Contraintes

Finir les exercices de la dernière série sur les déformations et les équations de compatibilité.

Exercice 1 : ***Petites rotations***

Une barre rigide homogène de longueur L est initialement alignée sur l'axe x du repère cartésien (O, x, y). La barre est ensuite tournée d'un angle fini θ autour de l'origine O, sans subir de déformation (la longueur de la barre reste constante). La nouvelle position de la barre est donc orientée à un angle θ par rapport à l'axe x.

1. Exprimez le champ de déplacement $\mathbf{u}(X)$ des points de la barre en fonction des positions matérielles initiales $\mathbf{X} = (X, Y)$ et de l'angle de rotation θ.
2. Calculez le gradient de déplacement $\nabla\mathbf{u}$, le tenseur des petites déformations et le tenseur des petites rotations. Montrez que, malgré l'absence de déformation réelle, le tenseur des petites déformations prédit des déformations non nulles pour cette rotation finie.
3. Analysez si, pour des valeurs infinitésimales de l'angle de rotation θ, la déformation est négligeable par rapport à la rotation.
4. Calculez le tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E}$. Est-ce qu'il y a des déformations ?

Exercice 2 : ***Compatibilité***

1. Le déplacement $u_1 = \sin(x_1)$, $u_2 = {x_1}^2 x_2$, $u_3 = \cos(x_3)$ correspond-il à un champ de déformations compatibles ?
2. Soit la déformation $\varepsilon_{11} = \frac{1}{\alpha} f(x_2, x_3)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{\alpha} f(x_2, x_3)$ et $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Montrer que pour que cette déformation soit compatible, $f(x_2, x_3)$ doit être linéaire.

Exercice 3 :

Nous considérons un solide constitué d'un matériau élastique isotrope, dont la configuration de référence est sa forme d'équilibre à la température T_0. On lui impose une température $T(\underline{x})$, où $\underline{x}$ désigne la position. On se place dans le cadre des transformations infinitésimales. Avec $\alpha = $ cst le coefficient de dilatation thermique, es déformations sont de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \left(T(\underline{x}) - T_0 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. À quelle condition sur le champ de température $T(\underline{x})$, le champ de déformation associé $\boldsymbol{\varepsilon}$ est-il géométriquement compatible ?
2. Le solide est désormais un cylindre de hauteur H et rayon R, avec $R < H$ (cf. figure 1).

   On soumet le cylindre à un champ de température linéaire en x_3 et indépendant de x_1 et x_2, tel que
   — $T(x_3 = H) = T_0 + \Delta T$
   — $T(x_3 = 0) = T_0$
   Le cylindre est libre (il n'est soumis à aucune condition au bord en déplacement) et on élimine les mouvements de translation et de rotation du corps rigide. Calculer le champ de déplacement associé.
   Indication : Les constantes d'intégration qui apparaissent dans les expressions de u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_1, x_2 ou x_3. En revanche, la constante d'intégration de u_3 doit être calculée.

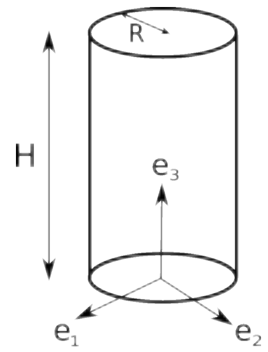

FIGURE 1 – Cylindre

3. À quelle condition sur la température l'hypothèse des déformations infinitésimales est-elle justifiée ?

Exercice 4 : ***Conservation de la masse***

1. En vous appuyant sur la conservation de la masse, montrer que pour un petit volume matériel dV évoluant sous l'effet du champ de vitesses $\mathrm{v}(x, t)$, la forme

$$\frac{\rho D(dV)}{Dt} + dV\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

conduit à

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_i} = 0$$

2. On donné le champ de vitesse suivant en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{v}(r, \theta, z) = f(r, \theta)\mathbf{e_r}\,.$$

À partir du principe de conservation de la masse pour un matériau incompressible, déterminer la forme la plus générale de la fonction $f(r, \theta)$ qui satisfait à cette équation.

Exercice 5 : ***Composantes du vecteur contrainte***

La matrice représentant le tenseur contrainte au point O d'un solide vaut

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} [\mathrm{N/mm^2}]$$

Trouver les composantes du vecteur contrainte agissant en O sur un plan parallèle au plan ABC :