

Contraintes

Exercice 1 : Petites rotations

Une barre rigide homogène de longueur L est initialement alignée sur l'axe x du repère cartésien (O, x, y) . La barre est ensuite tournée d'un angle fini θ autour de l'origine O , sans subir de déformation (la longueur de la barre reste constante). La nouvelle position de la barre est donc orientée à un angle θ par rapport à l'axe x .

1. Exprimez le champ de déplacement $\mathbf{u}(X)$ des points de la barre en fonction des positions matérielles initiales $\mathbf{X} = (X, Y)$ et de l'angle de rotation θ .
2. Calculez le gradient de déplacement $\nabla \mathbf{u}$, tenseur des petites déformations, le tenseur des petites rotations. Montrez que, malgré l'absence de déformation réelle, le tenseur des petites déformations prédit des déformations non nulles pour cette rotation finie.
3. Analyser si, pour des valeurs infinitésimales de l'angle de rotation θ , la déformation est négligeable par rapport à la rotation.
4. Calculez le tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E} . Est-ce qu'il y a des déformations ?

Solution :

1. la rotation rigide de la barre est donnée par :

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta,$$

alors le déplacement s'écrit :

$$u = x - X = X(\cos \theta - 1) - Y \sin \theta \quad (1)$$

$$v = y - Y = X \sin \theta + Y(\cos \theta - 1) \quad (2)$$

- 2.

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

3. Pour de petits angles $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ et $\sin \theta \approx \theta$, donc la déformation est plus petite que la rotation.
4. Le gradient de la transformation est

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

ce qui signifie que \mathbf{F} est une rotation et donc $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$. Donc $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})/2 = \mathbf{0}$. Cet exemple montre que la déformation infinitésimale de Cauchy ne doit pas être utilisée en présence de rotations finies du milieu continu.

Exercice 2 : Compatibilité

1. Le déplacement $u_1 = \sin(x_1)$, $u_2 = x_1^2 x_2$, $u_3 = \cos(x_3)$ correspond-il à un champ de déformations compatibles ?
2. Soit la déformation $\varepsilon_{11} = \frac{1}{\alpha} f(x_2, x_3)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{\alpha} f(x_2, x_3)$ et $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Montrer que pour que cette déformation soit compatible, $f(x_2, x_3)$ doit être linéaire.

Solution :

1. Le déplacement est continu et dérivable, on peut donc le dériver pour obtenir le champ de déformation compatible.
2. On utilise la notation suivante : $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \varepsilon_{ij,kl}$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} f_{,22} + 0 - 0 = 0 \\ &\Rightarrow f_{,22} = 0.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} - 2\varepsilon_{13,13} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} f_{,33} + 0 - 0 = 0 \\ &\Rightarrow f_{,33} = 0.\end{aligned}$$

A partir de ces deux conditions, il est possible d'en conclure que la fonction $f(x_2, x_3)$ est linéaire selon x_2 et x_3 :

$$f(x_2, x_3) = ax_2 + bx_3 + c \quad (7)$$

Finalement, l'équation finale nous permet de le vérifier

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{31,12} = \frac{1}{\alpha} f_{,23} = 0$$

Exercice 3 :

Nous considérons un solide constitué d'un matériau élastique isotrope, dont la configuration de référence est sa forme d'équilibre à la température T_0 . On lui impose une température $T(\underline{x})$, où \underline{x} désigne la position. On se place dans le cadre des transformations infinitésimales. Avec α est le coefficient de dilatation thermique, les déformations sont de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha (T(\underline{x}) - T_0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

1. À quelle condition sur le champ de température $T(\underline{x})$, le champ de déformation associé $\boldsymbol{\varepsilon}$ est-il géométriquement compatible ?
2. Le solide est désormais un cylindre de hauteur H et de rayon R , avec $R < H$ (cf. figure 1).

