouve que :

$$\underline{n}_I = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

pour $\lambda = \sigma_{II} = -2$ on obtient

$$\begin{aligned} -2n_1 + \sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3 &= 0 & -\sqrt{2}n_1 &= -n_2 + n_3 \\ \sqrt{2}n_1 + n_2 + 3n_3 &= 0 & \Rightarrow & n_2 = -n_3 \\ -\sqrt{2}n_1 + 3n_2 + n_3 &= 0 & n_1 &= \sqrt{2}n_2 \end{aligned}$$

et en utilisant $n_i n_i = 1$ on trouve que :

$$\underline{n}_{II} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

pour $\lambda = \sigma_{III} = -6$ on obtient

$$\begin{aligned} 2n_1 + \sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3 &= 0 & \sqrt{2}n_1 &= -n_2 + n_3 \\ \sqrt{2}n_1 + 5n_2 + 3n_3 &= 0 & \Rightarrow & n_2 = -n_3 \\ -\sqrt{2}n_1 + 3n_2 + 5n_3 &= 0 & n_1 &= -\sqrt{2}n_2 \end{aligned}$$

et en utilisant $n_i n_i = 1$ on trouve que :

$$\underline{n}_{III} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Finalement, la matrice des cosinus directeurs des axes principaux devient

$$[n_I \quad n_{II} \quad n_{III}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. La contrainte normale moyenne est déterminée par

$$\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

Dans notre cas, on obtient

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = -2 \text{ N/m}^2$$

4. Le tenseur déviateur des contraintes s_{ij} est déterminé par

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}$$

où σ_o représente la contrainte normale moyenne déterminée précédemment. Le déviateur devient

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

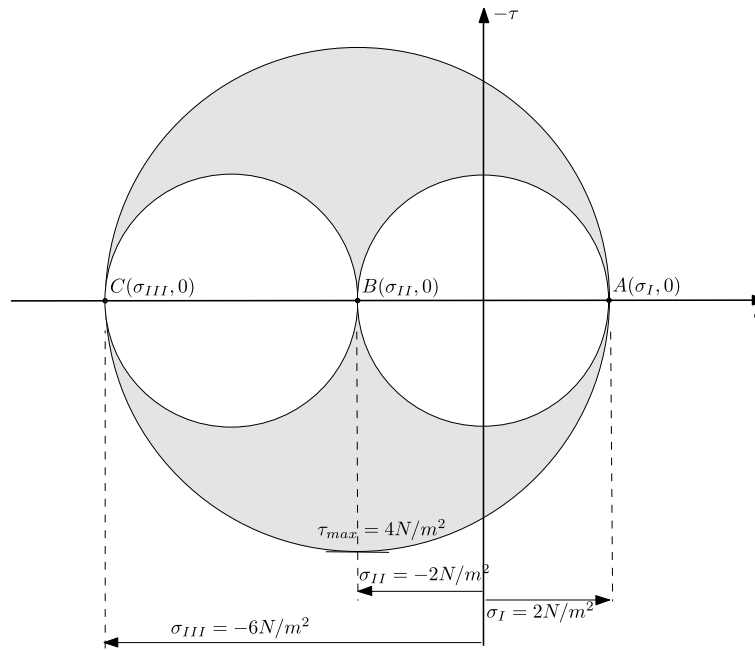
5. Après avoir déterminé les contraintes normales principales, on détermine la contrainte tangentielle maximale par

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

On obtient

$$\tau_{\max} = \pm 4 \text{ N/m}^2$$

Sur le tricercale de Mohr :



Exercice 6 :

