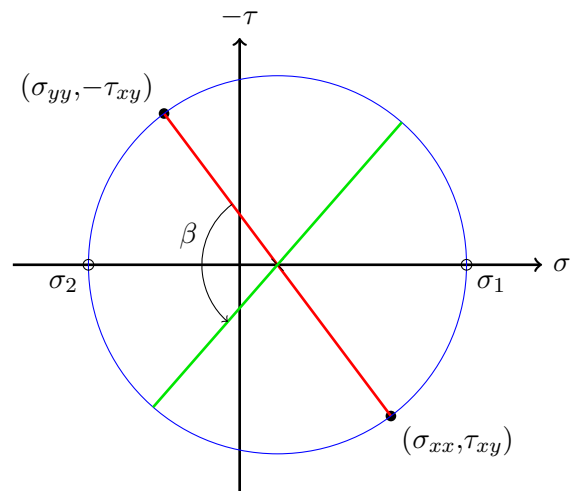


Cercle de Mohr

Certains exercices ci-dessous sont répétés des séries précédentes. Vous vous concentrerez sur l'interprétation graphique (cercle de Mohr).

Conventions utilisées pour le cercle de Mohr

Pour tracer un cercle de Mohr en 2D correspondant à un tenseur de contraintes donné, commencez par tracer un système de coordonnées avec σ sur l'axe des abscisses et $-\tau$ sur l'axe des ordonnées. Placez les points (σ_{xx}, τ_{xy}) et $(\sigma_{yy}, -\tau_{xy})$, puis reliez-les par un segment (en rouge). Le point d'intersection de ce segment avec l'axe σ est le centre d'un cercle (en bleu) passant par les deux autres points. Les contraintes principales σ_1 et σ_2 se situent aux points d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses, avec $\sigma_1 > \sigma_2$. Pour effectuer une rotation du système de coordonnées d'un angle α , il faut tourner le segment (rouge) d'un angle $\beta = 2\alpha$ (donnant le segment vert). Les angles sont définis dans le sens *anti-horaire* (Notez que, bien que contre-intuitif, si l'axe des ordonnées n'était pas inversé, les angles auraient dû être définis dans le sens horaire).



Exercice 1 :

L'état de contrainte où les seules composantes non nulles sont $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ est appelé cisaillement simple. Autrement dit le tenseur des contraintes a la forme :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

1. Trouvez les contraintes et les directions principales.
2. Trouvez la contrainte de cisaillement maximale et la direction dans laquelle elle agit.

Exercice 2 :

L'état de contrainte dans lequel seules les trois composantes normales ne sont pas nulles est appelé état de contrainte triaxial. Autrement dit, on considère une contrainte de la forme :

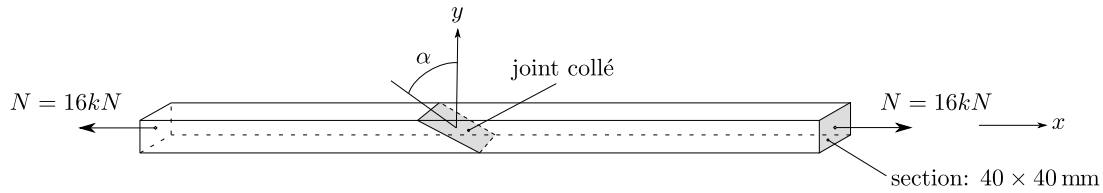
$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

On suppose que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Exprimer la contrainte de cisaillement maximale et déterminer sur quel plan elle agit.

Exercice 3 : Cercle de Mohr

Un barreau de section carrée $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ est soumis à une force de traction $N = 16 \text{ kN}$. Déterminer graphiquement (cercle de Mohr) l'orientation α à donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'y excède pas 2 N/mm^2 ; quelle est alors la contrainte tangentielle dans le joint ?

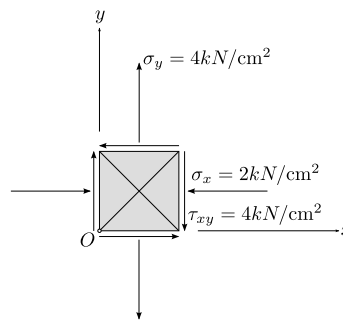


Exercice 4 : Etat plan de contrainte

Un état de contrainte en un point O d'un solide est défini par les valeurs des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} agissant sur les facettes d'un petit élément carré. En procédant graphiquement (cercle de Mohr), transformer cet état en l'état de contrainte

1. principal,
2. selon les diagonales du carré.

Pour chacun des deux états, dessiner les résultats sur un petit carré correctement orienté.