On soumet le cylindre à un champ de température linéaire en x_3 et indépendant de x_1 et x_2 , tel que
— $T(x_3 = H) = T_0 + \Delta T$
— $T(x_3 = 0) = T_0$

Le cylindre est libre (il n'est soumis à aucune condition au bord en déplacement) et on élimine les mouvements de translation et de rotation du corps rigide. Calculer le champ de déplacement associé. *Indication : Les constantes d'intégration qui apparaissent dans les expressions de u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_1 , x_2 ou x_3 . En revanche, la constante d'intégration de u_3 doit être calculée.*

3. À quelle condition sur la température l'hypothèse des déformations infinitésimales est-elle justifiée ?

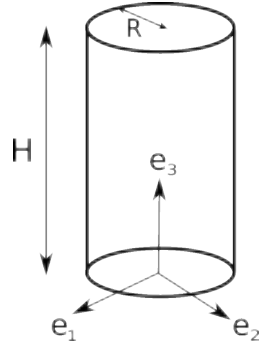


FIGURE 1 – Cylindre

Solution :

1. On considère le champ de déformation thermique

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \theta(\underline{x}) \delta_{ij}, \quad \theta(\underline{x}) = T(\underline{x}) - T_0,$$

où α est le coefficient de dilatation thermique et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

On utilise la notation suivante : $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \varepsilon_{ij,kl}$. Les conditions de compatibilité de Saint-Venant s'écrivent, pour tout quadruplet (i, j, k, l) ,

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0.$$

En substituant $\varepsilon_{ij} = \alpha \theta \delta_{ij}$, on obtient

$$\alpha \left(\theta_{,kl} \delta_{ij} + \theta_{,ij} \delta_{kl} - \theta_{,jl} \delta_{ik} - \theta_{,ik} \delta_{jl} \right) = 0.$$

Considérons différents choix d'indices :

— Pour $i = k \neq j = l$: on trouve $\theta_{,ii} + \theta_{,jj} = 0$.

— Pour $i = j, k \neq l$, distincts de i : on trouve $\theta_{,kl} = 0$.

En combinant ces relations, il en résulte que toutes les dérivées secondes de θ sont nulles :

$$\theta_{,11} = \theta_{,22} = \theta_{,33} = 0, \quad \theta_{,12} = \theta_{,13} = \theta_{,23} = 0.$$

Ainsi,

$$\theta(\underline{x}) = T(\underline{x}) - T_0 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d,$$

c'est-à-dire une fonction affine des coordonnées. Le champ de déformation thermique ε est géométriquement compatible si et seulement si le champ de température $T(\underline{x})$ est au plus linéaire en l'espace.

2. $\varepsilon = \alpha \Delta T \frac{x_3}{H} \mathbf{I}$. En intégrant ε_{11} , ε_{22} et ε_{33} , on a :

$$u_1 = \alpha \Delta T \frac{x_1 x_3}{H} + f_1(x_2, x_3)$$

$$u_2 = \alpha \Delta T \frac{x_2 x_3}{H} + f_2(x_1, x_3)$$

$$u_3 = \alpha \Delta T \frac{x_3^2}{2H} + f_3(x_1, x_2)$$

D'après l'indication de l'énoncé, on sait que f_1 et f_2 sont des constantes qui ne dépendent ni de x_1 , ni de x_2 , ni de x_3 . Pour éliminer le mouvement du corps rigide, on a donc $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. Pour trouver f_3 on utilise $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha \Delta T \frac{x_1}{H} + \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\alpha \Delta T \frac{x_1}{H} \\
&\Rightarrow f_3(x_1, x_2) = -\alpha \Delta T \frac{x_1^2}{2H} + a(x_2).
\end{aligned}$$

De même pour $\varepsilon_{23} = 0$ on trouve :

$$f_3(x_1, x_2) = -\alpha \Delta T \frac{x_2^2}{2H} + b(x_1).$$

Par identification, on a :

$$\begin{aligned}
a(x_2) &= -\alpha \Delta T \frac{x_2^2}{2H} \\
b(x_1) &= -\alpha \Delta T \frac{x_1^2}{2H}
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha \Delta T \frac{x_1 x_3}{H} \\
u_2 &= \alpha \Delta T \frac{x_2 x_3}{H} \\
u_3 &= \alpha \Delta T \frac{x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{2H}
\end{aligned}$$

ou en coordonnées cylindriques $u_r = \alpha \Delta T \frac{r z}{H}$, $u_\theta = 0$ et $u_z = \alpha \Delta T \frac{z^2 - r^2}{2H}$, à un mouvement de solide rigide près.

