

### *Équilibre et déformations*

**Exercice 1 :**

On note  $\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$  le vecteur des déplacements en un point quelconque de l'espace. Par définition, le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon(\underline{u})$  est la partie symétrique du gradient des déplacements.

On considère le champ de déplacement exprimé dans un repère cartésien :

$$u = v = kxy \text{ et } w = 2k(x + y)z, \text{ avec } k \text{ constant.}$$

1. Donner l'expression générale de  $\varepsilon(\underline{u})$  en fonction de  $\nabla(\underline{u})$ , puis calculer ses coefficients.
2. Au point  $(1, 1, 0)$ , calculer déformations principales et les directions associées (valeurs et vecteurs propres de  $\varepsilon(\underline{u})$ )

**Exercice 2 :**

Les composantes du tenseur des déformations en un point d'un milieu continu s'expriment :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = k, \quad \varepsilon_{33} = 3k, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad k > 0 \quad (1)$$

Peut-on trouver une direction pour laquelle la déformation est négative ? Justifier votre réponse.

**Exercice 3 :**

Soit la matrice des déformations infinitésimales suivante :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} k_1 x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 x_2 \end{pmatrix}$$

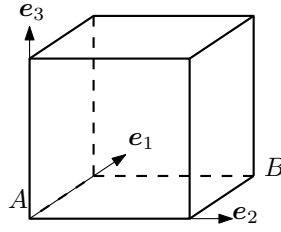
1. En quel(s) point(s) de l'espace n'observe-t'on aucun changement de volume ?
2. Quelle doit être la relation entre  $k_1$  et  $k_2$  pour que la variation de volume soit toujours nulle ?

**Exercice 4 : *Changement de longueur***

Un cube unitaire avec des arêtes parallèles aux axes  $(\underline{e}_i)$  du repère cartésien subit le champ de déplacement suivant :

$$u_1 = kx_1 \\ u_2 = u_3 = 0$$

avec  $k = 10^{-4}$



Calculer la variation de longueur de la diagonale  $\underline{AB} = (1, 1, 0)$  :

1. En utilisant le tenseur des petites déformations  $\varepsilon = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ , en sachant que  $\varepsilon$  est la partie symétrique du gradient des déplacements.  
(information : nous verrons dans le cours que les composantes du tenseur  $\varepsilon$  ont une interprétation géométrique simple, c'est à dire que  $\underline{n} \cdot \varepsilon \underline{n} = \varepsilon_{nn}$  où  $\underline{n}$  est un vecteur unitaire)
2. De façon géométrique.

### Exercice 5 :

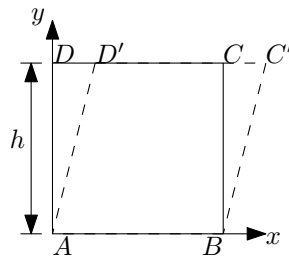
Sachant que, en cinématique linéarisée à une dimension ( $x$ ),  $\varepsilon_x = (L' - L)/L = du/dx$ ,

1. calculer la déformation de Green-Lagrange  $E_{xx}$ , on rappelle  $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$ .
2. tracer les différences entre  $\varepsilon_x$  (linéarisé) et  $E_{xx}$  (exact) pour des valeurs de  $(L' - L)/L$  égales à 1%, 2%, 4%, 6%, 8%, 10%.

### Exercice 6 :

Un domaine plan carré  $ABCD$  est déformé en un losange  $ABC'D'$  avec  $CC' = DD' = 2 \cdot 10^{-4}h$ . Déterminer

1. le changement de configuration, c'est-à-dire  $\underline{x}' = \underline{x}'(\underline{x})$
2. le champ des déplacements
3. le tenseur déformation linéarisé
4. le tenseur déformation de Green.



### Exercice 7 :

*Rappel* : Soit  $\mathbf{F}$  un tenseur quelconque inversible. On peut démontrer que tout tenseur inversible peut s'exprimer sous la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  où  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal et  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des tenseurs symétriques.

On donne le champ de déplacement suivant :  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = -3X_3$  et  $x_3 = 2X_2$ . Déterminer :

1. Le gradient de déformation  $\mathbf{F}$ .
2. Le tenseur d'élongation à droite  $\mathbf{U}$ .
3. Le tenseur de rotation  $\mathbf{R}$ .
4. Le tenseur d'élongation à gauche  $\mathbf{V}$ .

**Exercice 8 :**

Pour déterminer les élongations en un point de la surface d'un solide on utilise expérimentalement des jauges de déformation. Une jauge permet de mesurer l'élongation dans une direction. 3 jauges sont nécessaires pour caractériser le champ des déformations.

Une des possibilités est de les orienter à  $45^\circ$  les unes des autres dans les directions  $\underline{e}_1$ ,  $\sqrt{2}/2(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$  et  $\underline{e}_2$ .

On appelle ce dispositif *rosette à  $45^\circ$* .

Si les élongations mesurées dans ces 3 directions sont  $a$ ,  $b$  et  $c$ , quelles sont les composantes des déformations  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{12}$  ?