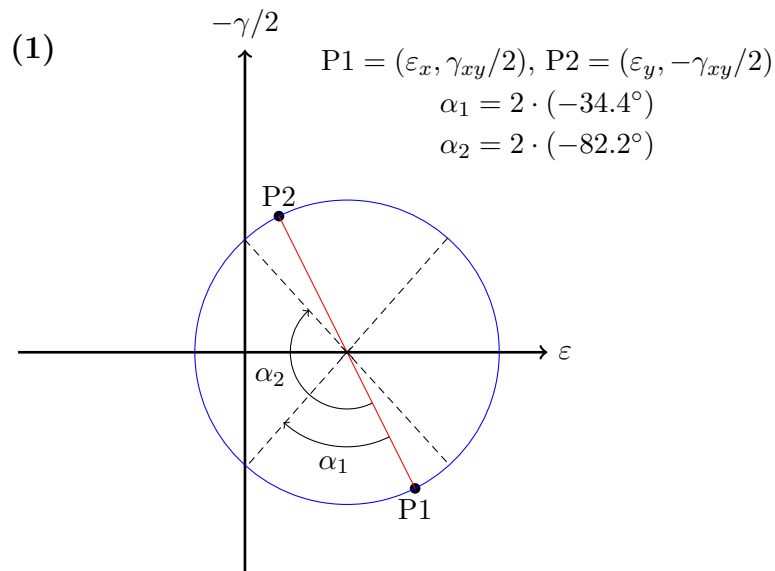
En un point d'un problème plan de déformation, les déformations valent

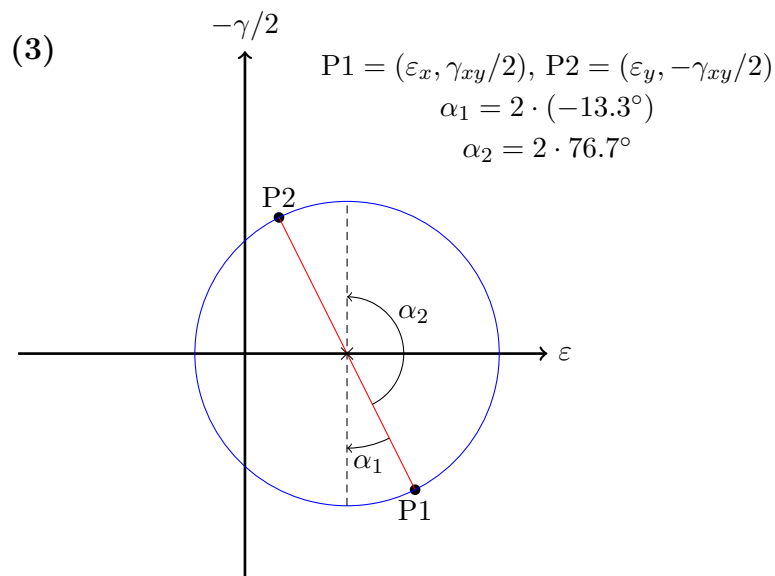
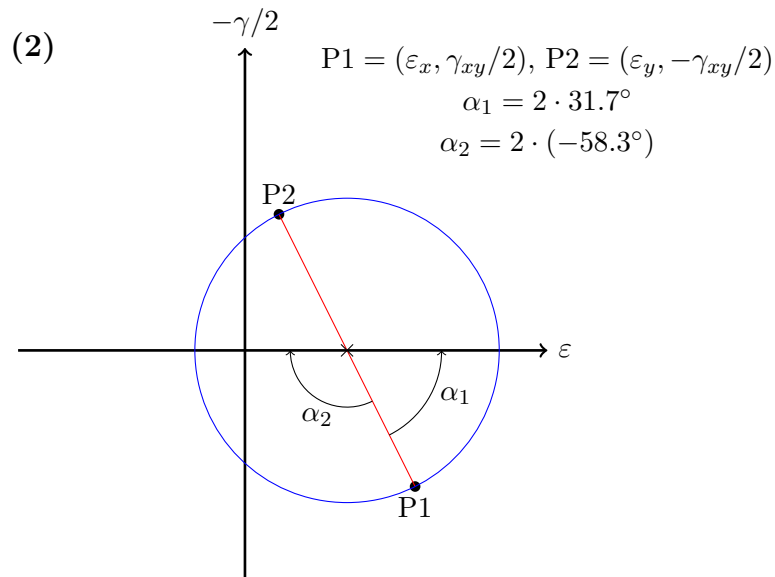
$$\varepsilon_x = 450 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_y = 90 \cdot 10^{-6} \quad \gamma_{xy} = 720 \cdot 10^{-6} \quad (8)$$

En utilisant le cercle de Mohr, trouver les directions pour lesquelles :

1. la déformation normale est nulle,
2. le glissement est nul,
3. le glissement est maximal.