3. Pour que l'hypothèse des déformations infinitésimales soit justifiée, il faut que $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$. Le gradient des déplacements en coordonnées cartésiennes est :

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\alpha \Delta T}{H} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ -x_1 & -x_2 & x_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Il faut donc que chaque composante du tenseur soit inférieure à 1. Comme le cylindre est plus haut que large ($H > R$), les termes maximaux sont les termes diagonaux pour $x_3 = H$. Il faut donc :

$$\frac{\alpha \Delta T x_3}{H} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \Delta T \ll 1. \quad (10)$$

Exercice 4 : Conservation de la masse

1. En vous appuyant sur la conservation de la masse, montrer que pour un petit volume matériel dV évoluant sous l'effet du champ de vitesses $\mathbf{v}(x, t)$, la forme

$$\frac{\rho D(dV)}{Dt} + dV \frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

conduit à

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

2. On donne le champ de vitesse suivant en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{v}(r, \theta, z) = f(r, \theta) \mathbf{e}_r.$$

À partir du principe de conservation de la masse pour un matériau incompressible, déterminer la forme la plus générale de la fonction $f(r, \theta)$ qui satisfait à cette équation.

Solution :

1. De la même manière qu'on définit le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)$, on définit le tenseur des vitesses de déformation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Le premier invariant du tenseur $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ donne la vitesse de changement de volume par unité de volume dV . Autrement dit,

$$\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt}$$

En terme des composantes de la vitesse, on a

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} \frac{\rho D(dV)}{Dt} + dV \frac{D\rho}{Dt} &= \rho dV \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + dV \frac{D\rho}{Dt} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

2. Pour un matériau incompressible, la vitesse doit satisfaire l'équation de divergence nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0 \implies r v_r = \text{constante} \implies f(r, \theta) = \frac{1}{r} g(\theta). \quad (11)$$

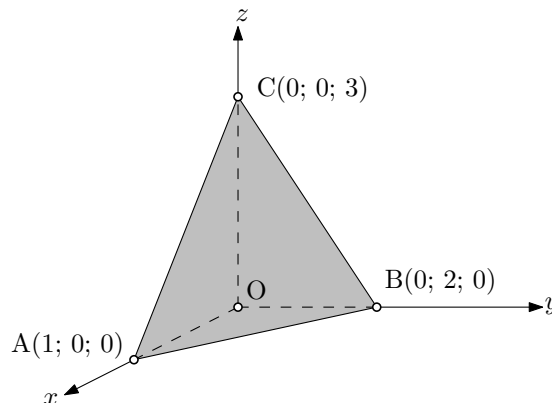
Le champ de vitesse radiale v_r doit varier comme $1/r$ pour satisfaire à la condition de divergence nulle en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible.

Exercice 5 : Composantes du vecteur contrainte

La matrice représentant le tenseur contrainte au point O d'un solide vaut

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} [\text{N/mm}^2]$$

Trouver les composantes du vecteur contrainte agissant en O sur un plan parallèle au plan ABC :



Solution :

Le vecteur contrainte est donné par $\underline{f} = \sigma \underline{n}$, et d'une manière générale le vecteur unitaire normal au plan ABC \underline{n} peut être posé comme

$$\underline{n} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\|\overline{AB} \times \overline{AC}\|}.$$

Ici, l'équation du plan est obtenue directement : $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. Le vecteur \underline{n} est donc colinéaire à $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$. La normale, normalisée de façon correcte est

$$\mathbf{n} = \frac{6}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 6/7 \\ -1/7 \\ 1 \end{bmatrix}$$