Exercice 5 :

Les composantes cartésiennes du tenseur contraintes σ_{ij} au point 0 d'un solide sont

$$\begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

Trouver,

1. les contraintes normales principales,
2. la matrice des cosinus directeurs des axes principaux,
3. la contrainte normale moyenne,
4. le tenseur déviateur,
5. la contrainte tangentielle maximale

Dessiner le tricercler de Mohr en y indiquant vos résultats.

Exercice 6 :

En un point d'un problème plan de déformation, les déformations valent

$$\varepsilon_x = 450 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_y = 90 \cdot 10^{-6} \quad \gamma_{xy} = 720 \cdot 10^{-6} \quad (3)$$

En utilisant le cercle de Mohr, trouver les directions pour lesquelles :

1. la déformation normale est nulle,
2. le glissement est nul,
3. le glissement est maximal.

Exercice 7 :

Série 5, exercice 2

Les composantes du tenseur des déformations en un point d'un milieu continu s'expriment :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = k, \quad \varepsilon_{33} = 3k, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad k > 0 \quad (4)$$

Peut-on trouver une direction dans laquelle la déformation est négative ? Utiliser le cercle de Mohr.

Exercice 8 : Tenseur des contraintes 1

On suppose que le vecteur de la force de gravité est égal à $\underline{b} = -\rho g \underline{e}_3$, où g est le module de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et ρ la masse volumique du matériau. On considère le tenseur des contraintes suivant :

$$\underline{\sigma} = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & \beta(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Déterminer l'expression de $\beta(x_1, x_2, x_3)$ de sorte que $\underline{\sigma}$ satisfasse les équations d'équilibre.

Exercice 9 : Tenseur des contraintes 2

Soit un matériau occupant un demi-espace infini où $x_2 \geq x_1$. L'état de contrainte dans le matériau est le suivant :

$$\underline{\sigma} = \alpha \begin{bmatrix} Ax_2 & x_1 & 0 \\ x_1 & Bx_1 + Cx_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(Bx_1 + (A + C)x_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

où A , B et C sont des constantes.

- Déterminer la valeur de C de sorte que $\underline{\sigma}$ satisfasse aux équations d'équilibre en l'absence de force de gravité.
- Le vecteur de traction est nul sur le plan $x_1 - x_2 = 0$. Déterminer les valeurs de A et de B .

Exercice 10 : Exercice 3 de l'examen 2014

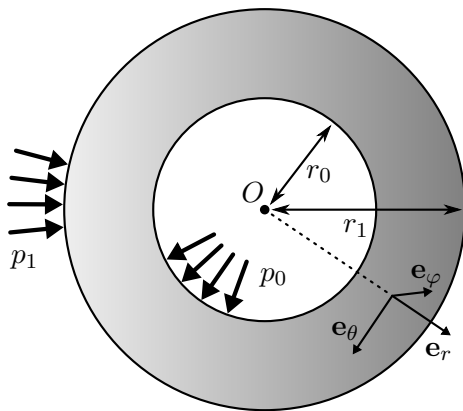


FIGURE 1 – Section de l'enveloppe sphérique

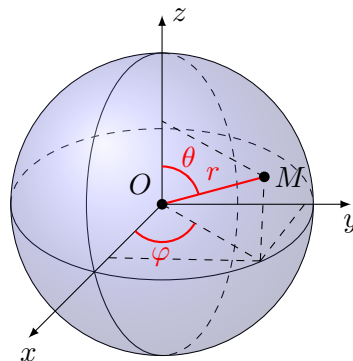


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques

On considère le réservoir sphérique de centre O de rayons intérieur et extérieur respectivement r_0 et r_1 (voir figure 1) dans un système de coordonnées sphériques orthonormées de centre O , les données sont les suivantes :

- les forces de volume sont nulles ;

- les conditions aux limites sont exclusivement des efforts surfaciques et s'énoncent comme suit :
 - pression normale uniforme égale à p_0 exercée à l'intérieur de la sphère (soit en $r = r_0$);
 - pression normale uniforme égale à p_1 exercée à l'extérieur de la sphère (soit en $r = r_1$).
- le champ de contraintes en coordonnées sphériques (voir figure 2) est de la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= A - \frac{2B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3} \\ \sigma_{\theta\phi} &= \sigma_{r\phi} = \sigma_{r\theta} = 0\end{aligned}\tag{7}$$

- RAPPEL : la divergence d'un tenseur en coordonnées sphériques est

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{T} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + \frac{T_{r\theta}}{\tan \theta} \right) \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{\tan \theta} + 3T_{r\theta} \right) \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(3T_{r\varphi} + \frac{2T_{\theta\varphi}}{\tan \theta} \right) \right) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

1. Vérifier que le champ de contraintes satisfait aux équations d'équilibre.
2. Déterminer le vecteur de contrainte sur une surface sphérique de rayon a .
3. Déterminer A et B en fonction de p_0 pour $p_1 = 0$.