Solution :





Exercice 7 :

Série 5, exercice 2

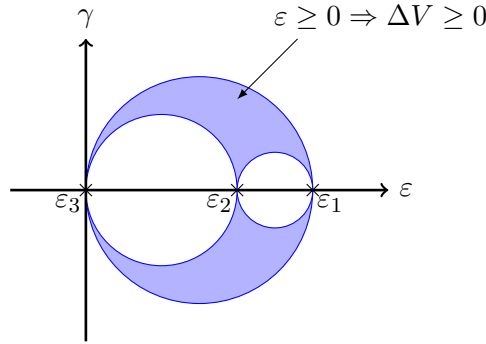
Les composantes du tenseur des déformations en un point d'un milieu continu s'expriment :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = k, \quad \varepsilon_{33} = 3k, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad k > 0 \quad (9)$$

Peut-on trouver une direction dans laquelle la déformation est négative ? Utiliser le cercle de Mohr.

Solution :

$$\varepsilon_1 = 3k, \varepsilon_2 = 2k, \varepsilon_3 = 0.$$



Exercice 8 : Tenseur des contraintes 1

On suppose que le vecteur de la force de gravité est égal à $\underline{b} = -\rho g \underline{e}_3$, où g est le module de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et ρ la masse volumique du matériau. On considère le tenseur des contraintes suivant :

$$\underline{\sigma} = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & \beta(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Déterminer l'expression de $\beta(x_1, x_2, x_3)$ de sorte que $\underline{\sigma}$ satisfasse les équations d'équilibre.

Solution :

L'équation tensorielle d'équilibre s'écrit :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{b} = \text{div}(\underline{\sigma}) - \rho g \underline{e}_3 = \underline{0} \quad (11)$$

Avec :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Donc (11) devient :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{b} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

D'où $\beta(x_1, x_2, x_3) = (1 + \rho \frac{g}{\alpha})x_3 + C(x_1, x_2)$, pour que $\underline{\sigma}$ satisfasse les équations d'équilibre, avec C une constante.

Exercice 9 : Tenseur des contraintes 2

Soit un matériau occupant un demi-espace infini où $x_2 \geq x_1$. L'état de contrainte dans le matériau est le suivant :

$$\underline{\sigma} = \alpha \begin{bmatrix} Ax_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & Bx_1 + Cx_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(Bx_1 + (A+C)x_2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

où A , B et C sont des constantes.

1. Déterminer la valeur de C de sorte que $\underline{\sigma}$ satisfasse aux équations d'équilibre en l'absence de force de gravité.
2. Le vecteur de traction est nul sur le plan $x_1 - x_2 = 0$. Déterminer les valeurs de A et de B .

Solution :

1. L'équation tensorielle d'équilibre dans le cas où la force de gravité est absente s'écrit

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Donc C doit être égal à -1 .

2. Le plan $x_1 - x_2 = 0$ ne subit aucune contrainte, le vecteur normal \underline{n} au plan orienté vers l'extérieur du matériau est donné par :

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Le vecteur de traction \underline{t} du plan est obtenu avec $\underline{t} = \underline{\sigma}\underline{n}$:

$$\underline{t} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Ax_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & Bx_1 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(Bx_1 + (A-1)x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} Ax_2 - x_1 \\ x_1 - Bx_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

En sachant que le vecteur de traction sur le plan $x_1 - x_2 = 0$ est nul ($\underline{t} = \underline{0}$), on trouve $A = 1$ et $B = 2$ car $x_1 = x_2$.

Exercice 10 : Exercice 3 de l'examen 2014

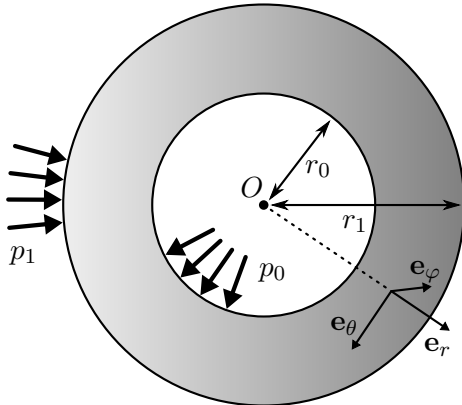


FIGURE 1 – Section de l'enveloppe sphérique

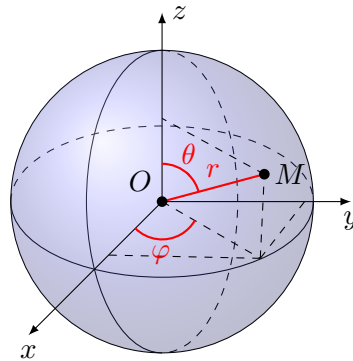


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques

On considère le réservoir sphérique de centre O de rayons intérieur et extérieur respectivement r_0 et r_1 (voir figure 1) dans un système de coordonnées sphériques orthonormées de centre O , les données sont les suivantes :

- les forces de volume sont nulles ;
- les conditions aux limites sont exclusivement des efforts surfaciques et s'énoncent comme suit :
 - pression normale uniforme égale à p_0 exercée à l'intérieur de la sphère (soit en $r = r_0$) ;
 - pression normale uniforme égale à p_1 exercée à l'extérieur de la sphère (soit en $r = r_1$).
- le champ de contraintes en coordonnées sphériques (voir figure 2) est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A - \frac{2B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3} \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

— RAPPEL : la divergence d'un tenseur en coordonnées sphériques est

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + \frac{T_{r\theta}}{\tan \theta} \right) \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{\tan \theta} + 3T_{r\theta} \right) \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(3T_{r\varphi} + \frac{2T_{\theta\varphi}}{\tan \theta} \right) \right) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

1. Vérifier que le champ de contraintes satisfait aux équations d'équilibre.
2. Déterminer le vecteur de contrainte sur une surface sphérique de rayon a .
3. Déterminer A et B en fonction de p_0 pour $p_1 = 0$.

Solution :

1. Vérifier que le champ de contraintes satisfait les équations d'équilibre.
On a bien $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), 0, 0 \right] = \underline{0}$
2. Déterminer le vecteur de contrainte sur une surface sphérique de rayon a .
 $\underline{t}(\underline{e}_r) = \boldsymbol{\sigma} \underline{e}_r = \sigma_{rr} \underline{e}_r = \left(A - \frac{2B}{a^3} \right) \underline{e}_r$
3. Déterminer A et B en fonction de p_0 pour $p_1 = 0$.
En $r = r_0$, la normale à la surface est $\underline{n} = -\underline{e}_r$, on a donc

$$\underline{t} = -\boldsymbol{\sigma} \underline{e}_r = -\sigma_{rr} = -A + \frac{2B}{r_0^3} = p_0 \quad (19)$$

En $r = r_1$, la normale à la surface est $\underline{n} = \underline{e}_r$, on a donc

$$\underline{t} = \boldsymbol{\sigma} \underline{e}_r = \sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r_1^3} = p_1 = 0 \quad (20)$$

On peut donc identifier

$$A = \frac{p_0 r_0^3}{r_1^3 - r_0^3} \quad \text{et} \quad B = \frac{p_0 r_0^3 r_1^3}{2(r_1^3 - r_0^3)} \quad (21)$$